

Стохастическое программирование и мультиагентные технологии

Олег Николаевич Граничин

Санкт-Петербургский государственный университет

План

- 1 Мультиагентные технологии
- 2 Эмерджентный интеллект
- 3 Распределенная стохастическая оптимизация

Принятие решений в реальном времени

Критические факторы:

- скорость — надо принять и реализовать решение до наступления следующего «разрушительного» события
- интеллект (природный и/или искусственный) — надо достичь цели в условиях неопределенности

Критическая технологии:

- Стохастическое программирование и мультиагентные технологии для поддержки (или замены) процесса принятия решения человеком

Стохастическое программирование

Стохастичность — греческое слово (*στοχαστικέζ*)

- целиться, метить (целиться во что (в кого)-либо)
- стремиться к тому, чтобы судьями были самые влиятельные люди
- применяться, приспособляться
- умозаключать, судить, догадываться, разгадывать (догадываться о том, что требуется; заключать на основании чего-либо; путем догадок)

Стохастическое программирование — подход в математическом программировании, позволяющий учитывать неопределённость в оптимизационных моделях

Мультиагентные технологии

В основе МТ децентрализованный подход к решению задач, при котором динамически обновляющаяся информация в распределенной сети интеллектуальных агентов обрабатывается не в некотором центре, а прямо у агентов на основе его локальных наблюдений вместе с локально доступной информацией от соседей. При этом существенно сокращаются как ресурсные и временные затраты на коммуникации в сети, так и время на обработку и принятие решений в центре всей системы (если он все-таки есть)

Интеллект

Интеллект — это то, что:

- отличает человека от компьютера, действующего строго по заложенной в него программе
- позволяет человеку ориентироваться в сложной обстановке, иметь дело с нечетко поставленными задачами, адаптироваться к меняющимся условиям

Стохастичность и вычисления

- “Кто нам мешает, тот нам поможет!”



- Стохастичность является основой самоорганизации

Эмерджентный интеллект

Эмерджентный интеллект (интеллектуальный резонанс, интеллект роя) — это проявление неожиданных свойств, которыми обладает система, но не обладает ни один из входящих в нее отдельных элементов

Ключевая особенность — динамика и непредсказуемость процесса принятия решений

Сложность алгоритмов

- Многие задачи NP -сложные ...

Сложность алгоритмов

- Многие задачи NP -сложные ...
- Альтернативный подход:
 - использовать наборы {сенсоров + актуаторов + выч. устройств} как исследовательскую систему с такой сложностью, как сложность исследуемого явления

Балансировка загрузки сети

Пусть $x_t^i = q_t^i / p_t^i$, где

- q_t^i — очередь заданий агента i в момент времени t
- p_t^i — производительность агента i в момент времени t

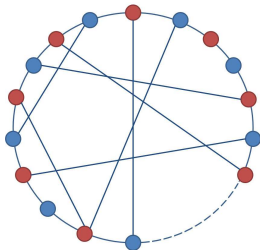
Динамическая модель:

$$x_{t+1}^i = x_t^i + f_t^i + u_t^i, \quad i \in N = \{1, \dots, n\},$$

или

$$q_{t+1}^i = q_t^i - p_t^i + z_t^i + p_t^i u_t^i; \quad i \in N, \quad t = 0, 1, \dots$$

Пример топологии сети:



Оптимальное решение

IEEE TAC 2015, АиТ 2015 (Граничин, Амелина)

$$z_t = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i, \quad \bar{u}_i = ?$$

$$T(u) = \max_{i \in N} \text{time}_i(\bar{u}_i) \rightarrow \min_u$$

Согласованность:

$$p_1 \bar{u}_1 = p_2 \bar{u}_2 = \dots = p_n \bar{u}_n$$

Функционал среднего риска (Потенциал Лапласа):

$$F(u) = \sum_{i,j=1}^m a_t^{i,j} (\text{time}_t^i - \text{time}_t^j)^2 \rightarrow \min_u$$

Консенсусное управление

Динамика агентов:

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i, u_t^i), \quad i \in N = \{1, \dots, n\}$$

Согласованное поведение:

$$x_t^i \approx x_t^j, \quad i, j \in N$$

Наблюдения:

$$y_t^{i,j} = x_{t-d_t^{i,j}}^j + w_t^{i,j}, \quad j \in N_t^i$$

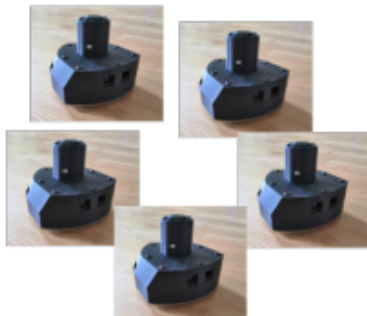
Протокол локального голосования — градиентный метод для потенциала Лапласа:

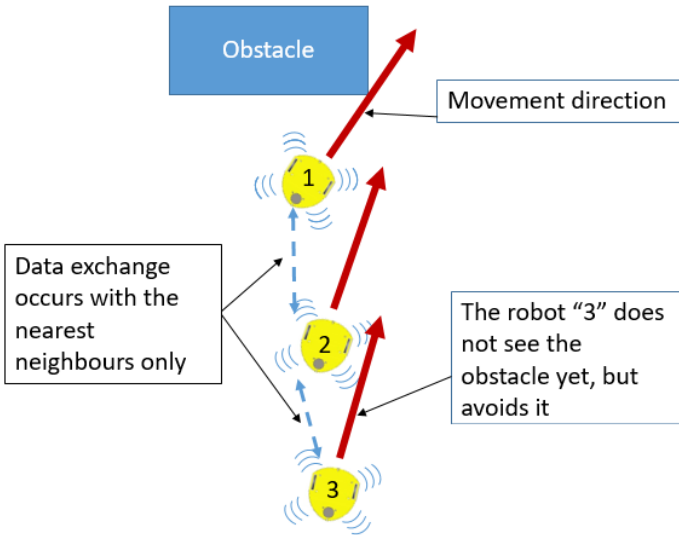
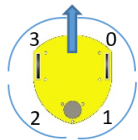
$$u_t^i = \gamma \sum_{j \in \bar{N}_t^i} a_t^{i,j} (y_t^{i,j} - y_t^{i,i})$$

Рой из 100 роботов

Экспериментальный стенд для тестирования и разработки обеспечения коллективного масштабируемого искусственного интеллекта, на котором были получены следующие научно-практические результаты:

- разработана методика построения децентрализованной беспроводной сети без привязки к синхронизации и адресации данных
- показано, что управление группой беспилотных движущихся объектов без единого центра увеличивает гарантию выполнения миссии
- групповой искусственный интеллект возможно реализовать при упрощенном оснащении роботов





В зависимости от расстояния до препятствия d_t^i и значений фронтальных световых датчиков $l_t^{i,0}, l_t^{i,3}$, каждый робот i вычисляет свой собственный параметр достоверности q_t^i (потенциал выбранного направления):

$$q_t^i = (1 - \beta) \left(1 - \left| \frac{l_t^{i,0} - l_t^{i,3}}{l_t^{i,0} + l_t^{i,3}} \right| \right) + \beta \frac{\min\{d_t^i, d_{\max}\}}{d_{\max}}, \quad (1)$$

показывающий зависимость уверенности от данных световых датчиков и датчиков расстояния

- 1 Если $d_t^i \geq d_{\max}$, то в направлении пути нет видимых препятствий, и окончательное направление пути рассчитывается следующим образом:

$$r_{t+1}^i = s_t^i(1 - \delta_t^i \gamma_t^i) + \alpha \frac{\gamma_t^i}{|\bar{\mathcal{N}}_t^i|} \sum_{j \in \bar{\mathcal{N}}_t^i} r_t^j q_t^j - r_t^i q_t^i, \quad (2)$$

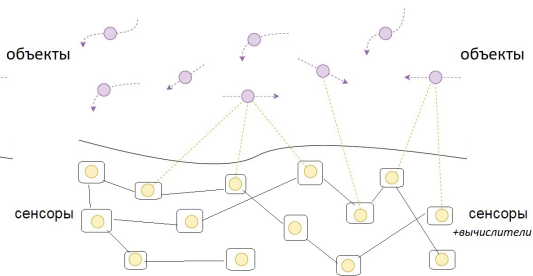
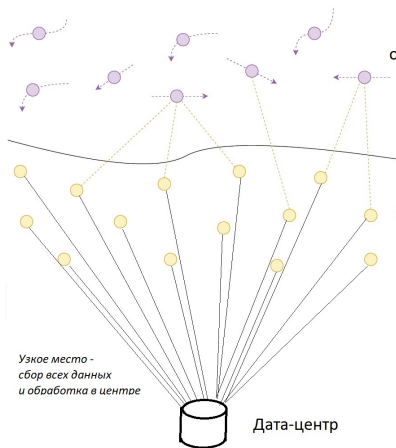
где

$$\delta_t^i = \frac{\alpha}{|\bar{\mathcal{N}}_t^i|} \sum_{j \in \bar{\mathcal{N}}_t^i} q_t^j - q_t^i, \quad \gamma_t^i = 1/(q_t^i + \delta_t^i)$$

- 2 Если $d_{\min} < d_t^i < d_{\max}$, то робот i корректирует поворот R на $\pm\phi$ по отношению к вычисленному s_t^i . Знак вращения выбирается на основании соответствующих сравнений данных световых датчиков. После этого новое направление пути r_{t+1}^i вычисляется по той же формуле (2) с обновленным значением $s_t^i := R s_t^i$
- 3 Если $d_t^i \leq d_{\min}$, то цель робота — найти направление движения, в котором $d_t^i > d_{\min}$, и он не использует данные от соседей и датчики света. В этом режиме робот случайным образом выбирает направление вращения и вращается на месте пока расстояние $d_t^i < d_{\min}$ превосходит d_{\min} .

Распределенное оценивание положения множества целей





Сеть коммуникации и обработки данных

Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation-based Consensus for Tracking under Unknown-but-Bounded Disturbances

Oleg Granichin, *Senior Member, IEEE*, Victoria Erofeeva, Yury Ivanskiy,
and Yuming Jiang, *Senior Member, IEEE*

Abstract—We consider a setup where a distributed set of sensors working cooperatively can estimate an unknown signal of interest, whereas any individual sensor cannot fulfil the task due to lack of necessary information diversity. This paper deals with these kinds of estimation and tracking problems and focuses on a class of simultaneous perturbation stochastic approximation (SPSA)-based consensus algorithms for the cases when the corrupted observations of sensors are transmitted between sensors with communication noise and the communication protocol has to satisfy a prespecified cost constraints on the network topology. Sufficient conditions are introduced to guarantee the stability of estimates obtained in this way, without resorting to commonly used but stringent conventional statistical assumptions about the observation noise such as randomness, independence, and zero mean. We derive an upper bound of the mean-square error of the estimates in the problem of unknown time-varying parameters tracking under unknown-but-bounded observation errors and noisy communication channels. The result is illustrated by a practical application to the multi-sensor multi-target tracking problem.

Index Terms—Distributed tracking, multi-agent networks, consensus algorithm, simultaneous perturbation stochastic approximation, SPSA, randomized algorithm, arbitrary noise, unknown-but-bounded disturbances, stochastic stability, tracking performance.

$\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is the loss function of agent i , which is typically known only to the agent itself. Studies of consensus and distributed optimization algorithms began from the 1970-80s [4], [5]. Distributed asynchronous stochastic approximation algorithms were studied in [6]. To date, there exist a number of approaches for the case when functions $F^i(\mathbf{x})$ are convex. In particular, the Alternating Direction Method of Multipliers [7], [8], as well as the subgradient method [9], [10] were proposed. For non-convex tasks, the works [11], [12] develop a large class of distributed algorithms based on various “functional-surrogate units”. The distributed tracking problem is considered when the estimated parameters vary over time.

Recently, for large-scale systems consisting of many individuals (components, targets), a distributed optimization is often used to estimate the unknown parameters which minimize a loss function, based on the information obtained by distributed sensors. So-called *multitarget-multisensor tracking problems* have been widely studied in many practical applications such as adaptive mobile networks, cognitive radio systems, target localization in biological networks, fish schooling, bee swarming, and bird flight (see, e.g., [13], [14]). It is well known that distributed tracking algorithms

Обобщенная постановка задачи

Цель распределенной оптимизации (как правило) — вычислить минимум некоторой целевой функции за счет взаимодействия между агентами

$$\bar{F}(x) = \sum_{i=1}^n F^i(x)$$

где $x \in \mathbb{R}^d$, а $F^i(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — целевая функция агента i , известная только ему

Топология мультиагентной системы

Взаимодействие внутри системы, состоящей из n элементов, можно описать с помощью ориентированного графа $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ — множество вершин, а $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ — множество дуг. Подграф \mathcal{G} — граф $\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{N}_{\bar{\mathcal{G}}}, \mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}})$, где $\mathcal{N}_{\bar{\mathcal{G}}} \subseteq \mathcal{N}$ и $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}} \subseteq \mathcal{E}$.

Для узла $i \in \mathcal{N}$, множество *соседей* обозначим $\mathcal{N}^i = \{j \in \mathcal{N} : (j, i) \in \mathcal{E}\}$. Полу степень захода узла $i \in \mathcal{N}$ равна $|\mathcal{N}^i|$.

Топология мультиагентной системы

Сопоставим дуге $(j, i) \in \mathcal{E}$ вес $c^{i,j} > 0$ и положим $c^{i,j} = 0$ для $(j, i) \notin \mathcal{E}$. Обозначим $C = [c^{i,j}]$ взвешенная матрица смежности или матрица связности. $\mathcal{G}_C = (\mathcal{N}_C, \mathcal{E}_C)$ — взвешенный ориентированный граф, где $\mathcal{N}_C \equiv \mathcal{N}$ и $\mathcal{E}_C \equiv \mathcal{E}$

Пусть $c^{i,j}$ — стоимость передачи данных по дуге $(j, i) \in \mathcal{E}_C$.

Взвешенная полустепень захода узла $i \in \mathcal{N}_C$ равна

$\deg_i^+(C) = \sum_{j=1}^n c^{i,j}$, $\deg_{\max}^+(C)$ — наибольшая полустепень захода среди всех узлов в графе \mathcal{G}_C

Ограничение на топологию

Стоимостные ограничения для узла $i \in \mathcal{N}$ можно задать в виде верхней границы Q : $\deg_i^+(C) \leq Q$, которая может обозначать общую „стоимость“ коммуникации агента i со своими соседями.

Для удовлетворения ограничений можно генерировать в момент времени t подграф $\mathcal{G}_{B_t} \subset \mathcal{G}_C$, задаваемый взвешенной матрицей смежности B_t таким образом, чтобы $\deg_i^+(B_t) \leq Q$.

Ограничение на топологию

Стоимостные ограничения $\deg_i^+(B_t) \leq Q$ не всегда могут быть удовлетворены для заданных $B_t = C$ и Q , например, для $n = 6$, полного графа \mathcal{G}_C , $c^{ij} = 1$, $i \neq j$, $c^{ii} = 0$, и $Q < 5$.

Одно из возможных решений — использование рандомизированной топологии, когда случайно исключаются $5 - Q$ дуг. При $Q = 1$ такая стратегия аналогична схеме, используемой в алгоритмах типа *сплетен* (*gossip algorithms*) [Boyd 2006]

Определение

Случайный подграф \mathcal{G}_{B_t} удовлетворяет стоимостным ограничениям с уровнем Q , если

$$\mathbb{E} \deg_{\max}^+(B_t) \leq Q \quad (3)$$

Постановка задачи

Обозначим Ξ множество, $\{f_{\xi}^i(\theta)\}_{\xi \in \Xi}$ семейство дифференцируемых функций: $\forall i \in \mathcal{N} f_{\xi}^i(\theta) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Предполагается, что параметр θ не может быть измерен непосредственно. Поэтому задается последовательность точек измерения $x_1^i, x_2^i, \dots, i \in \mathcal{N}$ выбираемых согласно плану наблюдения. Значения y_1^i, y_2^i, \dots функций $f_{\xi_t}^i(\cdot)$ получаются в моменты времени $t = 1, 2, \dots$ с аддитивной внешней неизвестной ограниченной помехой v_t^i

$$y_t^i = f_{\xi_t}^i(x_t^i) + v_t^i, \quad (4)$$

где $\{\xi_t\}$, $\xi_t \in \Xi$ — неконтролируемая (напр., $\Xi = \mathbb{N}$ и $\xi_t = t$) или случайная последовательность. В последнем случае предполагается, что существует вероятностное распределение ξ_t , которое может быть известным или неизвестным

Постановка задачи

Пусть \mathcal{F}_{t-1} — σ -алгебра всех случайных событий, произошедших до момента времени t , $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t-1}}$ обозначает условное математическое ожидание относительно σ -алгебры \mathcal{F}_{t-1} . Рассмотрим задачу оптимизации, в которой функция стоимости $\bar{F}_t(\theta)$ выражается в виде суммы локальных функций $F_t^i(\theta) = \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t-1}} f_{\xi_t}^i(\theta)$ каждая из которых зависит от общей оптимизационной переменной θ . Кроме того, точка минимума θ функции $\bar{F}_t(\theta)$ может меняться со временем.

Оптимизация функционала среднего риска: оценить меняющуюся со временем точку минимума θ_t распределенной функции

$$\bar{F}_t(\theta) = \sum_{i \in \mathcal{N}} F_t^i(\theta) = \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t-1}} \sum_{i \in \mathcal{N}} f_{\xi_t}^i(\theta) \rightarrow \min_{\theta}. \quad (5)$$

Коммуникация и помехи

Пусть в момент времени t сенсоры могут общаться с соседями по сети, задаваемой графом $\mathcal{G}_{B_t} = (\mathcal{N}_{B_t}, \mathcal{E}_{B_t})$. Соответствующая матрица смежности B_t удовлетворяет некоторым усредненным стоимостным ограничениям (3) с уровнем Q

Также предполагается, что сенсор i получает текущее измерение $\hat{\theta}_t^i$ с помехой (4) и, если множество $\mathcal{N}_t^i = \{j \in \mathcal{N}_{B_t} : (j, i) \in \mathcal{E}_{B_t}\}$ не пусто, также получает текущие оценки, передаваемые соседями по зашумленным каналам связи

$$\tilde{\theta}_t^{i,j} = \hat{\theta}_t^j + w_t^{i,j}, \quad j \in \mathcal{N}_t^i, \quad (6)$$

где $w_t^{i,j}$ — помеха в канале связи. Если $j \notin \mathcal{N}_t^i$ то $\tilde{\theta}_t^{i,j} = 0$

Алгоритм

Введем Δ_k^i , $k = 1, 2, \dots$, $i \in \mathcal{N}$ — последовательность независимых случайных векторов из \mathbb{R}^d , называемых *одновременным пробным возмущением*, с симметричными функциями распределения $P_k^i(\cdot)$; и множество вектор-функций (ядер) $K_k^i(\cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k = 1, 2, \dots$

Выберем начальное приближение $\hat{\theta}_0^i \in \mathbb{R}^d$, положительный шаг α , коэффициент усиления γ , и последовательности неотрицательных чисел $\{\beta_k^+\}$ и $\{\beta_k^-\}$ такие, что $\beta_k = \beta_k^+ + \beta_k^- > 0$

Рассмотрим алгоритм с двумя измерениями распределенных функций $f_{\xi_t}^i(\theta)$ для каждого агента $i \in \mathcal{N}$, строящий последовательность точек измерения $\{x_t^i\}$ и оценки $\{\hat{\theta}_t^i\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2k}^i = \hat{\theta}_{2k-2}^i + \beta_k^+ \Delta_k^i, \quad x_{2k-1}^i = \hat{\theta}_{2k-2}^i - \beta_k^- \Delta_k^i, \\ \hat{\theta}_{2k-1}^i = \hat{\theta}_{2k-2}^i, \\ \hat{\theta}_{2k}^i = \hat{\theta}_{2k-1}^i - \alpha \left(\frac{y_{2k}^i - y_{2k-1}^i}{\beta_k} K_k^i(\Delta_k^i) + \right. \\ \left. \gamma \sum_{j \in \mathcal{N}_{2k-1}^i} b_{2k-1}^{i,j} (\tilde{\theta}_{2k-1}^{i,j} - \hat{\theta}_{2k-1}^i) \right) \end{array} \right. \quad (7)$$

Алгоритм

Обозначим $\bar{\theta}_t = \text{col}(\hat{\theta}_t^1, \dots, \hat{\theta}_t^n)$ — обобщенный вектор оценок всех сенсоров в момент времени t и $\tilde{\theta}_t = \text{col}(\tilde{\theta}_t^{1,1}, \tilde{\theta}_t^{2,1}, \dots, \tilde{\theta}_t^{n,1}, \tilde{\theta}_t^{1,2}, \dots, \tilde{\theta}_t^{n,n})$ — соответствующий вектор данных, передаваемых по зашумленным каналам связи. Обозначим: $\bar{y}_t = \text{diag}_n(\text{col}(y_t^1, \dots, y_t^n))$, $\bar{\Delta}_k = \text{col}(K_k^1(\Delta_k^1), \dots, K_k^n(\Delta_k^n))$
Алгоритм (7) можно переписать в новых обозначениях:

$$\bar{\theta}_{2k} = \bar{\theta}_{2k-1} - \alpha \left[\left(\frac{\bar{y}_{2k} - \bar{y}_{2k-1}}{\beta_k} \otimes I_d \right) \bar{\Delta}_k + \gamma \left(\bar{\mathcal{L}}_{2k-1} \otimes I_d \right) \tilde{\theta}_{2k-1} \right] \quad (8)$$

где $(n \times n^2)$ -матрица $\bar{\mathcal{L}}_{2k-1}$ задается таким образом, что ее i -й ряд состоит из нулей, за исключением элементов с $(j-1)n+1$ по jn , совпадающих с i -м рядом $\mathcal{L}(B_{2k-1})$

Основной результат

Основные предположения

2: Градиент $\nabla f_{\xi}^i(x)$ удовлетворяет условию Липшица $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$

$$\|\nabla f_{\xi}^i(x_1) - \nabla f_{\xi}^i(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$$

б: Последовательные разности $\tilde{v}_k^i = v_{2k}^i - v_{2k-1}^i$ помех наблюдения ограничены $|\tilde{v}_k^i| \leq c_v < \infty$, or $\mathbb{E}(\tilde{v}_k^i)^2 \leq c_v^2$ если посл-ть $\{\tilde{v}_k^i\}$ случайная

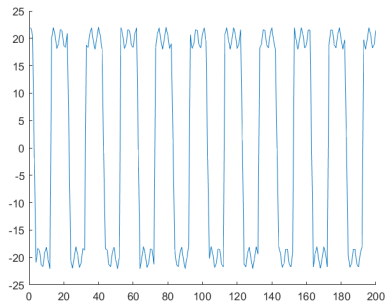
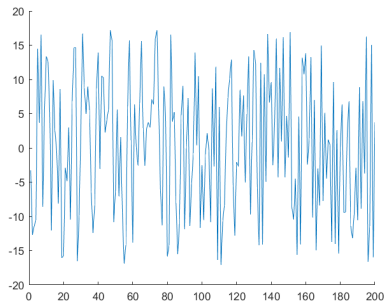
7: Помехи в канале связи $w_t^{i,j}$ случайные, независимые, одинаково распределенные $\mathbb{E}w_t^{i,j} = 0$, $\mathbb{E}\|w_t^{i,j}\|^2 \leq \sigma_w^2$. Все случайные векторы и переменные $w_t^{i,j}$, $b_t^{i,j}$, ξ_t , and ξ_{t+1} взаимно независимы (если они случайные)

Теорема

Последовательность оценок $\{\bar{\theta}_{2k}^i\}$ имеет асимптотически эффективную верхнюю границу $\bar{L} > 0$ невязки оценок Если $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k}$ такое что $\forall k > \bar{k}: \sqrt{E\|\bar{\theta}_{2k}^i - 1_n \otimes \theta_{2k}\|^2} \leq \bar{L} + \varepsilon$.

Моделирование: помехи

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0.5$$



```

$$v_t = (\text{rand}() - 0.5) * \text{rand}() * 40$$

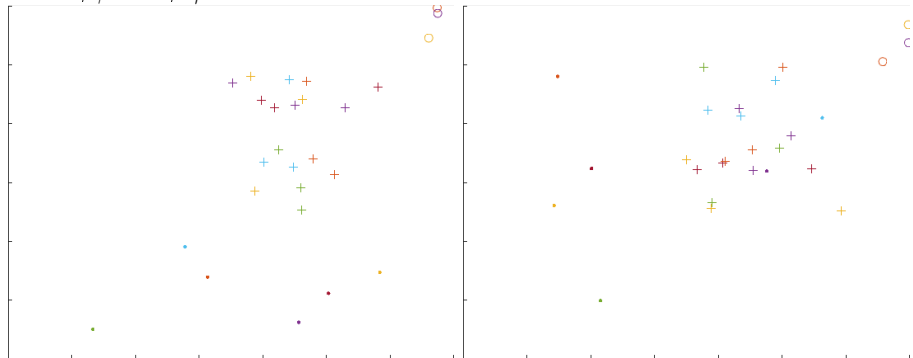
$$v_t = 2 * \sin(t * \text{rand}() * 10) +$$

$$20 * \text{sign}(10 - \text{mod}(t + \text{randi}(10), 2*10))$$

```

Моделирование

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0.5$$



Позиции сенсоров — o, Позиции целей — ·, Оценки позиций целей — +

Моделирование

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0.5$$

Позиции сенсоров — o, Позиции целей — ·, Оценки позиций целей — +

Все известные эффективные квантовые алгоритмы выполняются по следующей схеме:

- сначала подготавливается «суперпозиция» входов
- потом происходит обработка входов и
- измерение результата

Выполнение алгоритма SPSA на квантовом компьютере

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}} \sum_{\Delta_i \in \{-1, +1\}^d} |\hat{\mathbf{x}} + \beta \Delta_i\rangle = H_\beta |\hat{\mathbf{x}}\rangle$$

$$U_f |\mathbf{u}\rangle |0\rangle = \frac{1}{2^d} \sum_{\Delta_i \in \{-1, +1\}^d} |\hat{\mathbf{x}} + \beta \Delta_i\rangle |f(\hat{\mathbf{x}} + \beta \Delta_i)\rangle$$

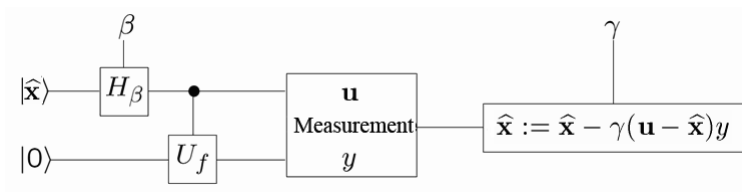


Рис.: Квантовая цепь для вычисления градиента «на лету».

Simultaneous perturbation stochastic approximation-based consensus for tracking under unknown-but-bounded disturbances // IEEE Trans. Autom. Contr., 66(8), 2021, 3710–3717

Simultaneous perturbation stochastic approximation for few-shot learning // Proc. of the 2020 Eur. Contr. Conf., May 12–15, 2020, SPb., Russia, 350–355

Towards optimal distributed node scheduling in a multihop wireless network through Local Voting // IEEE Trans. Wirel. Comm., 2018, 17(1), 400–414

2021–2023 — РФФ 21-19-00516 «Мультиагентное адаптивное управление в сетевых динамических системах с применением к группам робототехнических устройств в условиях неопределенностей»

2020–2022 — РФФИ 20-01-00619 «Рандомизированные алгоритмы многоагентной оптимизации, распознавания образов и оценивания в условиях существенных неопределенностей»

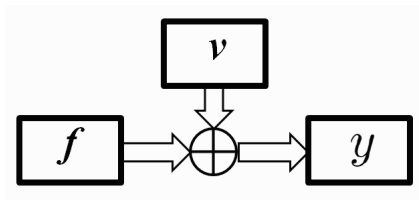
Патент «**Аэродинамическое крыло летательного аппарата с адаптивно изменяющейся поверхностью**» №2660191, зарегистрирован в гос. реестре изобретений РФ 05.07.2018, заявка №2016147133 от 30.11.2016

Свид-во о гос. рег. прог. для ЭВМ №2016612673 от 3.03.2016 «**Программный комплекс мультиагентной системы управления распределенными гетерогенными вычислительными ресурсами для адаптивной балансировки загрузки устройств в реальном времени**» (MAGS)

Спасибо за внимание!

Наблюдения с помехами

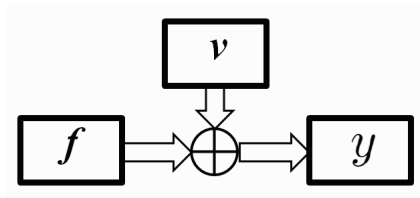
Если сигнал f регистрируется с помехой v , тогда «мгновенные» наблюдения y :



$$y = f + v$$

Наблюдения с помехами

Если сигнал f регистрируется с помехой v , тогда «мгновенные» наблюдения y :

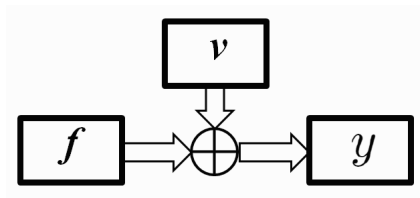


$$y = f + v$$

Помехи отсутствуют: $f = y, v = 0$

Наблюдения с помехами

Если сигнал f регистрируется с помехой v , тогда «мгновенные» наблюдения y :



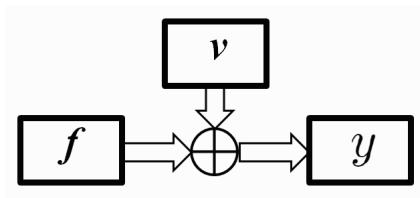
$$y = f + v$$

Помехи отсутствуют: $f = y, v = 0$

Помехи малы: $f \approx y, v \approx 0$

Наблюдения с помехами

Если сигнал f регистрируется с помехой v , тогда «мгновенные» наблюдения y :



$$y = f + v$$

Помехи отсутствуют: $f = y, v = 0$

Помехи малы: $f \approx y, v \approx 0$

Помехи уменьшаются со временем: $v \rightarrow 0$

Наблюдения с помехами

$$y = f + v$$

Помехи отсутствуют: $f = y, v = 0$

Помехи малы: $f \approx y, v \approx 0$

Помехи уменьшаются со временем: $v \rightarrow 0$

Помехи случайные

Наблюдения с помехами

$$y = f + v$$

Помехи отсутствуют: $f = y, v = 0$

Помехи малы: $f \approx y, v \approx 0$

Помехи уменьшаются со временем: $v \rightarrow 0$

Помехи случайные. Усреднение данных

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y(t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(t) + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T v(t)$$

Наблюдения с помехами

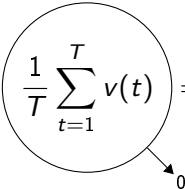
$$y = f + v$$

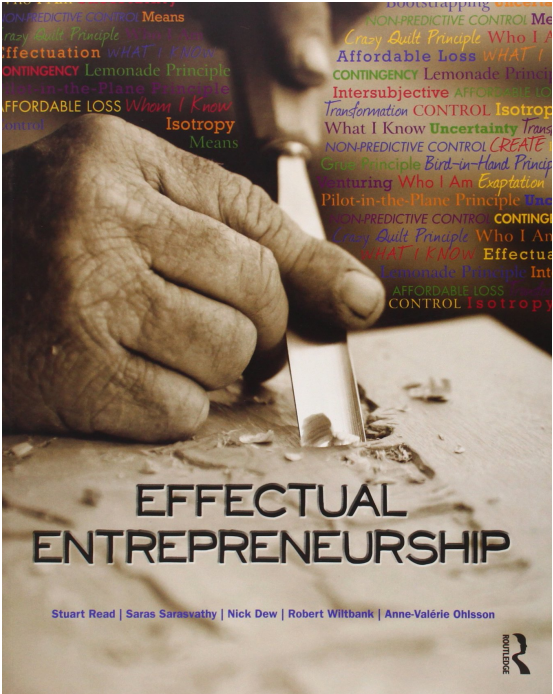
Помехи отсутствуют: $f = y, v = 0$

Помехи малы: $f \approx y, v \approx 0$

Помехи уменьшаются со временем: $v \rightarrow 0$

Помехи независимые одинаково распределенные с нулевым средним и ограниченной дисперсией

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y(t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(t) + \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T v(t) \right) \Rightarrow \bar{f}(t) \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y(t)$$




EFFECTUAL ENTREPRENEURSHIP

Stuart Read | Saras Sarasvathy | Nick Dew | Robert Wiltbank | Anne-Va erie Ohlsson



Три урны

Одинаковое
количество белых и
черных шаров



Предсказание

Три урны

Одинаковое
количество белых и
черных шаров



Предсказание

Черные и белые
шары в некоторой
пропорции



Риск

Три урны

Одинаковое
количество белых и
черных шаров



Предсказание

Черные и белые
шары в некоторой
пропорции



Риск

Unknowable

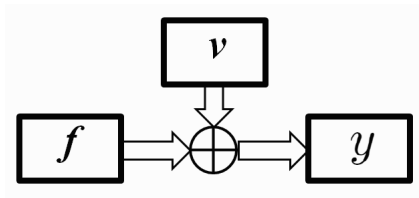


Неопределенность

Произвольные внешние помехи

Если сигнал f регистрируется с помехой v , тогда «мгновенные» наблюдения y :

$$y = f + v$$



- $v = 0$
- $v \approx 0$
- $v_t \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.
- $v_t, t = 1, \dots, T$, — i.i.d., $Ev_t = 0$ и $\sigma_v^2 < \infty$
- v_t — произвольные внешние помехи

Схема задачи

Модель наблюдений можно переписать в виде:

$$y_t = u_t \theta^* + v_t.$$

Можно

- выбирать входы (управления) u_t , $t = 1, 2, \dots, T$,
- измерять выходы y_t

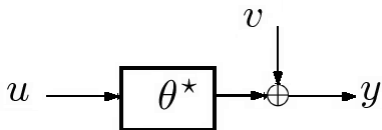


Рис.: Модель наблюдений.

При $u_t \equiv 1$ получаем обычную проблему оценивания неизвестного параметра θ^* по наблюдениям с помехами.

Рандомизированные алгоритмы

Рандомизация — мощное средство для решения целого ряда проблем, которые кажутся нерешаемыми детерминированными методами.

Определение

Рандомизированным называется алгоритм, в котором выполнение пользователем одного или несколько шагов основано на случайном правиле (т. е. среди многих детерминированных правил одно выбирается пользователем случайно в соответствии с вероятностью P).

«Обогащение» наблюдений

Рассмотрим рандомизированное правило выбора входа на первом шаге

$$u_t = \begin{cases} +1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \end{cases}$$

т. е. на первом шаге случайно выбирается один из 2^7 возможных наборов входов (управлений). На втором шаге по известным парам значений (u_t, y_t) формируем величины

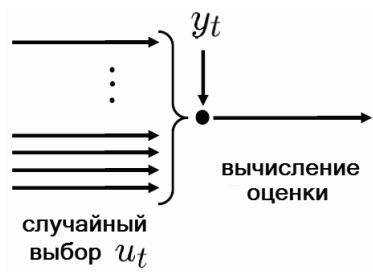
$$\tilde{y}_t = u_t \cdot y_t.$$

Для «новой» последовательности наблюдений справедлива модель

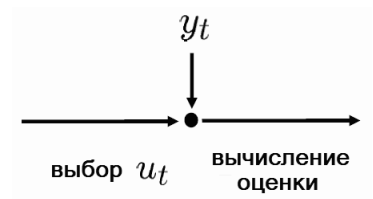
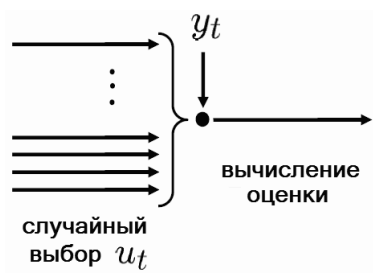
$$\tilde{y}_t = \tilde{u}_t \cdot \theta^* + \tilde{v}_t,$$

в которой $\tilde{u}_t = u_t^2 \equiv 1$ и $\tilde{v}_t = u_t \cdot v_t$.

Схема рандомизированного алгоритма



Два типа алгоритмов



Результаты моделирования

$$\theta^* = 3, \quad \hat{\theta}_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \tilde{y}_i = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t u_i y_i$$

Таблица

t	1	2	3	4	5	6	7
u_t	-1	1	-1	1	1	1	-1
$v_t = \text{rand}() - 0.5 + m, m = 1$							
y_t	-2.1	3.8	-1.8	4.3	3.6	4.4	-2.3
\tilde{u}_t	1	1	1	1	1	1	1
\tilde{y}_t	2.1	3.8	1.8	4.3	3.6	4.4	2.3
$\hat{\theta}_t$	2.1	2.95	2.57	3.00	3.12	3.33	3.19

$$\forall t, \forall \varepsilon > 0 \quad \text{Prob}\{|\hat{\theta}_t - \theta^*| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{t} \frac{\mathbb{E}\{v_t^2\}}{\varepsilon^2} + o\left(\frac{1}{t}\right).$$

[Granichin, IEEE TAC, 2004]

Неасимптотический результат

Пусть $T = 7$ — конечное число наблюдений, v_t — произвольная внешняя помеха. LSCR метод (M. Campi, EJC, 2010):

- 1 Фиксируем $M = 8$ и $q = 1$. Выберем случайно семь ($= M - 1$) различных наборов по четыре индекса T_1, \dots, T_7 .
- 2 Вычислим семь частичных сумм $\bar{s}_i = \frac{1}{4} \sum_{j \in T_i} \bar{y}_j$, $i = 1, \dots, 7$.
- 3 Сформируем доверительный интервал

$$\hat{\Theta} = [\min_{i \in 1:7} \bar{s}_i; \max_{i \in 1:7} \bar{s}_i],$$

содержащий θ^* с вероятностью $p = 75\%$ ($= 1 - 2 \cdot q/M$).

Рандомизация как способ сокращения вычислительной сложности

Общая идея:

Предположим, что детерминированный алгоритм требует «огромного» набора вычислительных ресурсов для обработки всей доступной информации.

Тогда можно попробовать взять только часть информации и получить решение упрощенной задачи с частичной информацией.

В этом случае, однако, качества решения как у детерминированного алгоритма можно и не достичь, но рандомизированный подход позволят говорить о *вероятностно-успешных алгоритмах*, если удастся получить решение с высокой вероятностью. Компромисс между гарантированным успехом и вычислительными возможностями получить разумный ответ за ограниченное время.

Рандомизация ...

1928-30 ...

- von Neumann (minimax theorem), Fisher (remove bias)

1950 ... 1975

- Metropolis, Ulam (method Monte-Carlo)
- Rastrigin, Kirkpatrick, Holland (random search, simulation annealing, genetic algorithm)

1980 ... 1999

- Granichin, Fomin, Chen, Guo (randomized control strategies)
- Polyak, Thzubakov, Luing, Guffi, Spall (fast algorithms)
- Granichin (arbitrary noise)
- Vadyasagar (randomized learning theory)

2000 ...

- Tempo, Campi, Calafiore, Dabbene, Polyak, Sherbakov *etc.*
(probabilistic methods in a control syntheses, scenario approach)
- Candes, Donoho, Romberg, Tao (compressive sensing)

Замечательные свойства

- Существенное сокращение числа операций
- Снижение негативного влияния систематических ошибок
- Точность обычно не существенно зависит от размерности данных