Матричная коррекция пары двойственных задач линейного программирования

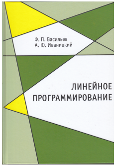
В. И. Ерохин[1]

[1] Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
erohin_v_i@mail.ru

Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML»
http://oml.cmlaboratory.com/

Санкт-Петербург, 6 октября 2022 г.

Новая редакция книги (монографии) Ф.П. Васильева и А.Ю. Иваницкого



Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю.
В19 Линейное программирование. — Новое изд. — М.: МЦНМО, 2020. — 412 с., ил.

ISBN 978-5-4439-1359-9

В книге дается строгое изложение основ теории линейного программирования с использованием минимального аппарата математического анализа и линейной алгебры, без привлечения теории многогранных множеств и теорем отделимости. Симплекс-метод излагается полно и строго, включая так называемый вырожденный случай. На базе симплекс-метода строится теория двойственности, доказывается ряд важных теорем линейного программирования (существование решения, теорема Фаркаша, неравенство Хоффмана и др.). Излагаются другие методы (*M*-метод, двойственный симплекс-метод, метод потенциалов, полиномиальные методы). Впервые в учебной литературе излагаются теория устойчивости для общей задачи линейного программирования, основные методы регуляризации для решения некорректных задач. В новое издание книги добавлен § 1.8, значительно переработана глава 6, добавлена глава 8, посвященная коррекции противоречивых линейных задач. Исправлены замеченные неточности, опечатки.

Для студентов вузов математических и экономических специальностей, а также для специалистов в области оптимизации. Отмеченные звездочками разделы являются дополнительными, они рассчитаны на обучающихся в магистратуре и читателей, заинтересованных в углубленном изучении предмета.

ББК 22.18

Предисловие 5

Глава 1. Симплекс-метод 8
§ 1.1. Постановка задачи 8
§ 1.2. Геометрическая интерпретация. Угловые точки 16
§ 1.3. Метод исключения Гаусса—Жордана 23
§ 1.4. Основная схема симплекс-метода 29
§ 1.5. Антициклин 51
§ 1.6. Поиск начальной угловой точки. Условия разрешимости канонической задачи 68
§ 1.7. Модифицированный симплекс-метод 85
§ 1.8*. Симплекс-метод в канонической задаче с двусторонними ограничениями 94

Глава 2. Основные теоремы линейного программирования 108
§ 2.1. Условие разрешимости общей задачи 108
§ 2.2. Теоремы двойственности 111
§ 2.3. *M*-метод 123
§ 2.4. Другие теоремы 132
§ 2.5. Оценка расстояния от точки до полиэдра (неравенство Хоффмана) . . . 138
§ 2.6*. Некоторые свойства решений задач линейного программирования . . . 145

Глава 3. Двойственный симплекс-метод 157
§ 3.1. Описание метода 157
§ 3.2. Интерпретация метода для двойственной задачи 169
§ 3.3. Выбор начальной точки 180
§ 3.4. Двойственная интерпретация основного симплекс-метода 192
§ 3.5. Метод сокращения невязки 196

Глава 4. Транспортная задача. Метод потенциалов 211
§ 4.1. Постановка задачи. Некоторые особенности транспортной задачи 211
§ 4.2. Транспортная сеть. Критерий угловой точки 216
§ 4.3. Метод северо-западного угла 222
§ 4.4. Метод потенциалов 229
§ 4.5. Метод вычеркивания 241

Глава 5*. Критерий устойчивости 249
§ 5.1. Примеры. Определения 249
§ 5.2. Необходимое условие устойчивой разрешимости 253
§ 5.3. Критерии ограниченности полиэдров 255
§ 5.4. Критерии устойчивой разрешимости 261
§ 5.5. Равносильность различных понятий устойчивости 270

Глава 6. Методы регуляризации 281
§ 6.1. Метод стабилизации 281
§ 6.2. Метод невязки 293
§ 6.3. Метод квазирешений 303
§ 6.4. Общие замечания 306

Глава 7*. О полиномиальных методах в линейном программировании 308
§ 7.1. Постановка задачи 308
§ 7.2. Метод Хачияна 317
§ 7.3. Метод Кармаркара 324
§ 7.4. Метод Нестерова 338

Глава 8*. Коррекция противоречивых задач линейного программирования 362
§ 8.1. Задачи коррекции для систем линейных алгебраических уравнений и неравенств 363
§ 8.2. Матричная коррекция взаимодвойственных задач линейного программирования 370
§ 8.3. Итеративная коррекция 378

Литература 392
Предметный указатель 405
Обозначения 407
Сведения об авторах 411

«Полка» с книгой в Интернет-магазине «Математическая книга» МЦНМО:
https://biblio.mccme.ru/node/58306/shop

Матричная коррекция в библиографии Ф.П. Васильева и А.Ю. Иваницкого

Литература

31. *Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю., Морозов В. А.* Оценка скорости сходимости метода невязки для задач линейного программировния с приближенными данными // ЖВМ и МФ. 1990. Т. 30, № 8. С. 1257—1262.

32. *Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю., Морозов В. А.* Метод поточечной невязки для решения некоторых задач линейной алгебры и линейного программирования // Сб. работ НИВЦ МГУ «Информатика и вычислительные системы». М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993. С. 46—65.

37. *Ватолин А. А.* О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, № 11. С. 1629—1637.

51. *Горелик В. А., Кондратьева В. А.* Параметрическое программирование и несобственные задачи линейной оптимизации // Сб. работ ВЦ РАН «Моделирование, декомпозиция и оптимизация». М.: Изд-во ВЦ РАН, 1999. С. 57—82.

61. *Ерёмин И. И.* Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988.

64. *Ерёмин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.

72. *Иваницкий А. Ю.* Устойчивые методы решения систем линейных уравнений и неравенств с интервальными коэффициентами: Диссерт. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. М.: НИВЦ Моск. ун-та, 1988.

73. *Иваницкий А. Ю., Васильев Ф. П., Морозов В. А.* Оценка скорости сходимости метода поточечной невязки для решения задач линейной алгебры // Сб. работ «О кооперируемых работах НИВЦ МГУ и БУВЦ». М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. С. 24—31.

74. *Иваницкий А. Ю., Васильев Ф. П., Морозов В. А.* Метод поточечной невязки для решения систем линейных алгебраических уравнений и неравенств // Труды Международной конференции «Некорректно поставленные задачи в естественных науках». М.: Изд-во ТВП, 1992. С. 33—43.

75. *Иваницкий А. Ю., Васильев Ф. П., Морозов В. А.* Метод поточечной невязки для решения некоторых задач линейной алгебры и линейного программирования // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38, № 8. С. 1140—1152.

76. *Иваницкий А. Ю., Карасёва Ж. К.* Об одном методе регуляризации прямой и двойственной задачи линейного программирования с приближенными данными // Вестник Чувашского госуниверситета. 2015. № 3. С. 141—148.

77. *Иваницкий А. Ю., Урусов А. М.* Численный анализ метода поточечной невязки для решения прямой и двойственной неустойчивой задачи линейного программирования с приближенными данными // Вестник Чувашского госуниверситета. 2018. № 1. С. 108—116.

105. **Морозов В. А., Иваницкий А. Ю.** Устойчивый метод решения одного класса задач линейного программирования // Сб. работ НИВЦ МГУ «Численный анализ: методы, алгоритмы, программы». М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. С. 3—17.

106. *Морозов В. А., Иваницкий А. Ю.* Устойчивые методы решения задач линейного программирования с интервальными коэффициентами // Сб. работ НИВЦ МГУ «Численный анализ: методы, алгоритмы, программы». М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. С. 18—26.

139. *Тихонов А. Н.* О некорректных задачах оптимального планирования // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6, № 1. С. 81—89.

145. *Тихонов А. Н., Морозов В. А., Кармазин В. Н.* О задаче коррекции линейных неравенств // Сб. работ НИВЦ МГУ «Численный анализ: методы, алгоритмы, приложения». М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. С. 3—13.

146. *Тихонов А. Н., Рютин А. А., Агаян Г. М.* Об устойчивом методе решения задачи линейного программирования с приближенными данными // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 5. С. 1058—1063.

Матричная коррекция в библиографии Ф.П. Васильева и А.Ю. Иваницкого

Дополнительная литература

181. *Артамонов В. А., Латышев В. Н.* Линейная алгебра и выпуклая геометрия. М.: Факториал, 2004.

182. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. I, II. М.: МЦНМО, 2011.

183. *Васильев Ф. П., Потапов М. М., Будак Б. А., Артемьева Л. А.* Методы оптимизации. М.: Юрайт, 2016.

184. *Ватолин А. А.* Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1907—1908.

185. *Ватолин А. А.* Множества разрешимости и коррекция седловых функций и систем неравенств. Свердловск: Изд-во УРО РАН, 1989.

186. *Волков В. В., Ерохин В. И.* О тихоновских решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений при конечных возмущениях их матриц // ЖВМ и МФ. 2010. Т. 50, № 4. С. 618—635.

187. *Волков В. В., Ерохин В. И, Какаев В. В., Онуфрей Н. Ю.* Обобщение регуляризованного метода наименьших квадратов Тихонова на векторные нормы // ЖВМ и МФ. 2017. Т. 57, № 9. С. 1433—1443.

188. *Волков В. В., Ерохин В. И, Красников А. С., Разумов А. В., Хвостов М. Н.* Минимальная по евклидовой норме матричная коррекция пары двойственных задач линейного программирования // ЖВМ и МФ. 2017. Т. 57, № 11. С. 1778—1803.

189. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.

190. *Горелик В. А.* Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений // ЖВМ и МФ. 2001. Т. 41, № 11. С. 1697—1705.

191. *Горелик В. А., Ерохин В. И.* Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2004.

192. *Горелик В. А., Ерохин В. И., Печёнкин Р. В.* Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2006.

193. *Горелик В. А., Муравьева О. В.* Методы коррекции несобственных задач и их применение к проблемам оптимизации и классификации. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2012.

194. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.

195. *Ерёмин И. И., Мазуров В. Д., Скарин В. Я., Хачай М. Ю.* Математические методы в экономике. Екатеринбург: У-Факториал, 2000.

196. *Ерёмин И. И.* Теория двойственности в линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во Южно-Уральского ун-та, 2005.

197. *Ерохин В. И.* Оптимальная матричная коррекция и регуляризация несовместных линейных моделей // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2002. Т. 9, № 2. С. 41—77.

198. *Ерохин В. И.* Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // ЖВМ и МФ. 2007. Т. 47, № 4. С. 587—601.

199. *Ерохин В. И., Красников А. С.* Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования с блочной структурой // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48, № 1. С. 80—89.

200. *Ерохин В. И., Красников А. С., Хвостов М. Н.* Минимальные по евклидовой норме матричные коррекции задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 2012. Т. 2. С. 11—24.

201. *Ерохин В. И., Красников А. С., Хвостов М. Н.* О достаточных условиях разрешимости задач линейного программирования при матричной коррекции их ограничений // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 144—156.

202. *Ерохин В. И.* О некоторых достаточных условиях разрешимости и неразрешимости задач матричной коррекции несобственных задач линейного программирования // Труды ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 110—116.

203. *Иваницкий А. Ю., Морозов В. А., Кармазин В. Н.* Метод поточечной невязки для несовместных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств с приближенными данными // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 937—945.

204. *Кокурин М. Ю.* Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач. Йошкар-Ола: Изд-во Марийского ун-та, 1998.

205. *Лунгу К. Н.* Линейное программирование. Руководство к решению задач. М.: Физматлит, 2005.

206. *Морозов В. А.* Оценивание точности решения некорректных задач и решение систем линейных алгебраических уравнений // ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17, № 6. С. 1341—1349.

207. *Морозов В. А.* Об устойчивых численных методах решения систем линейных алгебраических уравнений // Методы и алгоритмы в численном анализе. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. С. 3—10.

208. *Морозов В. А.* Об устойчивых численных методах решения совместных систем линейных алгебраических уравнений // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, № 2. С. 179—186.

209. *Муравьева О. В.* Радиусы совместности и несовместности систем линейных уравнений и неравенств // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55, № 3. С. 372—384.

210. *Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.

211. *Попов Л. Д.* Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования первого рода // Автоматика и телемеханика. 2012. Т. 3. С. 3—11.

Задача о матричном решении СЛАУ с минимальной евклидовой нормой

Основная лемма [a]

[a][1] Тихонов А.Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1373-1383.

Дана СЛАУ $Ax = b$ с **неизвестной** матрицей $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \neq 0$. $\exists! \hat{A} = \underset{Ax=b}{\operatorname{argmin}} \|A\|$, $\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x}$, $\|\hat{A}\| = \frac{\|b\|}{\|x\|}$, где

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \; \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Минимальная матричная коррекция СЛАУ с известными A, b на заданное решение $x \neq 0$: $(A+H)x = b \Leftrightarrow Hx = b - Ax \Rightarrow$ $\Rightarrow \hat{H} = (b - Ax)\frac{x^\top}{x^\top x}$, $\|\hat{H}\| = \frac{\|b-Ax\|}{\|x\|}$.

«Векторизация» СЛАУ

Подготовка к решению СЛАУ относительно неизвестной матрицы [a]

[a] Ерохин В.И. Матричная коррекция несобственных задач линейного программирования по минимуму евклидовой нормы с произвольными весами и фиксированными элементами // Математическое программирование: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т. 1: Иркутск, ИСЭМ СО РАН. 2005. С. 105–111.

$$Ax = b \Leftrightarrow X(x) \cdot a(A) = b$$

где

$$X(x) = \begin{bmatrix} x^\top & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x^\top & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (m \cdot n)},$$

$$a(A) = [a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn}]^\top \in \mathbb{R}^{(m \cdot n)}.$$

Минимальная матричная коррекция СЛАУ с известными A, b на заданное решение $x \neq 0$: $(A + H)\,x = b \Leftrightarrow X(x)h(H) = b - Ax \Rightarrow \hat{h}(H) = X^{+}(x)\,(b - Ax)$.

Обобщение леммы Тихонова:

Задача о матричном решении пары сопряженных СЛАУ с минимальной евклидовой нормой [a]

[a] Ерохин В.И. Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 587-601.

Дано: $x, v \in \mathbb{R}^n$, $u, b \in \mathbb{R}^m$, $x, u \neq 0$.

Найти: матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ с минимальной евклидовой нормой, являющейся решением системы

$$Ax = b, \;\; u^\top A = v^\top. \tag{1}$$

Теорема о матричном решении системы пары сопряженных СЛАУ

Система (1) разрешима относительно матрицы $A \Leftrightarrow$ выполняется условие $\alpha \triangleq (b^\top u = v^\top x)$. Минимальное по еквклидовой норме решение единственно и определяется формулой

$$\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x} + \frac{uv^\top}{u^\top u} - \alpha \cdot \frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u}.$$

При этом $\left\|\hat{A}\right\|^2 = \|b\|^2 \Big/ \|x\|^2 + \|v\|^2 \Big/ \|u\|^2 - \alpha^2 \Big/ \left(\|x\|^2 \cdot \|u\|^2\right)$.

Минимальная матричная коррекция пары сопряженных СЛАУ с известными A, b, v на заданные решения $x \neq 0$, $u \neq 0$ такие, что $u^\top b = v^\top x = \gamma$, $(A+H)\,x = b$, $u^\top (A+H) = v^\top$, $\|H\| \to \min$.

Решение с помощью обобщенной леммы Тихонова

$$\hat{H} = (b - Ax)\,\frac{x}{x^\top x} + \frac{u}{u^\top u}\left(v^\top - u^\top A\right) - \alpha\frac{ux^\top}{x^\top x \cdot u^\top u},$$

$$\left\|\hat{H}\right\|^2 = \frac{\|b - Ax\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\left\|v^\top - u^\top A\right\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2},\ \alpha = \gamma - u^\top Ax.$$

Решение с помощью векторизации матрицы H

$$\hat{h}(x,u) = \begin{bmatrix} X(x) \\ U(u) \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} b - Ax \\ v - A^\top u \end{bmatrix}, \text{ где } X(x) = \begin{bmatrix} x^\top & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x^\top & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x^\top \end{bmatrix},$$

$U(u) = [u_1 I_n \cdots u_m I_n]$, $\hat{h}$ собран из столбцов H, «$+$» – псевдообращение, I_n – единичная матрица порядка n.

Минимальная матричная коррекция двойственной пары несобственных задач ЛП

Пусть $L(A,b,c)$: $Ax=b,\ x\geq 0,\ c^\top x\to\max$ – прямая задача ЛП в канонической форме, $L^*(A,b,c)$: $u^\top Ax\geq c^\top$, $u^\top b\to\min$ – двойственная задача ЛП в основной форме.

Постановка задачи

$$\|H\|\to\min_{\text{Задачи } L(A+H,b,c),\ L^*(A+H,b,c) \text{ собственные}} \tag{2}$$

Сведение задачи (2) к задаче МП, общие условия:

$c^\top x=u^\top b=\gamma,\ d^\top x=0,\ x\geq 0,\ d\geq 0.$

🛠 – обобщенная лемма Тихонова:

$$\frac{\|b-Ax\|^2}{\|x\|^2}+\frac{\left\|c+d-A^\top u\right\|^2}{\|u\|^2}-\frac{\left(\gamma-u^\top Ax\right)^2}{\|x\|^2\cdot\|u\|^2}\to\min_{x,d,u}.$$

🛠 – векторизация: $\left\|\begin{bmatrix}X(x)\\U(u)\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}b-Ax\\c+d-A^Tu\end{bmatrix}\right\|^2\to\min\limits_{x,d,u}.$

Регуляризованное решение двойственной пары задач ЛП

Пусть $\mathbf{X}(A,b) \triangleq \{x \,|\, Ax = b, x \geqslant 0\}$ и $\mathbf{U}(A,c) \triangleq \left\{u \,\middle|\, u^\top A \geqslant c^\top\right\}$ – допустимое множества задач ЛП $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$.

Постановка задачи

Дано: A_0, b_0, c_0 – неизвестные «точные» объекты, A, b, c – известные «приближенные» объекты, $\|A_0 - A\| \leqslant \mu$, $\|b_0 - b\| \leqslant \delta_b$, $\|c_0 - c\| \leqslant \delta_c$, задачи $L(A_0,b_0,c_0)$, $L^*(A_0,b_0,c_0)$ – собственные.

Найти: A_1, b_1, c_1, x_1, u_1 такие, что $\|A_1 - A\| \leqslant \mu$, $\|b_1 - b\| \leqslant \delta_b$, $\|c_1 - c\| \leqslant \delta_c$,

$$\|x_1\|^2 + \|u_1\|^2 \to \min_{\mathbf{X}(A_1,b_1)\neq\varnothing,\mathbf{U}(A_1,c_1)\neq\varnothing} \tag{3}$$

Сведение (3) к задаче МП и восстановление решения

Решение задачи (3) существует, единственно и имеет вид
$A_1 = A + H$, $b_1 = b + h_b$, $c_1 = c + h_c$,

$$H = \frac{(b_1 - Ax_1)\, x_1^\top}{x_1^\top x_1} + \frac{u\,[c_1^\top - u_1^\top A]_+}{u_1^\top u_1} - \alpha \frac{u_1 x_1^\top}{x_1^\top x_1 \cdot u_1^\top u_1},$$

где $x_1, h_c \in \mathbb{R}^n$, $u_1, h_b \in \mathbb{R}^m$ – решение задачи
$(c + h_c)^\top x = u^\top (b + h_b) = \gamma$, $x \geqslant 0$, $\alpha = \gamma - u^\top A x$, $\|h_b\| \leqslant \delta_b$, $\|h_c\| \leqslant \delta_c$,

$$\frac{\|b + h_b - Ax\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\left\|[c^\top + h_c^\top - A^\top u]_+\right\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2} \leqslant \mu^2,$$

$\|x\|^2 + \|u\|^2 \to \min$, $[\cdot]_+$, – положительная срезка вектора.

1. ЗАДАЧА О НАХОЖДЕНИИ МАТРИЦЫ, ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ РЕШЕНИЕМ СОПРЯЖЕННОЙ ПАРЫ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим (относительно неизвестной матрицы) систему

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ u^{\mathrm{T}}A &= v^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x, v \in \mathbb{R}^n$, $b, u \in \mathbb{R}^m$ – заданные векторы, $x \neq 0$, $u \neq 0$. Нас будут интересовать вопросы существования решения системы (1), его вид, вид матрицы, являющейся решением системы (1) с минимальной евклидовой нормой, и ее возможный ранг. Основу для ответа на указанные вопросы закладывает следующая

Теорема 1. *Система* (1) *разрешима относительно неизвестной матрицы* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$u^{\mathrm{T}}b = v^{\mathrm{T}}x = \alpha. \tag{2}$$

Решение $\hat{A}$ *указанной системы, минимальное по евклидовой норме, единственно и дается формулой*

$$\hat{A} = \frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} + \frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}. \tag{3}$$

При этом

$$\|\hat{A}\|^2 = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2\|u\|^2}, \tag{4}$$

где, в зависимости от контекста, $\|\cdot\|$ *– евклидова векторная или матричная норма.*

Доказательство. 1. Покажем необходимость условия (2). Действительно, пусть при заданных x, v, b, u существует матрица A, являющаяся решением системы (1). Умножим обе части первого уравнения системы (1) слева на u^{T} и обе части второго уравнения (1) справа на x, что и даст соотношение (2):

$$u^{\mathrm{T}}Ax = u^{\mathrm{T}}b = v^{\mathrm{T}}x = \alpha.$$

2. Покажем достаточность условия (2). Для этого покажем, что в случае выполнения указанного условия матрица $\hat{A}$, задаваемая формулой (3), действительно является решением системы (1). Вначале заметим, что, в силу условий $x \neq 0$, $v \neq 0$, матрица $\hat{A}$ существует. Проверим выполнение условий $\hat{A}x = b$, $u^{\mathrm{T}}\hat{A} = v^{\mathrm{T}}$. Действительно, в силу (2) и (3),

$$\hat{A}x = \left(\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} + \frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \frac{v^{\mathrm{T}}xux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right)x = b + \left(\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \frac{v^{\mathrm{T}}xux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right)x = b + u\frac{v^{\mathrm{T}}x}{u^{\mathrm{T}}u} - u\frac{v^{\mathrm{T}}x}{u^{\mathrm{T}}u} = b,$$

$$u^{\mathrm{T}}\hat{A} = u^{\mathrm{T}}\left(\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x} + \frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \frac{ux^{\mathrm{T}}u^{\mathrm{T}}b}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right) = \frac{u^{\mathrm{T}}b}{x^{\mathrm{T}}x}x^{\mathrm{T}} + v^{\mathrm{T}} - \frac{u^{\mathrm{T}}b}{x^{\mathrm{T}}x}x^{\mathrm{T}} = v^{\mathrm{T}}.$$

3. Покажем, что квадрат евклидовой нормы матрицы $\hat{A}$ действительно может быть вычислен по формуле (4). Заметим, что строки матрицы $bx^{\mathrm{T}}/x^{\mathrm{T}}x$ ортогональны строкам матрицы $\left(\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right)$, что следует из условия $\left(\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \frac{v^{\mathrm{T}}xux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right)x = 0$. Отсюда, по теореме Пифагора, получаем

$$\|\hat{A}\|^2 = \left\|\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right\|^2 + \left\|\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right\|^2.$$

Заметим, что матрицы $\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}$ и $\left(\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right) = \frac{u}{u^{\mathrm{T}}u}\left(v - \alpha\frac{x}{x^{\mathrm{T}}x}\right)^{\mathrm{T}}$ являются одноранговыми. Не-

Заметим, что матрицы $\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}$ и $\left(\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right) = \frac{u}{u^{\mathrm{T}}u}\left(v - \alpha\frac{x}{x^{\mathrm{T}}x}\right)^{\mathrm{T}}$ являются одноранговыми. Несложно показать, что евклидова норма произвольной одноранговой матрицы pq^{T}, где $p \in \mathbb{R}^m$, $q \in \mathbb{R}^n$, может быть вычислена по формуле $\|pq^{\mathrm{T}}\| = \|p\|\|q\|$. Поэтому имеем

$$\left\|\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right\| = \|b\|\left\|\frac{x}{x^{\mathrm{T}}x}\right\| = \frac{\|b\|}{\|x\|},$$

$$\left\|\frac{u}{u^{\mathrm{T}}u}\left(v - \alpha\frac{x}{x^{\mathrm{T}}x}\right)^{\mathrm{T}}\right\| = \left\|\frac{u}{u^{\mathrm{T}}u}\right\|\left\|v - \alpha\frac{x}{x^{\mathrm{T}}x}\right\|,$$

а также

$$\left\|\frac{u}{u^{\mathrm{T}}u}\right\| = \frac{1}{\|u\|},$$

$$\left\|v - \alpha\frac{x}{x^{\mathrm{T}}x}\right\|^2 = v^{\mathrm{T}}v - 2\alpha\frac{v^{\mathrm{T}}a}{x^{\mathrm{T}}x} + \frac{\alpha^2}{x^{\mathrm{T}}x} = v^{\mathrm{T}}v - \frac{\alpha^2}{x^{\mathrm{T}}x} = \|v\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2},$$

откуда и получаем формулу (4).

4. Покажем, что среди всех возможных решений системы (1) матрица A, и только она, имеет минимальную евклидову норму. Если матрица $\hat{A}$ – единственное решение системы (1), то указанное утверждение тривиально. Предположим, что матрица $\hat{A} + \Delta A$, где $\Delta A \neq 0$, также является решением системы (1). Очевидно, что в этом случае строки матрицы ΔA должны быть ортогональны вектору x, а столбцы матрицы ΔA – вектору u. Кроме того, $\Delta A \neq 0 \Rightarrow \|\Delta A\| > 0$. Но тогда, в силу теоремы Пифагора, имеем

$$\|\hat{A} + \Delta A\|^2 = \left\|\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right\|^2 + \left\|\left(\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right) + \Delta A\right\|^2 = \left\|\frac{bx^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}\right\|^2 + \left\|\frac{uv^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u} - \alpha\frac{ux^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}xu^{\mathrm{T}}u}\right\|^2 + \|\Delta\hat{A}\|^2 =$$

$$= \|\hat{A}\|^2 + \|\Delta A\|^2 \Rightarrow \|\hat{A}\|^2 < \|\hat{A} + \Delta A\|^2.$$

Теорема 1 доказана.

Некоторые диссертации по матричной коррекции

- **Ватолин А.А.** Методы анализа несобственных задач математического программирования: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.09. – Свердловск, ИММ УрО РАН, 1984.
- **Ватолин А.А.** Несобственные задачи математического программирования и методы их коррекции : Дисс ... докт. физ.-матем. наук : 01.01.09. – Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 1992.
- **Кондратьева В.А.** Несобственные задачи линейной оптимизации и параметрическое программирование: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 05.13.17. – Москва, МПГУ, 2000.
- **Ибатуллин Р.Р.** Методы коррекции и аппроксимации несобственных задач оптимизации и управления с минимаксным критерием: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 05.13.17. – Москва, МПГУ, 2002.
- **Муравьева О.В.** Матричная коррекция данных для несовместных систем линейных уравнений и ее применение в задачах оптимизации и классификации: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 05.13.17. – Москва, МПГУ, 2002.
- **Ерохин В.И.** Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования: Дисс. ... докт. физ.-матем. наук: 05.13.17. – Москва, ВЦ РАН, 2006.

Золтоева И.А. Методы коррекции данных для формализации и решения задач многокритериальной оптимизации: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 05.13.17. – Москва, МПГУ, 2006.

Печенкин Р.В. Методы коррекции несовместных систем со структурными ограничениями: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 05.13.17. – Москва, МПГУ, 2006.

Клименко О.А. Методы коррекции данных несовместных линейных систем комбинаторного типа: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 05.13.17. – Москва, МПГУ, 2010.

Красников А.С. Матричная коррекция противоречивых данных в линейных оптимизационных моделях: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 05.13.17. – Москва, МПГУ, 2010.

Волков Р.В. Восстановление линейных зависимостей по неточной информации: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 05.13.17. – Москва, МПГУ, 2011.

ЛЕ Н.З. Методы коррекции несовместных систем линейных уравнений и неравенств с блочной структурой и их применение к задачам обработки информации: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 05.13.17. – Москва, МПГУ, 2012.

Баркалова О.С. Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования по минимуму полиэдральных норм и их применение в процессах обработки информации: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 05.13.17. – Москва, МПГУ, 2013.

Хвостов М.Н. Матричная коррекция несобственных задач линейного программирования со специальной структурой: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 05.13.17. – Москва, ВЦ РАН, 2015.

Некоторые публикации, связывающие матричную коррекцию с машинным обучением и искусственным интеллектом (дополнительно к списку Ф.П. Васильева и А.Ю. Иваницкого)

- **Муравьева О.В.** Робастность и коррекция линейных моделей // Автоматика и телемеханика. 2011. № 3. С. 98–112.
- **Муравьева О.В.** Исследование параметрической устойчивости решений систем линейных неравенств и построение разделяющей гиперплоскости // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2014. Т.21. № 3. С. 53–63.
- **Горелик В.А., Трембачева (Баркалова) О.С.** Решение задачи линейной регрессии с использованием методов матричной коррекции в метрике ℓ_1 // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т.56. № 2. С. 202–207.

Спасибо за внимание!