ЛЕММА А. Н. ТИХОНОВА И МАТРИЧНАЯ КОРРЕКЦИЯ*

В. Н. Малозёмов
v.malozemov@spbu.ru

Г. Ш. Тамасян
grigoriytamasjan@mail.ru

3 ноября 2022 г.

В данном докладе мы обращаем внимание участников семинара на богатое внутреннее (математическое) содержание теории матричной коррекции, представленной в обзорном докладе В. И. Ерохина [1] и книге Ф. П. Васильева и А. Ю. Иваницкого [2, глава 8]. Ниже приведены яркие и поучительные доказательства базовых результатов этой теории.

1°. Имеются два вектора: ненулевой n-мерный вектор x и m-мерный вектор b. Ставится задача:

среди линейных преобразований, переводящих вектор x в вектор b, найти преобразование с наименьшей нормой.

Мы будем использовать евклидову норму векторов и евклидову норму матриц $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, имеющую вид

$$\|H\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bigl|H[i,j]\bigr|^2.$$

Формализуем поставленную задачу:

$$\begin{gathered} \|H\|^2 \longrightarrow \min, \\ H \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad Hx = b. \end{gathered} \tag{1}$$

Эта задача имеет аналитическое решение.

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» `http://oml.cmlaboratory.com/`

ЛЕММА 1 (А. Н. Тихонов [3]). *Единственным решением задачи* (1) *является матрица*

$$H_* = \frac{1}{\|x\|^2}\, b\, x^T, \tag{2}$$

где $b\, x^T$ *есть произведение вектора-столбца* b *на вектор-строку* x^T. *Для нормы матрицы* H_* *справедлива формула*

$$\|H_*\| = \frac{\|b\|}{\|x\|}. \tag{3}$$

Доказательство. Легко понять, что H_* — план задачи (1). Действительно,

$$H_* x = \frac{1}{\|x\|^2} b \left(x^T x\right) = b.$$

Так как $\left(b\, x^T\right)[i,j] = b[i]\, x[j]$, то

$$\|H_*\|^2 = \frac{1}{\|x\|^4} \sum_{i=1}^{m} |b[i]|^2 \sum_{j=1}^{n} |x[j]|^2 = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2}.$$

Отсюда следует (3).

Проверим оптимальность H_*. Общее решение системы $Hx = b$ (относительно H) имеет вид $H = H_* + H_0$, где H_0 — решение однородной системы $H_0 x = \mathbf{0}$. Покажем, что матрицы H_0 и H_* ортогональны. Согласно (2) и равенствам $\big(H_0 x\big)[i] = 0$ при всех $i \in 1:m$ имеем

$$\begin{aligned}
\langle H_0, H_* \rangle &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} H_0[i,j]\, H_*[i,j] = \\
&= \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} H_0[i,j]\, b[i]\, x[j] = \\
&= \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i=1}^{m} b[i] \times \big(H_0 x\big)[i] = 0.
\end{aligned}$$

Ортогональность матриц H_0 и H_* установлена.

Теперь запишем

$$\begin{aligned}
\|H\|^2 = \|H_* + H_0\|^2 &= \|H_*\|^2 + 2\,\langle H_*, H_0 \rangle + \|H_0\|^2 = \\
&= \|H_*\|^2 + \|H_0\|^2 .
\end{aligned}$$

Отсюда следует как оптимальность, так и единственность матрицы H_*.

Лемма доказана. □

2°. Покажем, что задача (1) с неизвестной матрицей H сводится к стандартной задаче квадратичного программирования с линейными ограничениями-равенствами. Обозначим через $H_1, H_2, \ldots, H_m$ строки матрицы H, так что

$$H_i = (H[i,1], H[i,2], \ldots, H[i,n]), \quad i \in 1:m.$$

Введём «длинную» вектор-строку $h \in \mathbb{R}^{mn}$, составленную из строк матрицы H,

$$h = (H_1, H_2, \ldots, H_m),$$

и матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x^T & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & x^T & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & x^T \end{pmatrix},$$

имеющую размеры $m \times (mn)$. Тогда задачу (1) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\|h\|^2 \longrightarrow \min \\ Xh^T = b. \end{gathered} \tag{4}$$

Покажем, что множество планов задачи (4) непусто. Для этого достаточно проверить, что матрица X имеет полный ранг, т. е. что $\operatorname{rank}(X) = m$. По условию вектор x ненулевой. У него имеется ненулевая компонента $x[j_0]$. Отметим, что

$$X[1, j_0] = X[2, n + j_0] = \ldots = X[m, (m-1)n + j_0] = x[j_0].$$

Подматрица матрицы X, составленная из столбцов с индексами

$$j_0, n + j_0, \ldots, (m-1)n + j_0,$$

является диагональной, все диагональные элементы которой равны $x[j_0]$. Это гарантирует равенство $\operatorname{rank}(X) = m$.

Непустота множества планов задачи (4) установлена. Её целевая функция ограничена снизу нулём. По теореме существования решения для задачи квадратичного программирования заключаем, что задача (4) имеет оптимальный план.

Запишем критерий оптимальности для плана h,

$$h = \sum_{i=1}^{m} u[i]\, X_i, \tag{5}$$

где X_i — i-я строка матрицы X. Структура матрицы X и вектора h позволяют переписать равенство (5) в виде

$$H_i = u[i]\, x^T, \quad i \in 1:m. \tag{6}$$

Умножив обе части этого равенства справа на x, получим

$$H_i\,x = u[i]\,\|x\|^2, \quad i \in 1:m. \tag{7}$$

Вместе с тем, согласно ограничению задачи (4) имеем

$$b[i] = X_i\,h^T = x^T\,H_i^T = H_i\,x. \tag{8}$$

Объединив (7) и (8), придём к представлению для множителей Лагранжа

$$u[i] = \frac{1}{\|x\|^2} b[i], \quad i \in 1:m.$$

Формула (6) принимает окончательный вид

$$H_i = \frac{1}{\|x\|^2} b[i]\,x^T, \quad i \in 1:m. \tag{9}$$

Решением задачи (4) будет вектор

$$h_* = (H_1, H_2, \ldots, H_m)\,.$$

Единственность решения следует из строгой выпуклости целевой функции. Из строк $H_1, H_2, \ldots, H_m$ составляется матрица H_*, которая будет единственным решением задачи (1). Согласно (9) матрица H_* допускает представление

$$H_* = \frac{1}{\|x\|^2} b\,x^T.$$

З а м е ч а н и е. В лемме А. Н. Тихонова оптимальная матрица H_* *предъявляется*, а при решении задачи (4) формула для H_* *выводится*.

3°. Перепишем критерий оптимальности для задачи (4) в виде

$$\begin{aligned} h &= u^T X, \\ X h^T &= b. \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что

$$X X^T = \|x\|^2 E_m,$$

где E_m — единичная матрица порядка m. Это равенство позволяет получить другой вариант решения системы (10).

Умножим обе части первого уравнения в (10) на X^T справа. Запишем

$$h X^T = u^T \left(X X^T\right) = \|x\|^2 u^T.$$

Согласно второму уравнению в (10) имеем $hX^T = b^T$. Значит,

$$u^T = \frac{1}{\|x\|^2} b^T.$$

Приходим к формуле для решения задачи (4):

$$h_* = \frac{1}{\|x\|^2} b^T X = \frac{1}{\|x\|^2} \left(b[1]x^T, b[2]x^T, \ldots, b[m]x^T \right).$$

Вектор h_* порождает матрицу

$$H_* = \frac{1}{\|x\|^2} \begin{pmatrix} b[1]x^T \\ b[2]x^T \\ \vdots \\ b[m]x^T \end{pmatrix} = \frac{1}{\|x\|^2} b\, x^T,$$

которая является решением задачи (1).

4°. С помощью леммы А. Н. Тихонова можно найти решение следующей задачи.

Даны матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и векторы $b \in \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, причём $x_0 \neq \mathbf{0}$ и $Ax_0 \neq b$. Требуется построить корректирующую матрицу $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, являющуюся решением экстремальной задачи

$$\begin{gathered} \|H\|^2 \longrightarrow \min, \\ H \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad (A+H)\,x_0 = b. \end{gathered} \tag{11}$$

Таким образом, вектор x_0 не удовлетворяет системе $Ax = b$, однако он представляет для нас интерес. Мы хотим построить близкую систему $(A+H)\,x = b$, которой x_0 удовлетворяет.

ТЕОРЕМА 1. *Единственным решением задачи* (11) *будет матрица*

$$H_* = \frac{1}{\|x_0\|^2} (b - Ax_0)\, x_0^T.$$

При этом

$$\|H_*\| = \frac{\|b - Ax_0\|}{\|x_0\|}.$$

Доказательство. Обозначим $b_1 = b - Ax_0$ и перепишем задачу (11) в виде

$$\begin{gathered} \|H\|^2 \longrightarrow \min, \\ H \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad Hx_0 = b_1. \end{gathered} \tag{12}$$

По условию $x_0 \neq \mathbf{0}$. Задача (12) совпадает с задачей (1) при замене b_1 на b. Поэтому заключение теоремы 1 непосредственно следует из леммы А. Н. Тихонова. □

5°. Перейдём к задаче о матричной коррекции системы линейных неравенств. Пусть даны два вектора: ненулевой n-мерный вектор x_0 и m-мерный вектор b. Ставится задача:

> *среди линейных преобразований $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, обеспечивающих выполнение неравенства $Hx_0 \leqslant b$, найти преобразование с наименьшей нормой.*

Формальная запись этой задачи выглядит так:

$$\begin{gathered} \|H\|^2 \longrightarrow \min, \\ H \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad Hx_0 \leqslant b. \end{gathered} \tag{13}$$

ЛЕММА 2. *Задача* (13) *имеет единственное решение*

$$H_* = \frac{1}{\|x_0\|^2}\,(b - z_*)\,x_0^T,$$

где $z_* \in \mathbb{R}^m$ и

$$z_*[i] = \begin{cases} b[i], & \text{если } b[i] \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } b[i] < 0. \end{cases} \tag{14}$$

При этом

$$\|H_*\| = \frac{\|b - z_*\|}{\|x_0\|}.$$

Доказательство. Перепишем неравенство $Hx_0 \leqslant b$ в эквивалентом виде

$$Hx_0 = b - z, \quad z \geqslant \mathbf{0}.$$

При фиксированном $z \geqslant \mathbf{0}$ рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \|H\|^2 \longrightarrow \min, \\ H \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad Hx_0 = b - z. \end{gathered} \tag{15}$$

По лемме А. Н. Тихонова задача (15) имеет единственное решение

$$H(z) = \frac{1}{\|x_0\|^2}\,(b - z)\,x_0^T.$$

При этом

$$\|H(z)\| = \frac{\|b - z\|}{\|x_0\|}.$$

Теперь будем минимизировать норму $\|H(z)\|$ по $z \geqslant \mathbf{0}$, что сводится к решению элементарной задачи

$$\sum_{i=1}^{m} \bigl|b[i] - z[i]\bigr|^2 \longrightarrow \min,$$
$$z[1] \geqslant 0,\ z[2] \geqslant 0, \ldots, z[m] \geqslant 0.$$

Здесь каждое слагаемое $\bigl|b[i] - z[i]\bigr|^2$ можно минимизировать по $z[i] \geqslant 0$ независимо. В результате для решения $z_*[i]$ получим формулу (14).

Осталось отметить, что $H_* = H(z_*)$. Лемма доказана. □

6°. С помощью леммы 2 можно решить такую задачу.

Заданы матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и векторы $b \in \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, причём вектор x_0 отличен от нулевого и не удовлетворяет неравенству $Ax \leqslant b$. Требуется среди матриц $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, таких что $(A + H)\, x_0 \leqslant b$, найти матрицу с наименьшей нормой.

Обозначим $b_1 = b - Ax_0$ и перепишем неравенство $(A + H)\, x_0 \leqslant b$ в эквивалентном виде $Hx_0 \leqslant b_1$. Если в формулировке леммы 2 заменить b на b_1, то получим решение поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерохин В. И. *Матричная коррекция пары двойственных задач линейного программирования* // Семинар «O & ML». Избранные доклады. 6 октября 2022 г. (`http://oml.cmlaboratory.com/reps22.shtml#1006`)

2. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. М.: Изд-во МЦНМО, 2020. 412 с.

3. Тихонов А. Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1373-1383.