МДМ–МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ*

В. Н. Малоземов Н. А. Соловьева
v.malozemov@spbu.ru 4vinyo@gmail.com

1 июня 2022 г.

МДМ-метод был разработан в 1971 г. для поиска направления наискорейшего спуска в минимаксных задачах [1]. В дальнейшем он нашел применение в машинном обучении [2, 3]. В основе МДМ-метода лежит алгоритм ортогонального проектирования произвольной точки на выпуклую оболочку конечного числа заданных точек. В данном докладе рассматривается обобщение МДМ-метода на случай отделения двух выпуклых оболочек. Обобщенный МДМ-метод ориентирован на решение общей квадратичной задачи математической диагностики [4].

1°. Напомним постановку общей квадратичной задачи математической диагностики [4]. В пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы два конечных множества

$$P_1 = \{p_j\}_{j=1}^{s} \quad \text{и} \quad P_2 = \{p_j\}_{j=s+1}^{m},$$

где $s \in 1 : m-1$. Обозначим через C_1 и C_2 выпуклые оболочки множеств P_1 и P_2 соответственно. Требуется решить экстремальную задачу

$$\tfrac{1}{2}\,\|w_1 - w_2\|^2 \to \min_{w_1 \in C_1,\, w_2 \in C_2}. \tag{1}$$

Очевидно, что задача (1) имеет решение (w_1^*, w_2^*).

По определению выпуклой оболочки точки $w_1 \in C_1$ и $w_2 \in C_2$ допускают представления

$$w_1 = \sum_{j=1}^{s} u_j p_j, \quad w_2 = \sum_{j=s+1}^{m} u_j p_j,$$

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» http://www.apmath.spbu.ru/oml/

где

$$\sum_{j=1}^{s} u_j = 1, \quad u_j \geqslant 0 \text{ при всех } j \in 1:s,$$
$$\sum_{j=s+1}^{m} u_j = 1, \quad u_j \geqslant 0 \text{ при всех } j \in (s+1):m. \tag{2}$$

Введем вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ с компонентами $\xi_j = 1$ при $j \in 1:s$ и $\xi_j = -1$ при $j \in (s+1):m$. Обозначим через A матрицу со столбцами $\xi_1 p_1, \ldots, \xi_m p_m$. Тогда для любого плана (w_1, w_2) задачи (1) справедлива формула

$$w_1 - w_2 = \sum_{j=1}^{m} u_j \xi_j p_j = Au.$$

Здесь вектор u удовлетворяет условиям (2). Множество таких векторов обозначим через U. Задачу (1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\|w\|^2 \to \min, \\ w = Au, \quad u \in U. \end{gathered} \tag{3}$$

2°. Отметим одно свойство планов задачи (1).

ЛЕММА 1. *Пусть $w^* = w_1^* - w_2^*$ — решение задачи* (1)*. Для любого плана $w = w_1 - w_2$ этой задачи справедливо неравенство*

$$\langle w, w^* \rangle \geqslant \langle w^*, w^* \rangle. \tag{4}$$

Доказательство. В силу выпуклости множества C_1 точка $w_1^* + t(w_1 - w_1^*)$ при всех $t \in (0,1)$ принадлежит C_1. Точка w_2^* принадлежит C_2. Значит, планом задачи (1) является точка

$$(w_1^* + t(w_1 - w_1^*)) - w_2^* = w^* + t(w_1 - w_1^*).$$

Воспользуемся оптимальностью w^*. Получим

$$\|w^*\|^2 \leqslant \|w^* + t(w_1 - w_1^*)\|^2 = \|w^*\|^2 + 2t\langle w^*, w_1 - w_1^* \rangle + t^2 \|w_1 - w_1^*\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\langle w^*, w_1 - w_1^* \rangle + \tfrac{1}{2}\, t\, \|w_1 - w_1^*\|^2 \geqslant 0.$$

В пределе при $t \to +0$ придем к неравенству

$$\langle w^*, w_1 - w_1^* \rangle \geqslant 0. \tag{5}$$

Далее, в силу выпуклости множества C_2 точка $w_2^* + t(w_2 - w_2^*)$ при всех $t \in$ $\in (0,1)$ принадлежит C_2. Точка w_1^* принадлежит C_1. Значит, планом задачи (1) является точка

$$w_1^* - (w_2^* + t(w_2 - w_2^*)) = w^* - t(w_2 - w_2^*).$$

Воспользуемся оптимальностью w^*. Получим

$$\|w^*\|^2 \leqslant \|w^* - t(w_2 - w_2^*)\|^2 = \|w^*\|^2 - 2t\langle w^*, w_2 - w_2^*\rangle + t^2 \|w_2 - w_2^*\|^2 .$$

Отсюда следует, что

$$-\langle w^*, w_2 - w_2^*\rangle + \tfrac{1}{2}\, t \,\|w_2 - w_2^*\|^2 \geqslant 0.$$

В пределе при $t \to +0$ придем к неравенству

$$-\, \langle w^*, w_2 - w_2^*\rangle \geqslant 0. \tag{6}$$

Требуемое неравенство (4) есть сумма неравенств (5) и (6).
Лемма доказана. □

Отметим, что неравенство (4) равносильно следующему неравенству:

$$\|w - w^*\|^2 \leqslant \|w\|^2 - \|w^*\|^2 . \tag{7}$$

3°. Наша цель — распространить МДМ-метод на решение задачи (1), (3). Классический вариант МДМ-метода описан в работе [1]. Проведем предварительный анализ ситуации.

Пусть $w = Au$, $u \in U$. Обозначим

$$M_1^+(u) = \big\{ j \in 1:s \mid u[j] > 0 \big\}, \quad M_2^+(u) = \big\{ j \in (s+1):m \mid u[j] > 0 \big\}.$$

Введем величины

$$\begin{aligned} \Delta_1(u) &= \max_{j \in M_1^+(u)} \langle p_j, w\rangle - \min_{j \in 1:s} \langle p_j, w\rangle, \\ \Delta_2(u) &= \max_{j \in M_2^+(u)} \langle p_j, -w\rangle - \min_{j \in (s+1):m} \langle p_j, -w\rangle. \end{aligned}$$

Положим

$$\Delta(u) = \max\{\Delta_1(u), \Delta_2(u)\}.$$

Очевидно, что

$$\Delta_1(u) \geqslant 0, \quad \Delta_2(u) \geqslant 0, \quad \Delta(u) \geqslant 0. \tag{8}$$

ЛЕММА 2. *Возьмем произвольный план $w = Au$ задачи* (3) *и её оптимальный план $w^* = Au^*$. Справедливо неравенство*

$$\|w - w^*\|^2 \leqslant 2\Delta(u). \tag{9}$$

Доказательство. С учетом (4) запишем

$$\|w - w^*\|^2 = \|w\|^2 - 2\langle w, w^*\rangle + \|w^*\|^2 \leqslant \|w\|^2 - \langle w, w^*\rangle =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \xi_j u_j \langle p_j, w\rangle - \sum_{j=1}^{m} \xi_j u_j^* \langle p_j, w\rangle =$$
$$= \sum_{j=1}^{s} u_j \langle p_j, w\rangle + \sum_{j=s+1}^{m} u_j \langle p_j, -w\rangle - \sum_{j=1}^{s} u_j^* \langle p_j, w\rangle - \sum_{j=s+1}^{m} u_j^* \langle p_j, -w\rangle.$$

Объединив первую и третью, вторую и четвертую суммы, придем к неравенству

$$\|w - w^*\|^2 \leqslant \max_{j \in M_1^+(u)} \langle p_j, w\rangle - \min_{j \in 1:s} \langle p_j, w\rangle +$$
$$+ \max_{j \in M_2^+(u)} \langle p_j, -w\rangle - \min_{j \in (s+1):m} \langle p_j, -w\rangle = \Delta_1(u) + \Delta_2(u) \leqslant 2\Delta(u).$$

Лемма доказана. □

ТЕОРЕМА 1. *Равенство $\Delta(u) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда вектор $w = Au$ является решением задачи* (1), (3).

Доказательство. Неравенство (9) гарантирует оптимальность вектора w при $\Delta(u) = 0$. Проверим справедливость обратного утверждения. Возьмём решение $w^* = Au^*$ задачи (3) и покажем, что $\Delta(u^*) = 0$. Напомним, что $w^* = w_1^* - w_2^*$, где $w_1^* \in C_1$, $w_2^* \in C_2$.

Вначале рассмотрим случай, когда $\Delta(u^*) = \Delta_1(u^*)$. Пусть

$$\Delta_1(u^*) = \langle p_{j'} - p_{j''}, w^*\rangle. \tag{10}$$

Индексы j' и j'' принадлежат множествам $M_1^+(u^*)$ и $1 : s$ соответственно. Введем вектор

$$\widetilde{w}_1^* = w_1^* - u_{j'}^* \bigl(p_{j'} - p_{j''}\bigr)$$

(коэффициент при $p_{j'}$ передали вектору $p_{j''}$). Очевидно, что $\widetilde{w}_1^* \in C_1$. Обозначим

$$\widetilde{w}^* = \widetilde{w}_1^* - w_2^* = w^* - u_{j'}^* \bigl(p_{j'} - p_{j''}\bigr).$$

Умножим $\widetilde{w}^*$ скалярно на w^*. С учетом (10) получим

$$\langle \widetilde{w}^*, w^*\rangle = \langle w^*, w^*\rangle - u_{j'}^* \Delta_1(u^*).$$

Согласно лемме 1 справедливо неравенство $\langle \widetilde{w}^*, w^* \rangle \geqslant \langle w^*, w^* \rangle$, поэтому $-u^*_{j'}\Delta_1(u^*) \geqslant 0$. Условие $j' \in M_1^+(u^*)$ гарантирует, что $u^*_{j'} > 0$. Приходим к неравенству $\Delta_1(u^*) \leqslant 0$, которое вместе с обратным неравенством $\Delta_1(u^*) \geqslant 0$ (см. (8)) обеспечивает равенство $\Delta_1(u^*) = 0$.

Рассмотрим второй случай, когда $\Delta(u^*) = \Delta_2(u^*)$. Пусть

$$\Delta_2(u^*) = \langle p_{l'} - p_{l''}, -w^* \rangle. \tag{11}$$

Здесь индексы l' и l'' принадлежат множествам $M_2^+(u^*)$ и $(s+1) : m$ соответственно. Введем вектор

$$\widetilde{w}_2^* = w_2^* - u^*_{l'}\big(p_{l'} - p_{l''}\big).$$

Очевидно, что $\widetilde{w}_2^* \in C_2$. Обозначим

$$\widetilde{w}^* = w_1^* - \widetilde{w}_2^* = w^* + u^*_{l'}\big(p_{l'} - p_{l''}\big).$$

Умножим $\widetilde{w}^*$ скалярно на w^*. С учетом (11) получим

$$\langle \widetilde{w}^*, w^* \rangle = \langle w^*, w^* \rangle - u^*_{l'}\langle p_{l'} - p_{l''}, -w^* \rangle = \langle w^*, w^* \rangle - u^*_{l'}\Delta_2(u^*).$$

Отсюда, как и в предыдущем случае, следует неравенство $\Delta_2(u^*) \leqslant 0$, которое вместе с обратным неравенством $\Delta_2(u^*) \geqslant 0$ (см. (8)) обеспечивает равенство $\Delta_2(u^*) = 0$.

Теорема доказана. □

4°. Обратимся к описанию обобщенного МДМ-метода.

Возьмем начальное приближение $w_0 = Au_0$. Если $\Delta(u_0) = 0$, то по теореме 1 вектор w_0 является решением задачи (1). В противном случае переходим к следующей итерации.

Пусть уже имеется k-е приближение $w_k = Au_k$. Опишем переход к w_{k+1}. Найдем индексы $j'_k \in M_1^+(u_k)$, $j''_k \in 1 : s$ и $l'_k \in M_2^+(u_k)$, $l''_k \in (s+1) : m$, такие, что

$$\max_{i \in M_1^+(u)} \langle p_i, w_k \rangle = \langle p_{j'_k}, w_k \rangle, \qquad \min_{i \in 1:s} \langle p_i, w_k \rangle = \langle p_{j''_k}, w_k \rangle,$$
$$\max_{i \in M_2^+(u)} \langle p_i, -w_k \rangle = \langle p_{l'_k}, -w_k \rangle, \qquad \min_{i \in (s+1):m} \langle p_i, -w_k \rangle = \langle p_{l''_k}, -w_k \rangle.$$

Вычислим

$$\Delta_1(u_k) = \langle p_{j'_k} - p_{j''_k}, w_k \rangle, \quad \Delta_2(u_k) = \langle p_{l'_k} - p_{l''_k}, -w_k \rangle$$
$$\Delta(u_k) = \max\{\Delta_1(u_k), \Delta_2(u_k)\}.$$

Вначале рассмотрим случай, когда $\Delta(u_k) = \Delta_1(u_k)$. Для простоты будем использовать обозначения

$$p'_k := p_{j'_k}, \quad p''_k := p_{j''_k},$$

так что

$$\Delta(u_k) = \langle p'_k - p''_k, w_k \rangle. \tag{12}$$

Если $\Delta(u_k) = 0$, то w_k — решение задачи (1). Процесс закончен.

Пусть $\Delta(u_k) > 0$. Запишем $w_k = x_k - y_k$, где $x_k \in C_1$, $y_k \in C_2$. Введем вектор

$$\widehat{x}_k = x_k - u'_k\big(p'_k - p''_k\big),$$

где $u'_k = u_k[j'_k]$ (коэффициент при p'_k передали вектору p''_k). Очевидно, что $\widehat{x}_k \in C_1$. Рассмотрим отрезок

$$x_k(t) = x_k + t\big(\widehat{x}_k - x_k\big) = x_k - tu'_k\big(p'_k - p''_k\big), \quad t \in [0,1].$$

В силу выпуклости множества C_1 все точки $x_k(t)$ при $t \in [0,1]$ принадлежат C_1. Обозначим

$$w_k(t) = x_k(t) - y_k = w_k - tu'_k\big(p'_k - p''_k\big). \tag{13}$$

При всех $t \in [0,1]$ вектор $w_k(t)$ является планом задачи (1). Выберем $t_k \in [0,1]$ из условия

$$\|w_k(t_k)\|^2 = \min_{t\in[0,1]} \|w_k(t)\|^2 .$$

Положим $w_{k+1} = w_k(t_k)$.

Нетрудно понять, учитывая (13), что при $j \in 1:s$ справедливо представление

$$u_{k+1}[j] = \begin{cases} u_k[j], & \text{если } j \neq j'_k \text{ и } j \neq j''_k, \\ (1-t_k)u_k[j'_k], & \text{если } j = j'_k, \\ u_k[j''_k] + t_k\, u_k[j'_k], & \text{если } j = j''_k. \end{cases}$$

При этом $u_{k+1}[j] = u_k[j]$, если $j \in (s+1):m$.

Для t_k можно указать явную формулу. В силу (13) и (12) имеем

$$\begin{aligned} \|w_k(t)\|^2 &= \|w_k\|^2 - 2\,tu'_k\langle p'_k - p''_k, w_k\rangle + t^2(u'_k)^2\|p_{k'} - p_{k''}\|^2 = \\ &= \|w_k\|^2 - 2\,tu'_k\Delta(u_k) + t^2(u'_k)^2\|p_{k'} - p_{k''}\|^2. \end{aligned}$$

Абсолютный минимум $\|w_k(t)\|^2$ на $\mathbb{R}$ достигается в точке

$$\widehat{t}_k = \frac{\Delta(u_k)}{u'_k\|p'_k - p''_k\|^2} .$$

Ясно, что $\widehat{t}_k > 0$, поэтому для точки минимума на $[0,1]$ справедлива формула

$$t_k = \min\{1, \widehat{t}_k\}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда

$$\Delta(u_k) = \Delta_2(u_k) = \langle p_{l'_k} - p_{l''_k}, -w_k \rangle.$$

Здесь $l'_k \in M_2^+(u_k)$, $l''_k \in (s+1) : m$. Для простоты будем использовать обозначения

$$p'_k := p_{l'_k}, \quad p''_k := p_{l''_k},$$

так что

$$\Delta(u_k) = \langle p'_k - p''_k, -w_k \rangle. \tag{14}$$

Если $\Delta(u_k) = 0$, то w_k — решение задачи (1). Процесс закончен.

Пусть $\Delta(u_k) > 0$. Запишем $w_k = x_k - y_k$, где $x_k \in C_1$, $y_k \in C_2$. Введем вектор

$$\widehat{y}_k = y_k - u'_k\big(p'_k - p''_k\big),$$

где $u'_k = u_k[l'_k]$ (коэффициент от p'_k передали p''_k). Очевидно, что $\widehat{y}_k \in C_2$. Рассмотрим отрезок

$$y_k(t) = y_k + t\big(\widehat{y}_k - y_k\big) = y_k - tu'_k\big(p'_k - p''_k\big), \quad t \in [0,1].$$

В силу выпуклости C_2 все точки $y_k(t)$ при $t \in [0,1]$ принадлежат этому множеству. Обозначим

$$w_k(t) = x_k - y_k(t) = w_k + tu'_k\big(p'_k - p''_k\big). \tag{15}$$

При всех $t \in [0,1]$ вектор $w_k(t)$ является планом задачи (1). Выберем $t_k \in [0,1]$ из условия

$$\|w_k(t_k)\|^2 = \min_{t \in [0,1]} \|w_k(t)\|^2.$$

Положим $w_{k+1} = w_k(t_k)$.

Нетрудно понять, опираясь на (15), что при $l \in (s+1) : m$ справедливо представление

$$u_{k+1}[l] = \begin{cases} u_k[l], & \text{если } l \neq l'_k \text{ и } l \neq l''_k, \\ (1-t_k)u_k[l'_k], & \text{если } l = l'_k, \\ u_k[l''_k] + t_k\, u_k[l'_k], & \text{если } l = l''_k. \end{cases}$$

При этом $u_{k+1}[l] = u_k[l]$, если $l \in 1 : s$.

Для t_k можно указать явную формулу. В силу (15) и (14) имеем

$$\|w_k(t)\|^2 = \|w_k\|^2 - 2\,tu'_k\langle p'_k - p''_k, -w_k\rangle + t^2(u'_k)^2\|p'_k - p''_k\|^2 = \\ = \|w_k\|^2 - 2\,tu'_k\Delta(u_k) + t^2(u'_k)^2\|p'_k - p''_k\|^2.$$

Абсолютный минимум $\|w_k(t)\|^2$ на $\mathbb{R}$ достигается в точке

$$\widehat{t}_k = \frac{\Delta(u_k)}{u'_k\|p'_k - p''_k\|^2}\,.$$

Ясно, что $\widehat{t}_k > 0$, поэтому для точки минимума на $[0,1]$ справедлива формула

$$t_k = \min\{1, \widehat{t}_k\}.$$

Описание обобщенного МДМ-метода завершено.

З а м е ч а н и е. Обозначим $\Delta_k = \Delta(u_k)$. В обоих рассмотренных случаях справедливо равенство

$$\|w_k(t)\|^2 = \|w_k\|^2 - 2\,tu'_k\Delta_k + t^2(u'_k)^2\|p'_k - p''_k\|^2. \tag{16}$$

Одинаковы формулы и для $\widehat{t}_k$, и для t_k:

$$\widehat{t}_k = \frac{\Delta_k}{u'_k\|p'_k - p''_k\|^2}\,, \quad t_k = \min\{1, \widehat{t}_k\}. \tag{17}$$

Если $t_k = 1$, то итерацию с номером k будем называть *усеченной*, если $t_k = \widehat{t}_k < 1$, то *неусеченной*.

5°. Рассмотрим неусеченную итерацию. Обозначим через D_1 диаметр множества P_1, через D_2 — диаметр множества P_2, и пусть $D = \max\{D_1, D_2\}$.

ЛЕММА 3. *На неусеченной k-й итерации выполняется неравенство*

$$\|w_k\|^2 - \|w_{k+1}\|^2 \geqslant \frac{\Delta_k^2}{D^2}\,. \tag{18}$$

Действительно, согласно (16) и (17) имеем

$$\|w_{k+1}\|^2 = \|w_k\|^2 - 2\,\widehat{t}_k u'_k\Delta_k + \widehat{t}_k^{\,2}(u'_k)^2\|p'_k - p''_k\|^2 = \\ = \|w_k\|^2 - 2\,\widehat{t}_k u'_k\Delta_k + \widehat{t}_k u'_k\Delta_k = \|w_k\|^2 - \frac{\Delta_k^2}{\|p'_k - p''_k\|^2}\,.$$

Отсюда очевидным образом следует (18).

6°. Переходим к доказательству сходимости обобщенного МДМ-метода [5]. По описанным выше правилам строится последовательность планов $w_0, w_1, \ldots$ задачи (1), (3). Эта последовательность конечна, если при некотором k_0 выполнится равенство $\Delta(u_{k_0}) = 0$. По теореме 1 план w_{k_0} будет оптимальным.

Предположим, что

$$\Delta(u_k) > 0 \quad \text{при всех } k = 0, 1, \ldots \tag{19}$$

Условие (19) и формула (16) гарантируют, что бесконечная последовательность $\{\|w_k\|^2\}$ является строго убывающей.

ЛЕММА 4. *Пусть выполняется условие* (19). *Тогда существует такое натуральное N, что количество подряд идущих усеченных итераций не превосходит N.*

Доказательство. Усеченная k-я итерация характеризуется тем, что $t_k = 1$. Как следствие, на множестве $1 : s$ или $(s+1) : m$ справедливо представление

$$u_{k+1}[i] = \begin{cases} u_k[i], & \text{если } i \neq i'_k \text{ и } i \neq i''_k, \\ 0, & \text{если } i = i'_k, \\ u_k[i''_k] + u_k[i'_k], & \text{если } i = i''_k. \end{cases} \tag{20}$$

Предположим, что, начиная с r-й итерации, подряд идут усеченные итерации. Компоненты вектора u_{k+1}, определяющего w_{k+1}, при $k \geqslant r$ получаются путем перераспределения коэффициентов $u_r[i]$, $i \in 1 : m$, по формуле (20). Поэтому в цепочке последовательных усеченных итераций может присутствовать лишь конечное число различных векторов u_k. В силу условия (19) последовательность $\{\|w_k\|\}$ строго убывает. Значит, количество подряд идущих усеченных итераций ограничено сверху некоторым числом N, зависящим только от m и s.

Лемма доказана. □

ТЕОРЕМА 2. *При выполнении условия* (19) *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{k \to \infty} w_k = w^*.$$

Доказательство. Последовательность $\{\|w_k\|^2\}$ строго убывает и ограничена снизу нулем. Значит, она сходится. Как следствие,

$$\|w_k\|^2 - \|w_{k+1}\|^2 \to 0 \quad \text{при } k \to \infty. \tag{21}$$

По лемме 4 существует бесконечная последовательность неусеченных итераций с номерами k_i. Согласно лемме 3 имеем

$$\|w_{k_i}\|^2 - \|w_{k_i+1}\|^2 \geqslant \frac{\Delta_{k_i}^2}{D^2}\,.$$

С учетом (21) заключаем, что $\Delta_{k_i} \to 0$ при $i \to \infty$.

По лемме 2

$$\|w_{k_i} - w^*\|^2 \leqslant 2\Delta_{k_i},$$

так что $w_{k_i} \to w^*$ при $i \to \infty$. В частности, $\|w_{k_i}\| \to \|w^*\|$. Так как вся последовательность $\{\|w_k\|\}$ строго убывает, то $\|w_k\| \to \|w^*\|$ при $k \to \infty$. Остается сослаться на неравенство (7).

Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В. Н. *МДМ-методу — 50 лет* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 10 ноября 2021 г. (`http://apmath.spbu.ru/cnsa/reps21.shtml#1110`)

2. Barbero A., Lopez J., Dorronsoro J. R. *An Accelerated MDM Algorithm for SVM Training* // European Symposium on Artificial Neural Networks — Advances in Computational Intelligence and Learning. Bruges (Belgium). 23–25 April 2008. Proceedings, pp. 421–426.

3. Ming Zeng, Yu Yang, Junsheng Cheng. *A generalized Mitchell-Dem'yanov Malozemov algorithm for one-class support vector machine* // Knowledge-Based Systems. **109** (2016), pp. 17–24.

4. Малоземов В. Н., Соловьева Н. А. *Общая квадратичная задача математи ческой диагностики* // Семинар «O & ML». Избранные доклады. 11 мая 2022 г. (`http://apmath.spbu.ru/oml/reps22.shtml#0511`)

5. Lopez J., Dorronsoro J. R. *A Common Framework for the Convergence of the GSK, MDM and SMO Algorithms.* Lecturer Notes in Computer Science: Artificial Neural Networks, ICANN 2010. Vol. 6353. 2010. Pp. 82–87.