Задача о назначениях: от Якоби до Бертсекаса

Бухвалова В. В.

СПбГУ, Математико-механический факультет
Кафедра исследования операций

Санкт-Петербург
2022 г.

Линейная задача о назначениях (ЛЗН)

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \Rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} = 0 \text{ или } 1, \; i, j = 1, \ldots, n.$$

ЛЗН: история

До конца 70-х годов (прошлого века) основным подходом к решению ЛЗН являлся венгерский алгоритм и его модификации. Алгоритм был разработан и опубликован Гарольдом Куном (Harold Kuhn) в 1955 г.

Однако недавно было обнаружено, что статья Карла Густава Якоби «Looking for the order of a system of arbitrary ordinary differential equations», напечатанная после смерти автора на латыне в 1890 г., содержала помимо прочих результатов и «венгерский» алгоритм решения задачи о назначениях.
Аннотированный перевод этой статьи на английский язык был опубликован в январе 2009 г. в «Applicable Algebra in Engineering Communication and Computing».

ЛЗН: статья К. Якоби (1890)

Looking for the order of a system of arbitrary ordinary differential equations

De investigando ordine systematis æquationum differentialium vulgarium cujuscunque

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851)
Prof. ord. math. Regiom. (1832–1844) & Berol. (1844–1851)

Summarium

Hanc commentationem in medium protulerunt S. Cohn et C.W. Borchardt e manuscriptis posthumis Caroli G. J. Jacobi. Variæ formæ canonicæ quas datum systema æquationum differentialium vulgarium inducere potest considerantur. Investigatio ordinis systematis, sine formæ canonicæ auxilio, ad solvendum problema inæqualitatum reducitur: affectationum problema. Novum genus formularum, determinantia manca, introductum est. Cuiusmodi quantitas non evanescens indicio est, ordinem equalem esse solutioni H problematis inæqualitatum, quæ per algorithmum, Haroldi Kuhn methodi hungariæ similem, invenitur.

Abstract

This paper was edited by S. Cohn and C.W. Borchardt from posthumous manuscripts of C.G.J. Jacobi. The various canonical forms that a given system ordinary differential equations may take are considered. Looking for the order of the system, without using a normal form, is reduced to a problem of inequalities: the *affectation problem*. A new type of formulas, the truncated determinants, is introduced. The non vanishing of this quantity means that the order will be equal to the value H, solution of this inequalities problem, which is obtained by an algorithm similar to Harold Kuhn's Hungarian method.

О К. Якоби

К. Якоби (1804–1851) — немецкий математик и механик (матрица Якоби, метод Якоби для собственных значений и т.д.). Родной (младший) брат российского академика, физика Бориса Семёновича Якоби (1801–1874).

ЛЗН: венгерский алгоритм

Венгерский алгоритма основан на следующем утверждении:

оптимальное назначение останется оптимальным, если к каждому элементу строки (столбца) матрицы доходов добавить некоторое число.

В венгерском алгоритме кроме этого факта используются нетривиальные комбинаторные свойства матриц.

ЛЗН: венгерский алгоритм

Объяснением того, что не существует простого изложения венгерского алгоритма, может служить тот факт, что как было установлено значительно позже, венгерский метод является методом одновременного решения прямой и двойственной задач в линейном программировании, применённым к задаче о назначениях.

ЛЗН: сложность венгерского алгоритма

Первоначальный алгоритм Куна имел асимптотику $O(n^4)$.
Позже Джек Эдмондс (Jack Edmonds) и Ричард Карп (Richard Karp) (и независимо от них Томидзава (Tomizawa)) показали, каким образом улучшить его до асимптотики $O(n^3)$.

Алхимия венгерского алгоритма

В учебном пособии И. В. Романовского «Дискретный анализ (2016)» (как и в статье Куна) венгерский алгоритм — это алгоритм построения полного паросочетания в двудольном графе.

И хотя автор, по его же словам, *рассматривает небольшой пример* ($n = 8$), он устаёт от его решения (приводит только 2 итерации) и предлагает читателю *найти наилучшее решение самостоятельно*.

Алхимия венгерского алгоритма

В популярном во всём мире учебнике Х. Тахи «Исследование операций» (45 лет на рынке, 10 изданий, переведён на многие языки) отсутствует обоснование получения оптимального решения венгерским алгоритмом, только ссылка на то, что корректность метода можно доказать, используя теорию двойственности.

ЛЗН: алгоритм Мака

Следующим алгоритмом решения ЛЗН, достойным упоминания является алгоритм Мака:

Mack C., The Bradford Method for Assignment Problem, *The New J. of Stats. and Op. Res.*, 1, Part 1, p.17–29, 1969.

В нём используется тот факт, что *назначение будет оптимальным, если ему соответствуют максимальные элементы в каждой строке матрицы доходов*. Так как в исходной матрице доходов максимальные элементы в строках могут быть расположены по несколько в одном столбце, метод предлагает процедуру проведения допустимых преобразований матрицы с целью распределения максимальных элементов по всем столбцам матрицы. Именно этот факт используется и в аукционном алгоритме.

ЛЗН: в «Комбинаторике» М.Холла (1963, 1970)

В этой книге немало места уделено ЛП, но для ЛЗН доказывается следующая теорема, которая является частным случаем теоремы двойственности.

Теорема. Пусть $A = (a_{ij}$ *есть* $(n \times n)$*-матрица действительных чисел. Тогда максимум суммы*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}$$

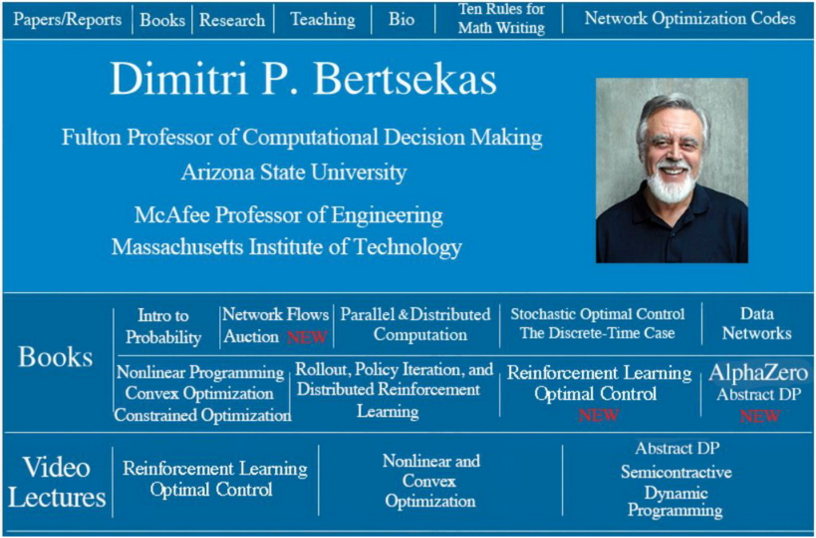
по всем перестановкам π *равен минимуму суммы*

$$\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$$

по всем числам u_i *и* v_j*, таким, что* $u_i + v_j \geq a_{ij}$*. Это общее значение для сумм достигается, когда* $u_i + v_{\pi(i)} = a_{ij}$*. Соответствующая перестановка* π *даёт решение задачи о назначениях.*

Доказательство использует теорему о различных представителях и содержит алгоритм поиска нужных u_i и v_j.

Задача о назначениях: аукционный алгоритм Д. Бертсекаса



Задача о назначениях: двойственная задача

$$\sum_{j=1}^{n} p_j + \sum_{i=1}^{n} q_i \Rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$q_i + p_j \geq a_{ij}, \; i, j = 1, \ldots, n.$$

Задача о назначениях: двойственная задача

Преобразуем ограничение двойственной задачи:

$$q_i \geq a_{ij} - p_j, \ \ j = 1, \ldots, n \Rightarrow q_i \geq \max_{j=1,\ldots,\,n} (a_{ij} - p_j).$$

Из минимизации следует, что

$$q_i = \max_{j=1,\ldots,\,n} (a_{ij} - p_j).$$

Задача эквивалентная двойственной задаче имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j + \sum_{i=1}^{n} \max_{j=1,\ldots,\,n} (a_{ij} - p_j) \Rightarrow \min$$

Задача о назначениях: наивный аукционный алгоритм

Наивный аукционный алгоритм:

- Решает двойственную задачу, перебирая её допустимые решения (цены p_j).
- Соответствующее решение прямой задачи:

$$x_{ik} = 1, \text{ если } a_{ik} - p_k = \max_{j=1,\ldots,n} (a_{ij} - p_j).$$

Если таких k несколько, то любое из них.

- Признак оптимальности — допустимость решения прямой задачи (выполнение ограничений):

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = 1, \ldots, n.$$

Выполнение ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = 1, \ldots, n$$

следует из определения аукционного процесса.

Аукционный процесс

- Торговля за предмет может происходить между любым подмножеством претендентов на него (тех, для кого данный предмет самый выгодный).
  Реализация алгоритма предполагает выбор способа выделения этого подмножества.
- Самый простой вариант — всегда включать в него не более двух покупателей. Если предмет *свободен*, то подмножество состоит из одного элемента. Если предмет, самый выгодный для очередного покупателя, ранее был закреплен за другим покупателем, то торговля происходит между этими двумя.

Аукционный процесс

- Рассмотрим одну из возможных схем организации вычислений в наивном аукционном алгоритме — рекурсивное решение.
- Каждому покупателю присвоен номер. На каждой итерации рассматриваем одного покупателя из тех, за которыми еще не закреплены предметы, в порядке возрастания их номеров.
- Такая схема организации вычислений позволяет решать задачу «on line». Венгерский алгоритм и алгоритм Мака этим важным свойством не обладают.

Аукционный процесс

- Закрепление предмета за покупателем носит временный характер и может быть отменено, если появится покупатель, который предложит за этот предмет большую цену.
- Просматриваем список покупателей в порядке их номеров и закрепляем за ними предметы, приносящие им максимальный доход.
- Так продолжаем до тех пор, пока либо за всеми покупателями будут закреплены предметы (получено оптимальное решение), либо возникнет *конфликт — предмет, на который претендует покупатель, ранее был уже назначен.*

Аукционный процесс

- Конфликт разрешаем с помощью аукциона: увеличение цены предмета, за который идет торг.
- За покупателем, проигравшим торг, пытаемся закрепить наиболее ценный для него предмет с учетом изменившихся цен.
- Признак оптимальности назначения: все предметы закреплены за покупателями.

Замечание «О статье А. Б. Грибова (1978)»

Рекурсивное решение транспортных задач линейного программирования // Вестник Ленинградского университета, 1978, №19, стр. 11–19.

- Алгоритм Грибова является *усовершенствованным вариантом венгерского метода*.
- *Последовательно решается ряд открытых задач, каждая из которых определяется матрицей, отличающейся от матрицы предыдущей задачи наличием ещё одной новой строки.*
- Основное внимание в статье уделено вопросам организации вычислений, в основе которых цепные списки. Приведены фрагменты программ на Алголе 60, которым отведена, примерно, половина объёма статьи.

Условия примера

Имеется 4 покупателя, между которыми требуется распределить 4 предмета, максимизировав суммарный доход. Доходы покупателей от приобретения этих предметов заданы следующей матрицей:

$$\begin{matrix} 8 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 5 & 3 \end{matrix}$$

Обозначения и начальные присваивания

Обозначим через p — вектор текущих цен на предметы,
S — множество образованных пар (покупатель, предмет).
Перед началом работы алгоритма

$$p = (0, 0, 0, 0), \quad S = \emptyset.$$

Значение целевой функции двойственной задачи:

$$\sum_{j=1}^{4} p_j + \sum_{i=1}^{4} \max_j (a_{ij} - p_j) = 0 + 8 + 4 + 9 + 8 = 29.$$

Итерация 1

Перебираем покупателей в исходном порядке и закрепляем за ними самые выгодные для них предметы:

$$S = \{(1,1)\}.$$

Спор между покупателями 1 и 2 за предмет 1. Вычисляем для этих покупателей возможные надбавки — разность прибыли между самым выгодным и вторым по выгодности предметами. Торг выигрывает 1, так он предлагает большую надбавку (3 против 1):

$$\nu_1 = 8 - 5 = \mathbf{3},\ \ \nu_2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow p_1 = p_1 + \nu_1 = 3;$$

Изменились матрица доходов и вектор цен предметов:

$$\begin{matrix} 8-3=\mathbf{5} & 5 & 4 & 2 \\ 4-3=1 & 3 & 2 & 1 \\ 7-3=4 & 9 & 1 & 4 \\ 5-3=2 & 8 & 5 & 3, \end{matrix}$$

$$p = (3,0,0,0).$$

Целевая функция двойственной задачи:

$$\sum^{4} p_j + \sum^{4} \max_j (a_{ij} - p_j) = 3 + (5+3+9+8) = 28.$$

Итерация 2

За покупателем 2 закрепляем предмет 2:

$$S = \{(1,1),(2,2)\}.$$

Переходим к покупателю 3. Спор между покупателями 2 и 3 за предмет 2 (торг выигрывает 3):

$$\nu_2 = 3 - 2 = 1,\ \nu_3 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow p_2 = p_2 + \nu_3 = 5;$$

Изменились матрица доходов и вектор цен предметов:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{5} & 5-5= & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3-5= & -2 & 2 & 1 \\ 4 & 9-5= & \mathbf{4} & 1 & 4 \\ 2 & 8-5= & 3 & 5 & 3 \end{array}$$

$$p = (3,5,0,0),\ S = \{(1,1),(3,2)\}.$$

Целевая функция двойственной задачи:

$$\sum_{j=1}^{4} p_j + \sum_{i=1}^{4} \max_j (a_{ij} - p_j) = (3+5) + (5+2+4+5) = 24.$$

Итерация 3

Вновь возвращаемся к покупателю 2 и закрепляем за ним предмет 3:

$$S = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}.$$

Переходим к покупателю 4. Ему нужен предмет 3, что означает конфликт с покупателем 2. Спор между покупателями 2 и 4 (торг выигрывает 4):

$$\nu_2 = 2 - 1 = 1,\ \ \nu_4 = 5 - 3 = 2 \Rightarrow p_3 = p_3 + \nu_4 = 0 + 2 = 2;$$

Изменились матрица доходов и вектор цен предметов:

$$\begin{array}{ccrc}
\mathbf{5} & 0 & 4-2= \ \ 2 & 2 \\
1 & -2 & 2-2= \ \ 0 & 1 \\
4 & \mathbf{4} & 1-2= -1 & 4 \\
2 & 3 & 5-2= \ \ \mathbf{3} & 3
\end{array}$$

$$p = (3,5,2,0),\ \ S = \{(1,1),(3,2),(4,3).\}.$$

Целевая функция двойственной задачи:

$$\sum_{j=1}^{4} p_j + \sum_{i=1}^{4} \max_j (a_{ij} - p_j) = (3+5+2) + (5+1+4+3) = 23.$$

Итерация 4

Вновь возвращаемся к несчастному покупателю 2 и закрепляем за ним предмет 4, который свободен:

$$S = \{(1,1),(2,4),(3,2),(4,3).\}.$$

Получили оптимальное решение:

$$\begin{array}{rrrr} \mathbf{5} & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & \mathbf{1} \\ 4 & \mathbf{4} & -1 & 4 \\ 2 & 3 & \mathbf{3} & 3 \end{array}$$

Оптимальные цены: $p = (3,5,2,0)$.

Проверка условий оптимальности

Целевая функция двойственной задачи не изменилась:

$$\sum_{j=1}^{4} p_j + \sum_{i=1}^{4} \max_j (a_{ij} - p_j) = (3+5+2) + (5+1+4+3) = 23.$$

Целевая функция прямой задачи:

$$a_{11} + a_{24} + a_{32} + a_{43} = 8 + 1 + 9 + 5 = 23.$$

Выполнено условие основной теоремы двойственности — равенство значений целевых функций прямой и двойственной задач:

$$a_{11} + a_{24} + a_{32} + a_{43} = \sum_{j=1}^{4} p_j + \sum_{i=1}^{4} \max_j (a_{ij} - p_j).$$

Наивный аукционный процесс: зацикливание

- Наивный аукционный процесс не определён, если надбавки при споре между покупателями k и l равны 0: $\nu_k = \nu_l = 0$.
- Поэтому меняем правило изменения цены (как на реальном аукционе):
$$\nu_k \geq \varepsilon.$$
- Это правило гарантирует завершение аукционного процесса за $O(\frac{C}{\varepsilon})$ итераций, где $C = \max_{i,j} |a_{ij}|$.

Аукционный процесс

- Полученное решение зависит от ε.
- Условие оптимальности выполнено с точностью до $n\varepsilon$.
- Полученное решение будет оптимальным, если все a_{ij} целые числа и $\varepsilon < \frac{1}{n}$.

Применение аукционного алгоритма

- Варианты задачи о назначениях.
- Кратчайший путь.
- Максимальный поток.
- Поток минимальной стоимости.
- Линейные транспортные задачи.

Вычислительный эксперимент с ЛЗН

О программных реализациях алгоритмов из этого доклада можно посмотреть здесь:

$$https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/48448-fast-linear-assignment-problem-using-auction-algorithm-mex?s\_tid=FX\_rc1\_behav$$

Приведённые на следующем слайде результаты вычислительного эксперимента (выполнен автором), показывают, что для быстрого решения ЛЗН при $n \geq 20$ нужны хорошие эвристические алгоритмы. Предлагается использовать для этого сеть Кохонена.

Вычислительный эксперимент с ЛЗН

Ноутбук HP ENVY CORE i5: Windows 10, Excel 2010, макросы VBA (рекурсивные, время выполнения t в секундах).

- Полный перебор перестановок:

$$t = 0 \text{ при } n \le 9;$$

$$t = 4 \text{ при } n = 10;$$

$$t \ge 47 \text{ при } n \ge 11.$$

- Сокращённый перебор с простой оценкой (сумма максимумов по строкам):

$$t = 0 \text{ при } n \le 16,$$

$$t \le 8 \text{ при } n = 17.$$

- Аукционный алгоритм. Оценка автора пока не получена.