ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ*

В. Н. Малозёмов Е. К. Чернэуцану
v.malozemov@spbu.ru katerinache@yandex.ru

9 февраля 2022 г.

1°. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задано конечное множество точек $\{p_j\}_{j=1}^m$. Обозначим через G выпуклую оболочку этого множества. Возьмем произвольную точку $p \in \mathbb{R}^n$. Ставится задача: *выяснить, принадлежит ли точка p выпуклой оболочке G*. По существу, предлагается ответить на вопрос, совместна ли система линейных соотношений

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j = p, \\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad j \in 1:m.\end{gathered} \tag{1}$$

Обозначив $a_j = p_j - p$, перепишем систему (1) в виде

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j = \mathbf{0}, \\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1, \\ \lambda_j \geqslant 0, \quad j \in 1:m.\end{gathered} \tag{2}$$

Вопрос о совместности системы (2) будем называть *простейшей задачей математической диагностики*[1].

---

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» `http://www.apmath.spbu.ru/oml/`

[1]Название «математическая диагностика» ввел В. Ф. Демьянов (1938–2014)

2°. Покажем, что простейшую задачу математической диагностики можно свести к задаче линейного программирования.

Введем неотрицательные искусственные переменные $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_{m+n+1}$ и рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{m+j} \to \min, \\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \begin{pmatrix} a_j \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{m+j}\, e_j = e_{n+1}, \\ \lambda_j \geqslant 0, \quad j \in 1 : m+n+1. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь e_j обозначает j-й орт в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. В случае, когда искусственные переменные равны нулю, ограничения задачи (3) соответствуют условиям (2).

Чтобы упростить запись задачи (3), введем обозначения

$$A = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_m \\ 1 \end{pmatrix}, E_{n+1} \right), \quad b = e_{n+1}.$$

Здесь E_{n+1} — единичная матрица порядка $n+1$. Матрица A имеет размеры $(n+1)\times(m+n+1)$. Эти обозначения позволяют переписать задачу (3) в виде

$$\begin{gathered} f(\lambda) := \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{m+j} \to \min, \\ A\lambda = b, \quad \lambda \geqslant \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{4}$$

Приходим к задаче линейного программирования в канонической форме.

3°. У задачи (4) существует оптимальный базисный план

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*, \lambda_{m+1}^*, \ldots, \lambda_{m+n+1}^*).$$

Это следует из того, что множество ее планов непусто (содержит вектор λ с компонентами $\lambda_{m+n+1} = 1$, $\lambda_j = 0$ при $j \neq m+n+1$) и целевая функция $f(\lambda)$ ограничена снизу нулем на множестве планов.

Возможны два случая $f(\lambda^*) = 0$ и $f(\lambda^*) > 0$. Пусть $f(\lambda^*) = 0$. Тогда значения всех искусственных переменных $\lambda_{m+1}^*, \ldots, \lambda_{m+n+1}^*$ равны нулю. Обозначим через J^* носитель плана λ^*,

$$J^* = \{ j \in 1 : m+n+1 \mid \lambda_j^* > 0 \}.$$

Очевидно, что $J^* \subset 1 : m$. В силу базисности плана λ^* столбцы $\begin{pmatrix} a_j \\ 1 \end{pmatrix}$ матрицы A при $j \in J^*$ линейно независимы. Это равносильно тому, что векторы a_j при $j \in J^*$ аффинно независимы. Ограничения задачи (4) при $\lambda = \lambda^*$ можно переписать в виде

$$\sum_{j \in J^*} \lambda_j^* a_j = \mathbf{0},$$
$$\sum_{j \in J^*} \lambda_j^* = 1, \quad \lambda_j^* > 0 \quad \text{при} \quad j \in J^*.$$

Учитывая определение векторов a_j, получаем

$$\sum_{j \in J^*} \lambda_j^* p_j = p,$$
$$\sum_{j \in J^*} \lambda_j^* = 1, \quad \lambda_j^* > 0 \quad \text{при} \quad j \in J^*.$$

Таким образом, при $f(\lambda^*) = 0$ вектор p принадлежит выпуклой оболочке G. Более того, он допускает представление в виде выпуклой комбинации векторов p_j, таких, что разности $a_j = p_j - p$ аффинно независимы.

При $f(\lambda^*) > 0$ точка p не принадлежит выпуклой оболочке G.

4°. Для решения задачи (4) рекомендуется использовать модифицированный симплекс-метод. На k-й итерации этого метода считается заполненной симплексная таблица следующего вида:

Симплексная таблица

$it = k$	$f(\lambda^{(k)})$	$u_k[M]$	$\Delta_{j_k} := \Delta_k[j_k]$
$N_+^{(k)}$	$\lambda^{(k)}[N_+^{(k)}]$	$B_k[N_+^{(k)}, M]$	$z_k[N_+^{(k)}]$

Здесь

- $N = 1 : m + n + 1$, $N_+^{(k)}$ — базис индексов плана $\lambda^{(k)}$ $\big(|N_+^{(k)}| = n + 1\big)$,
- $M = 1 : n + 1$, $B_k[N_+^{(k)}, M]$ — обратная базисная матрица,
- $u_k[M] = c[N_+^{(k)}] \times B_k[N_+^{(k)}, M]$ — двойственный вектор (в нашем случае $c[j] = 0$ при $j \in 1 : m$ и $c[j] = 1$ при $j \in m + 1 : m + n + 1$),
- $\Delta_k[j] = u_k[M] \times A[M, j] - c[j]$ — оценка столбца $A[M, j]$,

- $j_k \in N \setminus N_+^{(k)}$ — индекс, на котором оценка $\Delta_k[j_k]$ положительна (если все оценки неположительны, то $\lambda^{(k)}$ — оптимальный план),
- $z_k[N_+^{(k)}] = B_k[N_+^{(k)}, M] \times A[M, j_k]$ — вектор коэффициентов разложения столбца $A[M, j_k]$ по базисным столбцам $A[M, j]$, $j \in N_+^{(k)}$.

Переход от таблицы с $it = k$ к очередной таблице (с $it = k+1$) осуществляется по следующим правилам (см., например [1]).

1. Вычисляется величина
$$t_k = \min \left\{ \frac{\lambda^{(k)}[i]}{z_k[i]} \;\middle|\; i \in N_+^{(k)},\ z_k[i] > 0 \right\}.$$
Обозначим через i_k индекс, на котором достигается данный минимум. Базис индексов $N_+^{(k+1)}$ плана $\lambda^{(k+1)}$ отличается от $N_+^{(k)}$ заменой индекса i_k на j_k.

2. Находим базисные компоненты плана $\lambda^{(k+1)}$ по формулам
$$\begin{aligned} &\lambda^{(k+1)}[i] = \lambda^{(k)}[i] - t_k z_k[i],\ i \in N_+^{(k+1)} \setminus \{j_k\}, \\ &\lambda^{(k+1)}[j_k] = t_k. \end{aligned}$$

3. Пересчитываем обратную базисную матрицу
$$\begin{aligned} &B_{k+1}[j_k, M] = \frac{1}{z_k[i_k]} B_k[i_k, M] \quad \text{(рабочая строка)}, \\ &B_{k+1}[i, M] = B_k[i, M] - z_k[i] B_{k+1}[j_k, M],\ i \in N_+^{(k+1)} \setminus \{j_k\}. \end{aligned}$$

4. Пересчитываем значение целевой функции и двойственный вектор
$$\begin{aligned} f(\lambda^{(k+1)}) &= f(\lambda^{(k)}) - t_k \Delta_k[j_k], \\ u_{k+1}[M] &= u_k[M] - \Delta_k[j_k] B_{k+1}[j_k, M]. \end{aligned}$$

5. Среди столбцов $A[M, j]$ матрицы A с $j \in N \setminus N_+^{(k+1)}$ находим столбец $A[M, j_{k+1}]$ с положительной оценкой $\Delta_{k+1}[j_{k+1}]$. Вычисляем
$$z_{k+1}[N_+^{(k+1)}] = B_{k+1}[N_+^{(k+1)}, M] \times A[M, j_{k+1}].$$
Симплексная таблица при $it = k + 1$ построена.

5°. Особенностью задачи (4) является то, что для нее легко построить начальную симплексную таблицу. Возьмем $N_+^{(0)} = (m+1) : (m+n+1)$. Получим

Начальная симплексная таблица

$it = 0$	1	$1\,1 \ldots 1$	$\Delta_{j_0} > 0$
$m+1$	0		
$\vdots$	$\vdots$	E_{n+1}	$A[M, j_0]$
$m+n$	0		
$m+n+1$	1		

Действительно, в данном случае $A[M, N_+^{(0)}] = E_{n+1}$, поэтому

$$B_0[N_+^{(0)}, M] = \big(A[M, N_+^{(0)}]\big)^{-1} = E_{n+1}.$$

Далее

$$\begin{aligned}
&\lambda^{(0)}[N_+^{(0)}] = B_0[N_+^{(0)}, M] \times b[M] = e_{n+1},\\
&f(\lambda^{(0)}) = c[N_+^{(0)}] \times \lambda^{(0)}[N_+^{(0)}] = 1,\\
&u_0[i] = c[N_+^{(0)}] \times B_0[N_+^{(0)}, i] = 1,\ \ i \in 1 : n+1.
\end{aligned}$$

Индекс $j_0 \in N \setminus N_+^{(0)}$ выбирается из условия

$$\Delta_{j_0} := \Delta_0[j_0] = u_0[M] \times A[M, j_0] = \sum_{i=1}^{n+1} A[i, j_0] > 0.$$

При этом

$$z_0[N_+^{(0)}] = B_0[N_+^{(0)}, M] \times A[M, j_0] = A[M, j_0].$$

Если при всех $j \in N \setminus N_+^{(0)}$ оценки $\Delta_0[j]$ неположительны, то $\lambda^{(0)}$ — оптимальный базисный план.

6°. Приведем два характерных примера.

ПРИМЕР 1. Возьмем на плоскости четыре точки

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ p_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Выясним, принадлежит ли точка $p = \mathbf{0}$ выпуклой оболочке G точек (5). На рис. 1 представлены данные примера 1.

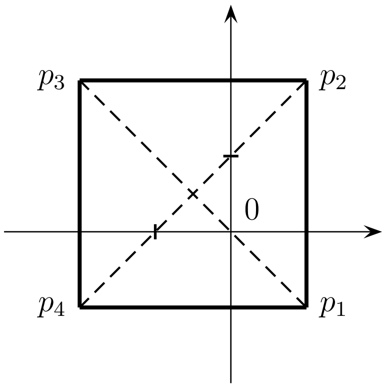

Рис. 1. Данные примера 1.

Имеем $a_j = p_j$, $j \in 1:4$. Параметры задачи линейного программирования (4) принимают конкретные значения:

$$c = (\;0,\; 0,\; 0,\; 0,\; 1,\; 1,\; 1),$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Заполним начальную симплексную таблицу. В качестве начального базиса индексов возьмем $N_+^{(0)} = 5:7$.

Начальная симплексная таблица

$it = 0$	1	1	1	1	$\Delta_1 = 1$
5	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	-1
7	1	0	0	1	1

Имеем $t_0 = 0$. Из базиса выводится индекс $i_0 = 5$ и на его место вводится индекс $j_0 = 1$.

Симплексная таблица 1

$it = 1$	1	0	1	1	$\Delta_2 = 3$
1	0	1	0	0	1
6	0	1	1	0	3
7	1	-1	0	1	0

Имеем $t_1 = 0$. Из базиса можно выводить индексы 1 и 6. Мы заинтересованы в «выбивании» индексов искусственных переменных, поэтому положим $i_1 = 6$. На место $i_1 = 6$ введем индекс $j_1 = 2$.

Симплексная таблица 2

$it = 2$	1	-1	0	1	$\Delta_3 = 3$
1	0	$2/3$	$-1/3$	0	-2
2	0	$1/3$	$1/3$	0	0
7	1	-1	0	1	3

Имеем $t_2 = 1/3$. На место индекса $i_2 = 7$ переходит индекс $j_2 = 3$.

Симплексная таблица 3

$it = 3$	0	0	0	0	
1	$2/3$				
2	0				
3	$1/3$	$-1/3$	0	$1/3$	

Получили $\lambda^{(3)} = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0\right)$, $f(\lambda^{(3)}) = 0$. Последнее равенство гарантирует, что $\lambda^{(3)}$ — оптимальный базисный план.

В терминах векторов p_j результат можно записать так:

$$\tfrac{2}{3}p_1 + \tfrac{1}{3}p_3 = \mathbf{0}.$$

Это значит, что точка $p = \mathbf{0}$ принадлежит выпуклой оболочке G точек (5).

7°. Отметим, что базисный план $\lambda^{(3)}$ — вырожденный. Оказывается, что существует невырожденный оптимальный базисный план. Чтобы получить его, вернемся к таблице 2. Здесь положительную оценку имеет не только столбец 3, но и столбец 4, $\Delta_4 = 3$. Введем в базис именно этот столбец и продолжим вычисления.

Симплексная таблица $2'$

$it = 2$	1	-1	0	1	$\Delta_4 = 3$
1	0	$2/3$	$-1/3$	0	-1
2	0	$1/3$	$1/3$	0	-1
7	1	-1	0	1	3

Имеем $t_2 = 1/3$. На место индекса $i_2 = 7$ переходит индекс $j_2 = 4$.

Симплексная таблица $3'$

$it = 3$	0	0	0	0	
1	$1/3$				
2	$1/3$				
4	$1/3$	$-1/3$	0	$1/3$	

Получили $\lambda^{(3)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right)$, $f(\lambda^{(3)}) = 0$. Последнее равенство гарантирует, что $\lambda^{(3)}$ — оптимальный базисный план. Он невырожденный.

В терминах векторов p_j результат можно записать так:

$$\tfrac{1}{3}p_1 + \tfrac{1}{3}p_2 + \tfrac{1}{3}p_4 = \mathbf{0}.$$

Это значит, что точка $p = \mathbf{0}$ принадлежит выпуклой оболочке G точек (5).

8°. Переходим ко второму примеру.

ПРИМЕР 2. Возьмем на плоскости три точки

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Выясним, принадлежит ли точка $p = \mathbf{0}$ выпуклой оболочке G точек (6). На рис. 2 представлены данные примера 2.

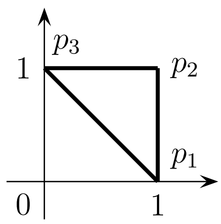

Рис. 2. Данные примера 2.

Имеем $a_j = p_j$, $j \in 1 : 3$. Параметры задачи линейного программирования (4) принимают конкретные значения:

$$
c = \ (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1),
$$
$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

В качестве начального базиса индексов возьмем $N_+^{(0)} = 4 : 6$. Далее приводится полное решение задачи линейного программирования модифицированным симплекс-методом — без комментариев.

Полная симплексная таблица

$it = 0$	1	1	1	1	$\Delta_1 = 2$
4	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	0
6	1	0	0	1	1
$it = 1$	1	-1	1	1	$\Delta_2 = 1$
1	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1
6	1	-1	0	1	0
$it = 2$	1	-1	0	1	$\Delta_3 = 1$
1	0	1	-1	0	-1
2	0	0	1	0	1
6	1	-1	0	1	1
$it = 3$	1	-1	-1	1	
1	0				
3	0	0	1	0	
6	1				

Легко проверить, что при $it = 3$ оценки всех столбцов матрицы A неположительны (в частности, $\Delta_2 = -1$). Значит, план $\lambda^{(3)} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ — оптимальный. Приняв во внимание, что $f(\lambda^{(3)}) = 1$, заключаем, что точка $p = \mathbf{0}$ не принадлежит выпуклой оболочке G точек (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Модифицированный симплекс-метод* / В кн.: Избранные лекции по экстремальным задачам. Под ред. проф. В. Н. Малозёмова. СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. С. 15–24.