МЕТОД БРЭГМАНА*

Н. И. Наумова
nataliai.naumova@mail.ru

20 апреля 2022 г.

1°. Численные методы нахождения допустимых точек канонической задачи линейного программирования. Каноническая задача линейного программирования

$$cx \to \inf$$
$$x_i \geq 0,$$
$$Ax = b.$$

Допустимые точки канонической задачи линейного программирования можно, несомненно, искать методом искусственных переменных (и заодно выяснить, существуют ли такие точки), но результаты кажутся иногда неестественными. Поэтому и после появления методов линейного программирования сохранилась актуальность других (более ранних) методов, особенно после доказательства их корректности.

ПРИМЕР 1 (**Определение транспортных потоков**). 2 района проживания, в первом 10 (тыс. трудоспособных чел.), во втором 8 тыс. 2 предприятия, в первом потребность 6 тыс. чел., во втором — 12 тыс.чел. Надо предсказать, сколько поедет из каждого района на каждое предприятие. (Для проектирования дорог). Формально ищется $x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$, где $x_i \geq 0$, $x_1 + x_2 = 10$, $x_3 + x_4 = 8$, $x_1 + x_3 = 6$, $x_2 + x_4 = 12$. (Здесь x_1 — величина потока из района 1 на предприятие 1, x_2 — поток из района 1 на предприятие 2, x_3 — поток из района 2 на предприятие 1, x_4 — поток из района 2 на предприятие 2.) Эту же задачу можно сформулировать как задачу поиска матрицы (2×2) с неотрицательными элементами, в которой заданы суммы элементов каждой строки и каждого столбца.

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» http://www.apmath.spbu.ru/oml/

Здесь нет однозначности. Симплекс метод дает $x^0 = (0,\ 10,\ 6,\ 2)$, и $x_1^0 = 0$ кажется неестественным. Метод внутренней точки (из пакета ЛП) дает $x^1 = (3.5,\ 6.5,\ 2.5,\ 5.5)$ — более "естественный" результат.

Но и метод внутренней точки дает неестественный результат в следующем примере.

ПРИМЕР 2 (Транспортные потоки). $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, Ищется $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, где $x_i \geq 0$, $x_1+x_2 = 10$, $x_3+x_4+x_5+x_6 = 8$, $x_1+x_3 = 6$, $x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$. (Например, x_4, x_5, x_6 – потоки по разным маршрутам из района 2 на предприятие 2.)

Симплекс метод дает $x^2 = (0,\ 10,\ 6,\ 0,\ 0,\ 2)$, а метод внутренней точки дает $x^3 = (3.5,\ 6.5,\ 2.5,\ 0,\ 0,\ 5.5)$. И это уже неестественно, особенно для других интерпретаций, так как получаются неравноправные ответы при равноправных условиях.

Шелейховский (1933) предложил итеративный метод, который сходился на практике. Этот же итеративный метод был предложен в D'Esopo и Lefkowitz (1963), и также его сходимость не доказывалась. Sinkhorn (1964) доказал сходимость к бистохастической матрице.

МЕТОД ШЕЛЕЙХОВСКОГО

Дано: $S_i \subset N = \{1, \ldots, n\}$, $i = 1, \ldots m$, $b(S_i) > 0$.
Найти $x = (x_1, \ldots, x_n)$, для которого $x(S_i) = \sum_{k \in S_i} x_k = b(S_i)$ для всех i, $x_k \geq 0$ для всех $k \in N$, для случаев, когда известно, что задача разрешима.

Предлагается: для произвольного $x^0 \in R^n_{++}$ итеративный процесс.
$x_k^1 = x_k^0$ для $k \notin S_1$,
$x_k^1 = \lambda^1 x_k^0$ для $k \in S_1$, где λ^1 берется из условия $x^1(S_1) = \sum_{k \in S_1} x_k^1 = b(S_1)$,
$x_k^2 = x_k^1$ для $k \notin S_2$,
$x_k^2 = \lambda^2 x_k^1$ для $k \in S_2$, где λ^2 берется из условия $x^2(S_2) = \sum_{k \in S_2} x_k^2 = b(S_2)$,
$\vdots$
$x_k^{m+1} = x_k^m$ для $k \notin S_1$,
$x_k^{m+1} = \lambda^{m+1} x_k^m$ для $k \in S_1$, где λ^{m+1} берется из условия
$x^{m+1}(S_1) = \sum_{k \in S_1} x_k^{m+1} = b(S_1)$, и т.д.

Брэгман (1967) ввел меру близости

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\ln(x_i/y_i) - 1) + y_i.$$

Это — не метрика, так как нет симметрии. Функция $\rho(x, y)$ интерпретируется как расстояние от y до x. Он доказал, что итеративный процесс Шелейховского сходится к единственному решению задачи

$$\rho(x, x^0) \to \min_{x \in L},$$

где L — множество допустимых точек рассматриваемой задачи о транспортных потоках. (Это предположил Романовский)

Далее сходимость итеративного метода была доказана для случая, когда L — непустое пересечение замкнутых выпуклых множеств (например, нескольких гиперплоскостей) в R^n_{++}. Итеративный метод здесь — последовательное (циклическое) проектирование на эти множества.

Достоинство метода: результат одинаков для равноправных координат; "силу" координат можно частично регулировать начальной точкой x^0.

ПРИМЕР (продолжение примера 2). В приведенном выше Примере 2, где для "симметричных" координат 4, 5, 6 и симплекс метод и метод внутренней точки дают неравные результаты, метод Шелейховского (Брэгмана) при $y = (1,\ 1,\ 1,\ 1/3,\ 1/3,\ 1/3)$ дает $x^4 = (3.5,\ 6.5,\ 2.5,\ 1.83,\ 1.83,\ 1.83)$.

И на этом же примере видно, как координаты начальных точек влияют на результат.

Как таким образом проектировать на гиперплоскость?

Если L — гиперплоскость, то решение такой задачи называется **энтропийной проекцией x^0 на L** и ищется методом множителей Лагранжа.

Для некоторых гиперплоскостей энтропийные проекции на них легко вычисляются, так как
$$\frac{d}{dx_i}\rho(x,y) = \ln x_i - \ln y_i.$$

ПРИМЕР 3. Обозначим $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ для $S \subset \{1, \dots n\}$, $x \in R^n$; $L = \{x \in R^n_+ : x(S) = a\}$, $a > 0$ и z — энтропийная проекция y на L, где $y_k > 0$. Тогда $z_i = y_i$ для $i \notin S$, $z_i = \frac{a}{y(S)} y_i$ для $i \in S$. (Это — задача распределения потоков).

Еще задача, возникающая в теории игр.

ПРИМЕР 4. $L = \{x \in R^n_+ : x(P)/a_P = x(Q)/a_Q\}$, где $P, Q \subset N$, $P \cap Q = \emptyset$, $a_P > 0$, $a_Q > 0$, z — энтропийная проекция y на L.

Обозначим $K(P,Q,y) = a_P y(Q)/(a_Q y(P))$. Тогда
$$z_i = y_i \text{ для } i \in N \setminus (P \cup Q),$$
$$z_i = K(P,Q,y)^{a_Q/(a_P+a_Q)} \text{ для } i \in P,$$
$$z_i = K(P,Q,y)^{-a_P/(a_P+a_Q)} \text{ для } i \in Q.$$

ПРИМЕР 5 (Энтропийная проекция на произвольную гиперплоскость). Пусть $L = \{x \in R^n_{++} : \sum_{j=1}^n b_j x_j = B\}$, тогда если z — энтропийная проекция y на L, то
$$z_j = y_j \exp(\lambda b_j),$$
где λ — единственный корень уравнения
$$\sum_{j=1}^n b_j y_j \exp(\lambda b_j) = B.$$

Но вряд ли удобно решать такое уравнение на каждом шаге итеративного процесса!

Далее будут рассматриваться следующие вопросы.

1. Обобщения.

2. Когда удобно пользоваться обобщениями?

3. Почему “естественно” пользоваться энтропией?

4. Почему “естественно” пользоваться некоторыми другими обобщениями?

2°. Общий случай сходимости (Брэгман 1967). X — линейное топологическое пространство, A_i — замкнутые выпуклые множества, $i \in I$, где I — конечное множество индексов.

$S \subset X$, S — выпукло, $S \cap (\cap_{i \in I} A_i) \neq \emptyset$, и надо найти точку из этого множества.

Функция D задана на $S \times S$ и удовлетворяет следующим условиям.
1) $D(x,y) \geq 0$ и $D(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
2) Для любых $y \in S$, $i \in I$ существует $x = P_i y \in A_i \cap S$, для которой

$$D(x,y) = \min_{z \in A_i \cap S} D(z,y).$$

3) Для любых $y \in S$, $i \in I$ функция $G_y(z) = D(z,y) - D(z, P_i y)$ выпукла на $A_i \cap S$.
4) Существует частная производная $D'_x(x,y)$, причем $D'_x(y,y) = 0$.
5) При любом $z \in S \cap (\cap_{i \in I} A_i)$ при каждом неотрицательном числе r множество $T = \{x \in S | D(z,x) \leq r\}$ компактно.
6) Если $D(x^n, y^n) \to 0$, $y^n \to y^0 \in \bar{S}$, и множество элементов последовательности $\{x^n\}$ компактно, то $x^n \to y^0$.

Пусть x^0 — произвольная точка S, последовательность $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ называется **релаксационной последовательностью**, если x^{k+1} — D-проекция точки x^k на A_i, причем все индексы $i \in I$ используются и повторяются циклически.

ТЕОРЕМА 1. *При выполнении для D условий 1-6 множество элементов релаксационной последовательности компактно и любая предельная точка релаксационной последовательности $\{x^k\}$ принадлежит всем A_i.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для D еще выполняется одно из следующих условий:*
a) множество S замкнуто и при любых $z_1, z_2 \in S \cap (\cap_{i \in I} A_i)$ функция $H(y) = D(z_1, y) - D(z_2, y)$ непрерывна на S;
b) функция $D(x,y)$ определена при $x \in \bar{S}$, и если $y^k \to y^* \in S$, то $D(y^*, y^k) \to 0$.

Тогда предельная точка релаксационной последовательности $\{x^k\}$ единственна.

Ключевым условием является условие 3), и оно позволяет доказать следующую Лемму.

ЛЕММА 1 (Используются условия 2), 3), 4)). *Пусть $z \in A_i \cap S$, тогда при любом $y \in S$ выполняется*

$$D(P_i y, y) \leq D(z, y) - D(z, P_i y).$$

ЛЕММА 2 (Используются Лемма 1 и условие 5)). *Множество элементов релаксационной последовательности $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ компактно и $D(x^{k+1}, x^k) \to 0$ при $k \to \infty$.*

Примеры таких D.

ПРИМЕР 6. $X = R^n$, $D(x, y) = (x - y, C(x - y))$, где C — положительно определенная матрица.

ПРИМЕР 7. Или $X = R^n$ (или $X = R^n_{++}$), c_i — строго возрастающие непрерывные функции, заданные на $(-\infty, +\infty)$ (или на $(0, +\infty)$) соответственно, причем в обоих случаях они отображаются **на** $(-\infty,\ +\infty)$,

$$D(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \int_{y_i}^{x_i} (c_i(t) - c_i(y_i))\, dt.$$

Здесь функция $G_y(z)$ линейна.

В случае $X = R^n_{++}$ для $c_i(t) = \ln(t)$ получаем

$$D(x, y) = \rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i(\ln(x_i/y_i) - 1) + y_i).$$

В случае $X = R^n_{++}$ для $c_i(t) = a_i \ln(t)$, где $a_i > 0$, получаем

$$D(x, y) = \rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x_i(\ln(x_i/y_i) - 1) + a_i y_i),$$

однако удобного способа проектирования даже для ограничений транспортного типа нет (как и для энтропийной проекции на произвольную гиперплоскость).

В случае $X = R^n$ для $c_i(t) = a_i t$, где $a_i > 0$, получаем

$$D(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - y_i)^2/2.$$

В этом случае итеративный метод Брэгмана удобно применять для нахождения точки из пересечения нескольких гиперплоскостей (если известно, что это пересечение непусто). Действительно, пусть

$$L = \{x \in R^n : \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = B\},$$

$b = \{b_j\}$, тогда если z — решение задачи

$$D(x, y) \to \min_{x \in L},$$

то

$$z_j = y_j + \mu b_j / a_j,$$

где

$$\mu = \frac{B - (b, y)}{\sum_{j=1}^{n} b_j^2 / a_j}.$$

3°. Аксиоматические обоснования (Брэгман и Романовский, Наумова, Брэгман и Наумова, Csiszár)

Рассматривается семейство задач Γ, в котором каждая задача $P \in \Gamma$ задается конечным множеством $N = N(P)$ (**множество координат** или **множество агентов**), где $N \subset \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots\}$ (здесь $\mathcal{N}$ — множество потенциальных агентов), непустым множеством $S = S(P) \subset R^N$ (S — **допустимое множество**) и вектором $x^0 = x^0(P) \in R^N$ (**целевая точка**), т. е. задача P — тройка $P = \{N, S, x^0\}$.

Функция выбора, определенная на семействе задач Γ — отображение f, для которого $f(P) \in S(P)$ для всех $P \in \Gamma$.

Мы хотим определить f некоторым "естественным" образом так, чтобы $f(P)$ было близко к $x^0(P)$ в определенном смысле. Отображение f будет определено через систему условий (аксиом), как это принято в теории арбитражных схем (bargaining problems) ([10, 11, 13, 16]).

Здесь рассматриваем семейства задач Γ, порождаемых интервалами $X^i = (\alpha_i, \beta_i)$, $i \in \mathcal{N}$, где $-\infty \le \alpha_i < \beta_i \le +\infty$, то есть Γ состоит из всех задач $P = \{N, S, x^0\}$, где $x^0 \in X^N = \prod_{i \in N} X^i$, $S \subset X^N$ и S — непусто, выпукло и относительно замкнуто в X^N.

Если $\alpha_i = -\infty$ и $\beta_i = +\infty$ для всех $i \in \mathcal{N}$, то семейство задач обозначим через Γ_R. Если $\alpha_i = 0$ и $\beta_i = +\infty$ для всех $i \in \mathcal{N}$, то семейство задач обозначим через Γ_+.

Теперь рассмотрим свойства функции выбора f, определенной на Γ.

В дальнейшем предполагается, что все рассматриваемые задачи принадлежат Γ.

А1. (Совместимость (Compatibility)).
Если $x^0(P) \in S(P)$, то $f(P) = x^0(P)$.

Если целевая точка x^0 допустима, то она должна быть выбрана.

А2. (Независимость от промежуточной проекции на гиперплоскость).
Если $P_1 = \{N, S, x^0\}$, $P_2 = \{N, Q, x^0\}$, $S \subset Q$, и
$Q = \{x \in X^N : \sum_{i \in N} a_i x_i = b\}$, то $f(P_1) = f(\{N, S, f(P_2)\})$.

Если $f(P)$ рассматривается как результат адаптации целевой точки $x^0(P)$ к множеству $S(P)$, то А2 означает, что результат не зависит от промежуточной адаптации на гиперплоскость.

А3. (Оптимальность для неограниченных переменных).
Если $S(P) = Q \times X^i$ для некоторого $i \in N(P)$, то $f_i(P) = x_i^0(P)$.

Если переменная i не включается в ограничения, то в решении ее значение совпадает с ее целевым значением.

А4. (Независимость от неограниченных переменных).
Если $P_1 = \{N, Q, x^0\}$, $P_2 = \{N \cup \{i\}, Q \times X^i, y^0\}$ и $y_j^0 = x_j^0$ для всех $j \in N$, то $f_j(P_1) = f_j(P_2)$ для всех $j \in N$.

Дополнение неограниченной переменной не меняет предыдущие компоненты решения.

А5. (Оптимальность на прямой).
Если $S \subset Q = \{y \in X^N : y = x^0 + \lambda q, \lambda \in R^1\}$, где $q \in R^N$, то $f(\{N, S, x^0\}) = x^0 + \mu q$, где $|\mu| = \min\{|\lambda| : x^0 + \lambda q \in S\}$.

Это свойство требует выбора точки из S на прямой, ближайшей к целевой точке. Такая точка существует и единственна для рассматриваемых Г.

А6. (Независимость от посторонних альтернатив при фиксированной целевой точке).
Если $P_1 = \{N, S, x^0\}$, $P_2 = \{N, Q, x^0\}$, $S \subset Q$ и $f(P_2) \in S$, то $f(P_1) = f(P_2)$.

Если лучшая точка (относительно целевой) в большем множестве принадлежит меньшему множеству, то она будет и лучшей точкой меньшего множества. Аналогичное условие для арбитражных схем без целевых точек было введено Нэшем [10] как аксиома независимости от посторонних альтернатив.

Еще технические условия.

Функция выбора f называется LC-**непрерывной**, если для задач $P = \{N, S, x^0\}$ и $P^m = \{N, S^m, x^0\}$, где

$$S = \left\{x \in X^N : \sum_{i \in N} a_i x_i = b\right\}$$

и

$$S^m = \left\{ x \in X^N : \sum_{i \in N} a_{im} x_i = b \right\} \text{ с } a_{im} = 0 \text{ при } a_i = 0,$$

из условия $a_{im} \to a_i$ при $m \to \infty$ для всех $i \in N$ следует $f(P^m) \to f(P)$ при $m \to \infty$.

Иногда будем пользоваться следующими дополнительными свойствами функции выбора.

A7. (Слабая симметрия).
Если $X^i(\Gamma) = X^j(\Gamma)$ и $x_i^0 = x_j^0$ для всех $i, j \in N$, то $f_i(N, S(N, b), x^0) = f_j(N, S(N, b), x^0)$, где $S(N, b) = \{x \in X^N : \sum_{i \in N} x_i = b\}$.

A8. (Инвариантность относительно сдвига координат).
$\Gamma = \Gamma_R$ и для любого $y \in R^N$, $f(\{N, S + y, x^0 + y\}) = f(\{N, S, x^0\}) + y$, где $S + y = \{x + y : x \in S\}$.

A9. (Положительная однородность).
$\Gamma = \Gamma_+$ и $f(N, \alpha S, \alpha x^0) = \alpha f(N, S, x^0)$ для любого $\alpha > 0$, где $\alpha S = \{\alpha x : x \in S\}$.

В дальнейшем будем использовать **следующие обозначения**:

$$f^{ij}(b, x^0) = f\left(\left\{\{ij\}, S^{ij}(b), x^0\right\}\right),$$

где $S^{ij}(b) = \{x \in X^{ij} : x_i + x_j = b\}$.

Функция выбора f **симметрична относительно семейства функций** $\{c_i\}$ $(i \in \mathcal{N})$, заданных на (α_i, β_i), если

$$c_i(f_i^{ij}(b, x^0)) - c_i(x_i^0) = c_j(f_j^{ij}(b, x^0)) - c_j(x_j^0)$$

для всех $b \in (\alpha_i + \alpha_j, \beta_i + \beta_j)$.

Если $c_i(x_i)$ — полезность переменной x_i для агента i, то симметрия относительно $\{c_i\}$ означает, что изменения полезностей относительно целевой точки x^0 одинаковы на $S^{ij}(b)$ для агентов i и j.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть для каждого $i \in \mathcal{N}$ c_i — строго возрастающая непрерывная функция, заданная на $X^i = (\alpha_i, \beta_i)$, и $\{c_i(x_i) : x_i \in X^i\} = (-\infty, +\infty)$.*

Тогда существует единственная функция выбора f, заданная на Γ, которая удовлетворяет условиям A1–A6, *LC-непрерывна, непрерывна относительно целевой точки при фиксированных $S(P)$ и $N(P)$ и симметрична относительно семейства $\{c_i\}_{i \in \mathcal{N}}$.*

Кроме того,

$$f(P) = \underset{x \in S(P)}{\operatorname{argmin}} \sum_{i \in N(P)} \int_{x_i^0(P)}^{x_i} [c_i(t) - c_i(x_i^0(P))] dt.$$

Существование проверяется элементарно с помощью функции Лагранжа, а при доказательстве единственности существенно используется сходимость итеративного алгоритма.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть для функции выбора f, заданной на Γ_R или на Γ_+, выполняются следующие условаи:*

(C1.) A1–A6.

(C2.) *f непрерывна относительно целевой точки и LC-непрерывна.*

(C3.) $f_i^{ij}(b,x^0) \xrightarrow[b\to+\infty]{} +\infty$, $f_i^{ij}(b,x^0) \xrightarrow[b\to-\infty]{} -\infty$ *для всех i, j и x^0.*

(C4.) $f_i^{ij}(b,x^0)$ *строго возрастает по b.*

Тогда существует семейство строго возрастающих непрерывных, функций $\{c_i\}_{i\in\mathcal{N}}$, для которого

$$f(P) = \operatorname*{argmin}_{x\in S(P)} \sum_{i\in N(P)} \int_{x_i^0(P)}^{x_i} (c_i(t) - c_i(x_i^0(P)))\, dt.$$

З а м е ч а н и е. Если рассматривать только задачи, в которых допустимые множества — пересечения гиперплоскостей, то условия A5 и A6 не нужны.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если к аксиомам A1–A6 добавляется условие положительной однородности A9, то существуют такие $a_i > 0$, что $c_i(t) = a_i \ln(t)$, то есть*

$$f(P) = \operatorname*{argmin}_{x\in S(P)} \sum_{i\in N(P)} a_i x_i(\ln x_i - \ln x_i^0 - 1).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если к аксиомам A1–A6 добавляется условие инвариантности относительно сдвига координат A8, то существуют такие $a_i > 0$, что $c_i(t) = a_i t$, то есть*

$$f(P) = \operatorname*{argmin}_{x\in S(P)} \sum_{i\in N(P)} a_i (x_i - x_i^0)^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если к аксиомам A1–A6 добавляется условие слабой симметрии A7, то все c_i совпадают.*

4°. **История.** В работе Брэгмана (1967) впервые было показано, КУДА сходится итерационный процесс.

Брэгман и Романовский (1975) попытались обосновать энтропийное решение для случая пересечения нескольких гиперплоскостей в положительном ортанте. На самом деле там неформально использовались A1–A4 и требование пропорциональности идеальной точке для задач с 2 координатами.

Наумова (1982) рассматривала эту тему как задачи с идеальной точкой, в которых допустимыми множествами являются не только пересечения гиперплоскостей, а замкнутые выпуклые множества. Для этого она формализовала доказательство Брэгмана и Романовского, а результат на более широком допустимом множестве был получен добавлением аксиом A5 и A6.

Брэгман и Наумова (1984) доказали Теорему 3, а Теорема 4 была доказана при дополнительном предположении о существовании некоторых непрерывных частных производных, благодаря чему были получены дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Csiszár (1991) для случая, когда допустимыми множествами являются пересечения гиперплоскостей, доказал аналог Теорем 3 и 4, но использовал дополнительное техническое предположение. Он требовал, чтобы "проекции" целевой точки на различные гиперплоскости должны различаться кроме случая, когда целевая точка уже принадлежит их пересечению.

В приведенном выше виде Теоремы 3 и 4 были опубликованы в работе Брэгман и Наумова (2002). Избавиться от дополнительных предположений для получения разделяющихся переменных удалось благодаря развитию, начиная с 1980-х годов, новой теории о задачах с требованиями (Claim problems), используя полученные ранее результаты Томсона [15] для симметричного случая и Наумовой (2002) специально для этой задачи. Подробное изложение этой техники см. в работах [4] и [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczel, J., Dhombres, J. (1989). *Functional Equations in Several Variables with Application to Mathematics, Information Theory and to the Natural and Social Sciences*, Cambridge Univ. Press, 480 pp.

2. Bregman. L. M. (1967). A relaxation method for determining a common point of convex sets, and its application to the solution of convex programming problems. *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, 7:3, 200–217. (Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. ЖВМиМФ, 1967, т.7, №3, 620-631.)

3. Bregman, L. M., & Naumova, N. I. (1984). Arbitration solutions with ideal point, generated by systems of functions. *Soviet Math. Dokl.*, 30:3, 583–587.

4. Bregman, L. M., & Naumova, N. I. (2002). Goal programming solutions generated by systems of functions. *Lecture Notes in Economic and Math. Systems*, 510, 495–514.

5. Bregman, L. M., & Romanovsky, J. V. (1975). Apportionment and optimization in allocation problems. *Operations Research and Statistical Modeling*, Vyp. 3, Leningrad: Izdat. Leningrad. Univ., 137–162 (In Russian). (Разверстка и оптимизация в задачах распределения, в сб. Исследование операций и статистическое моделирование, под ред. И.В.Романовского.)

6. Chun Y., & Thomson, W. (1992). Bargaining problems with claims. *Mathematical Social Sciences*, 24:1, 19–33.

7. Csiszár, I. (1991). Why least squares and maximum entropy? An axiomatic approach to inference for linear inverse problems, *The Annals of Statistics*, 19:4, 2032–2066.

8. D'Esopo, D.A., Lefkowitz, B. (1963). An algorithm for computing interpersonal transfers using the gravity model, *Operations Research*, 11, 6, 901-907.

9. Moulin, H. (2002). Chapter 6 in *Handbook of Social Choice and Welfare*, K. J. Arrow, A. K. Sen, & K. Suzumura (Eds), Elsevier Science B. V., 290–357.

10. Nash, J. F. (1950). The bargaining problem. *Econometrica*, 18:1, 155–162.

11. Naumova, N. I. (1983). Some arbitration schemes with an ideal point. *Vestnik Leningrad. Univ. (Ser. Math. Mekh. Astr. vyp. 4)*, 19, 30–36. (in Russian) [English transl. in *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, 16 (1984).]

12. Naumova, N. I. (2002). Non-symmetric equal sacrifice solutions for claim problem. *Mathematical Social Sciences*, 43, 1–18.

13. Roth, A. E. (1979). Axiomatic Models of Bargaining. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 170, Springer-Verlag. 126 pp.

14. Sinkhorn, R. (1964). A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochastic matrices. *The Annals of Mathematical Statistics*, 35, 2, 876-879.

15. Thomson, W. (2003). Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey. *Mathematical Social Sciences*, 45:3, 249–297.

16. Yanovskaya, E. B. (1981). Bargaining schemes with an ideal point. *Mat. Metody v Sotsial. Nauk – Trudy Sem. Protsessy Optimal. Upravleniya II Sekts.*, 14, 81–89 (In Russian).

17. Young, H. P. (1988). Distributive justice in taxation. *J. of Economic Theory*, 44:2, 321–335.