К ВОПРОСУ О МИНИМИЗАЦИИ ВЫПУКЛОЙ КУСОЧНО-АФФИННОЙ ФУНКЦИИ*

Г. Ш. Тамасян
grigoriytamasjan@mail.ru

Г. С. Шульга
gdextrous@gmail.com

8 декабря 2022 г.

1°. Пусть заданы $a_k \in \mathbb{R}^n$, $b_k \in \mathbb{R}$, $k \in 1 : s$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x) := \sum_{k=1}^{s} |\langle a_k, x\rangle - b_k| \longrightarrow \min_{x\in\mathbb{R}^n}. \tag{1}$$

К проблеме минимизации суммы модулей от аффинных функций сводятся, например, такие прикладные задачи, как линейного регрессионного анализа и обработка измерительной информации с аномально большими ошибками (сбоями) [1, 2], к которым метод наименьших модулей менее чувствительный нежели метод наименьших квадратов [3–5].

2°. В докладе пойдет речь о подробном анализе классического подхода решения рассматриваемой задачи, а именно об эквивалентной к ней задаче линейного программирования.

Напомним, что две задачи на минимум *эквивалентны*, если каждому плану одной задачи можно сопоставить план другой задачи с равным или меньшим значением целевой функции [6].

Далее нам понадобится следующий результат.

ЛЕММА. *Для любого вещественного числа α справедливы представления*

$$\alpha = w - v, \qquad |\alpha| = w + v,$$

где

$$w \geqslant 0, \qquad v \geqslant 0, \qquad wv = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно w и v:

$$\begin{cases} w - v = \alpha, \\ w + v = |\alpha|. \end{cases}$$

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» http://oml.cmlaboratory.com/

Она имеет единственное решение

$$w = \tfrac{1}{2}\bigl(|\alpha| + \alpha\bigr), \qquad v = \tfrac{1}{2}\bigl(|\alpha| - \alpha\bigr).$$

При этом, если число α не равно нулю, то одна из его составляющих w или v положительна, а вторая — равна нулю.

Полученные w и v удовлетворяют всем требуемым условиям. □

Таким образом, задачу (1) можно свести к эквивалентной задаче линейного программирования (см. [7, с. 10–13], [8, с. 308]):

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{s} (w_k + v_k) \longrightarrow \min \\ \langle a_k, x\rangle - b_k = w_k - v_k, \qquad k \in 1:s, \\ w_k \geqslant 0, \quad v_k \geqslant 0, \qquad k \in 1:s. \end{gathered} \tag{2}$$

Ясно, что в этой задаче множество планов непусто и целевая функция ограничена снизу нулём. Действительно, ограничениям задачи будет удовлетворять точка (x, w, v), где $x = \mathbf{0}_n$, а для данного b_k, в силу леммы, найдутся соответствующие w_k и v_k. Поэтому задача (2) разрешима (см. [7, с. 16]), а следовательно и минимум в исходной задаче (1) достигается (в общем случае в не единственной точке).

Также несложно показать, что задача (1) эквивалентна следующей задаче линейного программирования (см. [9, с. 301–302], [10, с. 617]):

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{s} t_k \longrightarrow \min \\ -t_k \leqslant \langle a_k, x\rangle - b_k \leqslant t_k, \qquad k \in 1:s, \\ t_k \geqslant 0, \qquad k \in 1:s. \end{gathered} \tag{3}$$

Однако, с вычислительной точки зрения целесообразно решать задачу (2), т. к. имеет в два раза меньше ограничений. Далее её и будем изучать.

3°. При исследовании задачи линейного программирования всегда полезно рассмотреть и двойственную к ней.

Двойственной к задаче (2) является задача с двусторонними ограничениями (см. [7, упр. 9.1, с. 34]):

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{s} b_k u_k \longrightarrow \max \\ \sum_{k=1}^{s} a_k u_k = \mathbf{0}_n, \\ -1 \leqslant u_k \leqslant 1, \quad k \in 1:s. \end{gathered} \tag{4}$$

Задачи (2) и (4) имеют решения. Обозначим их через

$$z_* = (x_*, w^*, v^*)^T, \qquad u^* = (u_1^*, \ldots, u_s^*)^T$$

соответственно. Допустим, что мы нашли u^*. Покажем, как восстановить x_* — решение задачи (1).

Введём индексные множества

$$\begin{aligned} I_+ &= \{k \in 1:s \mid u_k^* = 1\}, \\ I_0 &= \{k \in 1:s \mid u_k^* \in (-1,1)\}, \\ I_- &= \{k \in 1:s \mid u_k^* = -1\}, \end{aligned}$$

которые осуществляют разбиение множества $\{1, 2, \ldots, s\}$.

Запишем условия дополнительности (см. [7, с. 33], вторая теорема двойственности):

$$\begin{cases} (u_k^* + 1)w_k^* = 0, & k \in 1:s, \\ (-u_k^* + 1)v_k^* = 0, & k \in 1:s. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при всех $k \in 1:s$ справедливы соотношения

$$\begin{cases} w_k^* = 0, & \text{если } k \in I_+, \\ w_k^* = v_k^* = 0, & \text{если } k \in I_0, \\ v_k^* = 0, & \text{если } k \in I_-. \end{cases}$$

На основании ограничений-равенств задачи (2) получаем систему линейных уравнений для определения $(x_*, w^*, v^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$:

$$\begin{cases} \langle a_k, x_* \rangle + v_k^* = b_k, & \text{если } k \in I_+, \\ \langle a_k, x_* \rangle = b_k, & \text{если } k \in I_0, \\ \langle a_k, x_* \rangle - w_k^* = b_k, & \text{если } k \in I_-, \end{cases}$$

где $\mathbb{R}^n_+$ — совокупность векторов из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами.

Так как $w_k^* \geqslant 0$, $v_k^* \geqslant 0$, $k \in 1:s$, то всё множество решений задачи (1) описывается системой:

$$\begin{cases} \langle a_k, x_* \rangle \leqslant b_k, & k \in I_+, \\ \langle a_k, x_* \rangle = b_k, & k \in I_0, \\ \langle a_k, x_* \rangle \geqslant b_k, & k \in I_-. \end{cases} \tag{5}$$

Напомним, что большинство численных методов решения задач линейного программирования (различные варианты симплекс-метода [11]) реализованы так, что позволяют одновременно находить решения и для двойственной задачи. Таким образом, решая подобным методом всего лишь одну задачу линейного программирования (4), мы находим заодно и точку x^* (выражаемая двойственными переменными) доставляющую наименьшее значение целевой функции f задачи (1). А также имеем описание всего множества точек глобального минимума — в виде системы (5).

4°. В вычислительной системе MatLab были проведены численные эксперименты по сравнительному анализу решения задачи (1) при различных значениях параметров n и s. С помощью встроенной в MatLab процедуры `linprog` (см. [12]) реализуется решение задач линейного программирования (2), (3) и (4).

Используя генератор псевдослучайных чисел строятся массивы $a_k \in \mathbb{R}^n$, $b_k \in \mathbb{R}$, $k \in 1 : s$, участвующие в образовании функции f задачи (1). Далее формируются соответствующие компоненты (целевой функции и ограничений) рассматриваемых задач линейного программирования и осуществляется подсчет времени на их решение.

В таблице представлены результаты отношения затрат времени на решение задачи (2) к (4) при различных n и s.

s \ n	**3**	**10**	**50**
500	4.5	3.2	3.9
1000	6.1	6.6	7.1
5000	26.7	21.3	20.3
20000	53.6	32.7	32.9

ВЫВОДЫ

- Численные эксперименты подтвердили, что задача (2) значительно быстрее решается нежели (3).
- Нецелесообразно приводить к каноническому виду задачу (2), т. к. практически одинаковы временные затраты. Однако «технически» намного проще вызов процедуры `linprog` для задач в канонической форме.
- При $n < s$ следует решать двойственную задачу (4), в противном случае — прямую (2).

5°. Быстрый алгоритм для скалярного случая ($x \in \mathbb{R}$) задачи (1) был рассмотрен в докладе [13].

Работа выполнена в Институте проблем машиноведения РАН при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-71-10032).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лакеев А. В., Носков С. И. *Метод наименьших модулей для линейной регрессии: число нулевых ошибок аппроксимации* // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 2(34). С. 48–50.

2. Акимов П. А., Матасов А. И. *Итерационный алгоритм для ℓ_1-аппроксимации в динамических задачах оценивания* // Автоматика и телемеханика. 2015. № 5. С. 7–26.

3. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений: квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь, 1983. 304 с.

4. Горелик В. А., Трембачева О. С., *Решение задачи линейной регрессии с использованием методов матричной коррекции в метрике ℓ_1* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 2. С. 202–207.

5. Сурин В. А., Тырсин А. Н. *Применение обобщенного метода наименьших модулей в задачах обработки и анализа изображений* // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 2. С. 45-55. DOI 10.24143/2072-9502-2020-2-45-55.

6. Малозёмов В. Н. *Об эквивалентных экстремальных задачах* // Семинар «O&ML». Избранные доклады. 16 апреля 2022 г. (`http://oml.cmlaboratory.com/reps22.shtml#0416`)

7. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

8. Поляк Б. Т. *Введение в оптимизацию.* М.: Наука, 1983. 384 с.

9. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. *Линейное и выпуклое программирование.* М.: Наука, 1967. 460 с.

10. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004.

11. Васильев Ф. П., Иваницкий Ф. П. *Линейное программирование.* М.: МЦНМО, 2020. 416 с.

12. Сергеев А. Н., Соловьёва Н. А., Чернэуцану Е. К. *Решение задач линейного программирования в среде MATLAB* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 февраля 2011 г. (`http://cnsa.cmlaboratory.com/programm/12022011_MatLabLP.pdf`)

13. Тамасян Г. Ш., Шульга Г. С. *Быстрый алгоритм минимизации выпуклой ломаной* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 24 марта 2021 г. (`http://cnsa.cmlaboratory.com/reps21.shtml#0324`)