

ОТ НАСТРОЙКИ ВЕСОВ ПЕРСЕПТРОНА К МИНИМАКСНОМУ АДАПТИВНОМУ УПРАВЛЕНИЮ*

В. А. Бондарко
vbondarko@gmail.com

12 октября 2023 г.

Аннотация

Это сообщение продолжает сделанные ранее доклады [1, 2], в которых был описан алгоритм ЯВА. Алгоритм ЯВА позволяет найти гиперплоскость, разделяющую два конечных множества точек, если таковая вообще существует. В предлагаемом докладе речь идет о таком развитии родственных ЯВА алгоритмов, которое позволяет решать многие задачи адаптивного управления. Под адаптивным управлением понимается задача синтеза регулятора типа обратной связи в условиях неопределенности относительно параметров объекта управления и действующих на него возмущений.

1°. Настройка персептрона алгоритмом ЯВА. Вспомним для начала, о чем шла речь в докладе [1]. В нем описан предложенный в 1965 году В.А.Якубовичем [3] алгоритм настройки весов персептрона Розенблатта [4]. Постановка этой задачи следующая: в \mathbb{R}^n имеются два множества точек (два *класса*)

$$P = \{p_j\}_{j=1}^{m_1} \text{ и } Q = \{q_j\}_{j=1}^{m_2}.$$

Требуется строго разделить их гиперплоскостью, т.е. отыскать такой вектор $\omega \in \mathbb{R}^n$ и скаляр β , что

$$\begin{aligned} \langle \omega, p_j \rangle + \beta &> 0 \quad \forall j \in [1, m_1], \\ \langle \omega, q_j \rangle + \beta &< 0 \quad \forall j \in [1, m_2]. \end{aligned} \tag{1}$$

Весами персептрона называют набор из компонент ω и величины β . Угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают скалярное произведение.

После некоторых довольно очевидных переобозначений [1], заикливания неравенств (1) в бесконечную последовательность и перехода в

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» <http://oml.cmlaboratory.com/>

двойственное пространство задача принимает следующий вид: по известным последовательностям $\{y_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ требуется найти такой вектор $\tau = \begin{bmatrix} \omega \\ \beta \end{bmatrix}$, для которого неравенства

$$y_{k+1} - \langle \tau, \varphi_k \rangle < C \quad (2)$$

выполнены при всех достаточно больших k . При настройке весов персептрона $y_k \equiv 0$, но для последующего изложения удобно рассмотреть чуть более общий случай.

В терминологии теории распознавания образов обучение персептрона с учителем, т.е. по известным представителям классов P и Q , заключается в решении системы неравенств (2), эквивалентных исходным неравенствам (1). После обучения персептрон классифицирует предъявляемые ему точки $x_i \in \mathbb{R}^n$ в соответствии со знаком величины $\langle \omega, x_i \rangle + \beta$.

Задача настройки весов близка к задаче математической диагностики, как она поставлена в прочитанном на этом семинаре докладе [5]. Различие состоит в том, что для настройки требуется априорная разрешимость системы неравенств (1), а алгоритм диагностики должен ответить на вопрос о разрешимости этой системы. Предложенный В.А.Якубовичем алгоритм настройки, который получил название ЯВА в честь его разработчика, способен [1] дать ответ и на этот вопрос. Для решения некоторых задач адаптивного управления критерий разрешимости также существует, но пока что оставим его в стороне ради прозрачности изложения.

Итак, вот алгоритм ЯВА: фиксируется стартовое значение τ_0 , а затем

$$\tau_k = \begin{cases} \tau_{k-1}, & \text{если } \eta_k \leq C, \\ \tau_{k-1} + \mu_k(\eta_k - \rho C)|\varphi_{k-1}|^{-2}\varphi_{k-1}, & \text{если } \eta_k > C \end{cases} \quad (3)$$

при $k = 1, 2, \dots$. Здесь $\eta_k = y_k - \tau'_{k-1}\varphi_{k-1}$, ρ и μ_k — параметры алгоритма, значения μ_k выбираются произвольно из $[1/2, 1]$, а ρ постоянно и принадлежит интервалу $(0, 1)$. Этот параметр характеризует тот минимальный запас, с которым должны быть разрешимы неравенства (1), (2) — должен существовать такой вектор τ_* , что $y_k - \tau'_{k-1}\varphi_{k-1} < \rho C \forall k$.

Схема работы алгоритма такова: увеличивая k (номер шага алгоритма), мы автоматически переходим к следующим членам последовательностей y_k и φ_k : в первый момент с константой C сравнивается значение $\eta_1 = y_1 - \langle \tau_0, \varphi_0 \rangle$, затем с полученным значением τ_1 (которое может, в частности, и не отличаться от τ_0) мы проверяем $\eta_2 = y_2 - \langle \tau_1, \varphi_1 \rangle$, и т.д. В сообщении [1] было показано: если классы P и Q разделимы, то алгоритм (3) порождает последовательность векторов τ_k , которая за конечное число шагов N после M коррекций сходится к решению неравенств (1), (2). Для величин N и M в [1] приведены явные оценки.

Последующие разделы настоящего сообщения описывают, как родственные ЯВА алгоритмы позволяют решать различные задачи адаптивного управления, и что это вообще такое.

2°. Постановка задачи об адаптивном управлении. Воспользуемся обозначениями вида $z(\cdot)$ для *сигналов*, т.е. функций времени, которое принимает дискретные и/или непрерывные неотрицательные значения. *Динамическими системами* \mathcal{D} будем называть *неупреждающие* операторы из заданного множества входных сигналов $E = \{e(\cdot)\}$ в множество выходных сигналов $S = \{s(\cdot)\}$. Неупреждаемость оператора означает, что для любого временного момента T совпадение входов $e_1(t) \equiv e_2(t) \forall t \leq T$ влечет и совпадение выходов $s_1(t) \equiv s_2(t) \forall t \leq T$, где $s_{1,2}(\cdot) = \mathcal{D}(e_{1,2}(\cdot))$.

Начнем с классической задачи синтеза управления типа обратной связи. Рассмотрим динамическую систему (объект управления) \mathcal{P} с *наблюдаемым выходом* $y(\cdot)$, на вход которой поступает *управляющее воздействие* $u(\cdot)$ и *возмущающее воздействие* $v(\cdot)$ из известного (фиксированного) класса V . Выделим в множестве троек $\{v_\xi(\cdot), u(\cdot), y(\cdot)\}$, называемых *процессами* объекта управления, подмножество Γ . Про его элементы будем говорить, что они удовлетворяют *цели управления*. В частности, цель управления может заключаться в минимизации какого-нибудь заданного на процессах функционала качества.

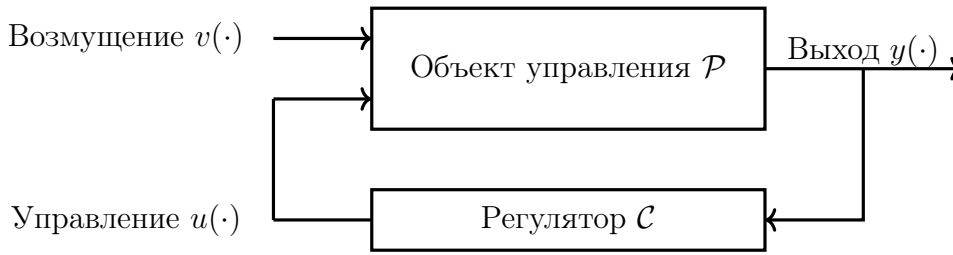


Рис. 1. Система управления с обратной связью.

Задача синтеза обратной связи состоит в нахождении такой динамической системы (*регулятора*) \mathcal{C} со входом $y(\cdot)$ и выходом $u(\cdot)$, что все процессы задаваемой системой уравнений

$$\begin{cases} y(\cdot) = \mathcal{P}(v(\cdot), u(\cdot)), \\ u(\cdot) = \mathcal{C}(y(\cdot)) \end{cases} \quad (4)$$

совокупной динамической системы удовлетворяют цели управления.

Уравнениям (4) соответствует блок-схема на рис. 1.

Рассмотрим в качестве примера объекты управления, задаваемые разностными уравнениями

$$\alpha(\nabla)y_k = \beta(\nabla)u_{k-l} + v_{k+n}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где $\nabla y_k = y_{k+1}$, $\nabla^m y_k = y_{k+m}$, k — дискретное время, l — неотрицательное запаздывание,

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n, \\ \beta(\lambda) &= \beta_1 \lambda^{n-1} + \beta_2 \lambda^{n-2} + \dots + \beta_n, \quad \beta_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что все корни многочлена $\beta(\lambda)$ лежат внутри единичного круга. Такие объекты принято называть минимально-фазовыми (в англоязычной терминологии — stable invertible). В развернутой форме уравнение (5) принимает вид

$$\begin{aligned} y_{k+n} + \alpha_1 y_{k+n-1} + \alpha_2 y_{k+n-2} + \dots + \alpha_n y_k = \\ = \beta_1 u_{k+n-l-1} + \beta_2 u_{k+n-l-2} + \dots + \beta_n u_{k-l} + v_{k+n}. \end{aligned}$$

Пусть класс возмущений $V = \{v(\cdot)\}$ задается неравенством

$$|v_k| \leq C \forall k, \quad (6)$$

а в остальных значения v_k произвольны. В качестве цели управления рассмотрим минимизацию функционала качества управления

$$J = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup_V |y_k|.$$

При сделанных предположениях задача синтеза имеет [6] следующее решение: нужно определить многочлены $\delta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ как частное и остаток при делении многочлена λ^{n+l} на $\alpha(\lambda)$, т.е.

$$\lambda^{n+l} = \delta(\lambda)\alpha(\lambda) + \gamma(\lambda), \quad (7)$$

причем степень $\gamma(\lambda)$ должна быть меньше n , тогда

$$\begin{aligned} y_{k+n+l} = \nabla^{n+l} y_k = [\delta(\nabla)\alpha(\nabla) + \gamma(\nabla)] y_k = \delta(\nabla)\alpha(\nabla)y_k + \gamma(\nabla)y_k = \\ = \delta(\nabla) [\beta(\nabla)u_{k-l} + v_{k+n}] + \gamma(\nabla)y_k = \\ = \{\delta(\nabla)\beta(\nabla)u_{k-l} + \gamma(\nabla)y_k\} + \delta(\nabla)v_{k+n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решением поставленной задачи служит регулятор, уравнение которого заключается в приравнивании нулю содержимого фигурной скобки в правой части (8). Если ввести обозначения

$$\varphi_k = [u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-l-n+1}, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n+1}]' \quad (9)$$

и τ_* для вектора из коэффициентов многочленов $\delta(\lambda)\beta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$, то уравнение (8) можно переписать как

$$y_{k+l+1} = \tau_*' \varphi_k + \delta(\nabla)v_{k+1}, \quad (10)$$

а уравнение оптимального регулятора — как

$$\tau_*' \varphi_k = 0. \quad (11)$$

Это действительно **регулятор**, т.е. неупреждающий оператор из множества наблюдаемых выходов y_k в множество управляющих воздействий u_k , поскольку первая компонента вектора τ_* равна старшему коэффициенту многочлена $\beta(\lambda)$, который по условию отличен от нуля. И это

действительно **оптимальный** регулятор: из (6),(10) следует, что регулятор (11) обеспечивает неравенство

$$|y_{k+l}| \leq |\delta(\nabla)v_k| \leq \bar{J} \forall k, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{J} &:= \inf J = \|\delta(\lambda)\| C, \\ \|\delta(\lambda)\| &:= \left(\sum_{j=0}^l |\delta_j| \right) C, \quad \delta_0 = 1 \end{aligned}$$

δ_j — коэффициенты многочлена $\delta(\lambda)$, $\delta_0 = 1$, и в то же время для любого регулятора нетрудно представить такое возмущение из класса (6), что $|y_{k+l}| = |\tau'_* \varphi_k| + \bar{J} \geq \bar{J}$.

Поскольку объект управления минимально фазовый, из ограниченности выхода и возмущения следует ограниченность управляющего воздействия.

Приведенный пример может показаться слишком громоздким, но он важен для дальнейшего изложения. Мы показали, что для любого процесса объекта управления (5) вектор τ_* служит решением счетной системы неравенств

$$|y_{k+l+1} - \tau'_* \varphi_k| \leq M, \quad (13)$$

если

$$M \geq \bar{J}. \quad (14)$$

Важно, что нас устраивает любое решение неравенств (13): если они справедливы при всех достаточно больших k , то задаваемый уравнением $\tau'_* \varphi_k = 0$ обеспечивает достижение цели управления $J \leq M$. Таким образом, задача управления объектом (5) с неизвестными параметрами оказалась сведена к решению счетной системы *целевых неравенств* (13).

Алгоритмы решения различных целевых неравенств описаны в последующих разделах, а оставшаяся часть данного раздела посвящена формальному определению [6, 7] адаптивной системы (адаптивного регулятора).

Итак, пусть имеется множество Ξ возможных значений параметров ξ , которые индексируют объекты управления \mathcal{P}_ξ и возмущающее воздействие $v_\xi(\cdot)$. Класс Ξ известен, а значение ξ — нет. Регулятор \mathcal{C}_τ зависит от набора своих параметров τ , причем для некоторого $\tau(\xi)$ доставляемое регулятором $\mathcal{C}_{\tau(\xi)}$ управление обеспечивает достижение цели управления. Значение $\tau(\xi)$ неизвестно, но *алгоритм адаптации* \mathcal{A} вырабатывает его оценку $\tau(\cdot)$, используя поступающие на его вход значения управления u и наблюдаемого выхода y . Если по истечении конечного *времени адаптации* значения τ стабилизируются и цель управления достигается, то

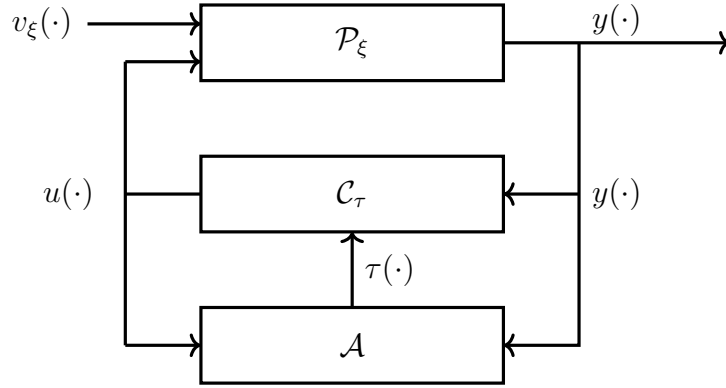


Рис. 2. Блок-схема адаптивной системы управления.

система

$$\begin{cases} y(\cdot) = \mathcal{P}_\xi(v_\xi(\cdot), u(\cdot)), \\ u(\cdot) = \mathcal{C}_{\tau(\cdot)}(y(\cdot)), \\ \tau(\cdot) = \mathcal{A}(y(\cdot), u(\cdot)) \end{cases} \quad (15)$$

называется [6, 7] *адаптивной в классе* Ξ относительно поставленной цели управления.

Структура адаптивной системы изображена на рисунке 2.

В разобранный примере ξ — это набор коэффициентов объекта (5) и все значения неизмеряемого возмущения $\{v_k\}_0^\infty$, класс Ξ составляют минимально фазовые объекты (5) с ограниченным возмущением (6), цель управления — неравенства $\bar{\lim}_k |y_k| \leq M$ и $\sup_k |u_k| < \infty$, регулятор $\mathcal{C}_{\tau(\cdot)}$ задается уравнением $\tau'_k \varphi_k = 0$, а вырабатывающий значения оценок τ_k алгоритм адаптации \mathcal{A} еще предстоит описать.

3°. Базовый алгоритм решения счетных систем рекуррентных целевых неравенств "Полоска 1". Вернемся к задаче настройки весов перцептрона и к алгоритму ЯВА (3), предназначенному для решения системы неравенств, порождаемых этой задачей. Каждое из них в пространстве векторов τ выделяет полупространство:

$$y_{k+1} - \tau' \varphi_k \leq M, \quad k = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Сравним их с целевыми неравенствами (13), т.е.

$$|y_{k+l+1} - \tau' \varphi_k| \leq M, \quad (17)$$

или, что то же самое,

$$y_{k+l+1} - \tau' \varphi_k \leq M, \quad -y_{k+l+1} - \tau'(-\varphi_k) \leq M, \quad k = 0, 1, \dots \quad (18)$$

Таким образом, одно неравенство (17) эквивалентно двум однотипным с (16) неравенствам (18), которые не могут быть нарушены одновременно.

Применительно к таким неравенствам алгоритм ЯВА можно переписать в виде

$$\tau_k = \begin{cases} \tau_{k-1}, & \text{если } |\eta_k| \leq M, \\ \tau_{k-1} + \mu_k(\eta_k - \rho M \operatorname{sign} \eta_k) |\varphi_{k-l-1}|^{-2} \varphi_{k-l-1}, & \text{если } |\eta_k| > M. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь $\eta_k = y_k - \tau'_{k-1} \varphi_{k-l-1}$, ρ и μ_k — параметры алгоритма, значения μ_k выбираются произвольно из промежутка $[1/2, 1]$, а ρ постоянно и принадлежит интервалу $(0, 1)$.

ТЕОРЕМА 1. *Если существует такой вектор τ_* , что*

$$|y_k - \tau'_* \varphi_{k-1}| < \rho M \quad \forall k, \quad (20)$$

то

$$\tau_k - \tau_{k-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (21)$$

$$|\eta_k| \leq M + \varepsilon_k |\varphi_{k-1}|, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Если же выполнено дополнительное условие

$$\sup |\varphi_k| < \infty, \quad (23)$$

то $\tau_k = \tau_{k-1}$ и $|\eta_k| \leq M$ при всех достаточно больших k , то есть (19) — конечно-сходящийся алгоритм решения бесконечной системы неравенств $|\eta_k| \leq M$.

Алгоритм (19) получил название "Полоска", точнее, "Полоска 1". Название связано с тем, что он предназначен для решения неравенств (17), каждое из которых выделяет в пространстве векторов τ промежуток между двумя гиперплоскостями, т.е. полосе.

Стоит, видимо, пояснить, зачем для описания свойств алгоритма "Полоска" потребовалась отдельная теорема, хотя он заключается в двукратном применении алгоритма ЯВА, сходимость которого обоснована в сообщении [1]. Причина в том, что эти алгоритмы предназначены для решения принципиально разных систем неравенств. "Перцептронная" система (16) получена заикливанием конечного обучающего набора неравенств, поэтому для нее автоматически выполнено дополнительное условие (23), в то время как целевые неравенства (17) даже не определены заранее. Действительно, они зависят от векторов φ_k , компонентами которых служат величины u_k и y_k . Значения управляющего воздействия u_k вычисляются из уравнения регулятора $\tau'_k \varphi_k = 0$, в котором вектор τ_k определяется алгоритмом адаптации. Наблюдаемый выход y_k , в свою очередь, зависит как от управления, так и от возмущения. В итоге ситуация выглядит парадоксально: решаемая система сама зависит от алгоритма ее решения. Системы такого рода В.А.Якубович назвал рекуррентными.

Заметим еще, что дополнительное условие (23) по смыслу близко к цели управления $\overline{\lim}_k |y_k| \leq M$, и его проверка совсем не банальна. В первых работах по описываемой теории адаптивного управления его предлагалось обеспечивать с помощью так называемых игр. Предполагалось,

что в систему управления входит некий надсмотрщик, который имеет возможность остановить процесс в случае слишком большого значения $|\varphi_k|$ и запустить его заново, стартуя с нулевых или малых начальных условий. Если со временем остановки прекращались и цель управления достигалась, то система считалась адаптивной. Иллюстративным примером служил процесс обучения робота езде на велосипеде. Какое-то конечное время обучаемый падал, его поднимали и отправляли ехать дальше. Такая постановка задачи выглядела ограниченной, поскольку перенести ее на обучение, например, автопилота было бы слишком смело. Неожиданно оказалось, что никакие принудительные остановки просто не нужны, и проекционные алгоритмы типа (19) во многих случаях прекрасно сами справляются с ситуацией. Для обоснования этого факта и потребовались дополнительные утверждения (21) и (22).

Доказательство теоремы 1. Обозначим $V(\tau) = |\tau - \tau_*|^2$, $d_k = V(\tau_{k-1}) - V(\tau_k)$, $\Delta_k = \mu_k(\eta_k - \rho C_k \text{sign } \eta_k) |\varphi_{k-l-1}|^{-2} \varphi_{k-l-1}$, $\eta_k(\tau) = y_k - \tau' \varphi_{k-l-1}$, тогда $\eta_k = \eta_k(\tau_{k-1})$. Из уравнения алгоритма следует, что

$$|\eta_k| \leq M \Rightarrow d_k = 0. \quad (24)$$

Если же $|\eta_k| > M$, то

$$\begin{aligned} d_k &= V(\tau_{k-1}) - V(\tau_{k-1} + \Delta_k) = \\ &= |\tau_{k-1} - \tau_*|^2 - |\tau_{k-1} + \Delta_k - \tau_*|^2 = -\Delta_k' [2(\tau_{k-1} - \tau_*) + \Delta_k] = \\ &= -|\Delta_k|^2 - 2\Delta_k' \tau_{k-1} + 2\Delta_k' \tau_* = \\ &= -\mu_k^2 \frac{|\eta_k - \rho M \text{sign } \eta_k|^2}{|\varphi_{k-l-1}|^2} - \\ &\quad - 2\mu_k \frac{\eta_k - \rho M \text{sign } \eta_k}{|\varphi_{k-l-1}|^2} [\varphi_{k-l-1}' \tau_{k-1} - y_k + y_k - \varphi_{k-l-1}' \tau_*] = \\ &= 2\mu_k \frac{\eta_k - \rho M \text{sign } \eta_k}{|\varphi_{k-l-1}|^2} [\eta(\tau_{k-1}) - \eta(\tau_*)] - \mu_k^2 \frac{|\eta_k - \rho M \text{sign } \eta_k|^2}{|\varphi_{k-l-1}|^2} > \\ &> 2\mu_k \frac{|\eta_k|^2 - \rho M |\eta_k|}{|\varphi_{k-l-1}|^2} - 2\rho\mu_k M \frac{|\eta_k| - \rho M}{|\varphi_{k-l-1}|^2} - \mu_k^2 \frac{(|\eta_k| - \rho M)^2}{|\varphi_{k-l-1}|^2} = \\ &= \mu_k(2 - \mu_k)(|\eta_k| - \rho M)^2 |\varphi_{k-l-1}|^{-2} \geq \frac{(|\eta_k| - \rho M)^2}{2|\varphi_{k-l-1}|^2}. \end{aligned}$$

Сложим величины d_k при $k = 1, 2, \dots, K$:

$$V(\tau_0) \geq V(\tau_0) - V(\tau_K) = \sum_{k=1}^K d_k \geq \sum_{|\eta_k| > M} \frac{(|\eta_k| - \rho M)^2}{2|\varphi_{k-l-1}|^2}. \quad (25)$$

Таким образом, частные суммы ряда (25) ограничены. Следовательно, его общий член стремится к нулю. Мы получили, что в любой момент выполнено одно из неравенств

$$|\eta_k| \leq M, \quad \frac{|\eta_k| - M}{|\varphi_{k-l-1}|} < \varepsilon_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда сразу следуют неравенства (21) и (22), т.е. первая часть теоремы доказана. Если же выполнено дополнительное условие (23), то каждый ненулевой член ряда (25) от нуля отделен, и их может быть только конечное число. **Теорема доказана.**

4°. Адаптивная система на основе базисного алгоритма. Соберем вместе уже подготовленные уравнения адаптивной системы. Итак,

$$\alpha(\nabla)y_k = \beta(\nabla)u_{k-l} + v_{k+n}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (26)$$

— объект управления. Его коэффициенты и значения возмущения неизвестны. Известно лишь, что старший коэффициент многочлена $\beta(\lambda)$ отличен от нуля, все его корни строго меньше единицы по модулю, и

$$|v_k| \leq C \quad \forall k, \quad (27)$$

а в остальных значения v_k произвольны. Цель управления — минимизация функционала качества

$$J = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup_{\{v_k\}} |y_k|. \quad (28)$$

Регулятор описывается уравнением

$$\tau'_k \varphi_k = 0, \quad (29)$$

где $\varphi_k = [u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-l-n+1}, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n+1}]'$. Алгоритм адаптации — "Полоска 1":

$$\tau_k = \begin{cases} \tau_{k-1}, & \text{если } |\eta_k| \leq M, \\ \tau_{k-1} + \mu_k (\eta_k - \rho M \operatorname{sign} \eta_k) |\varphi_{k-l-1}|^{-2} \varphi_{k-l-1}, & \text{если } |\eta_k| > M. \end{cases} \quad (30)$$

Здесь $\eta_k = y_k - \tau'_{k-1} \varphi_{k-l-1}$, M , ρ и μ_k — параметры алгоритма, значение ρ постоянно и принадлежит интервалу $(0, 1)$, а μ_k выбираются из промежутка $[1/2, 1]$ таким образом, чтобы первая компонента вектора τ_k отличалась от нуля.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$\rho M \geq \bar{J} = \inf J. \quad (31)$$

Тогда регулятор (29) вместе с алгоритмом адаптации (30) обеспечивает неравенства $\overline{\lim}_k |u_k| < \infty$ и $|y_k| \leq M$ (после конечного периода адаптации).

Обоснование теоремы использует устойчивость нулевой динамики (т.е. минимальную фазовость) объектов управления (26): если $y_k \equiv v_k \equiv 0$, то $u_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В теории управления широко применяются однотипные утверждения, называемые теоремами о малом коэффициенте.

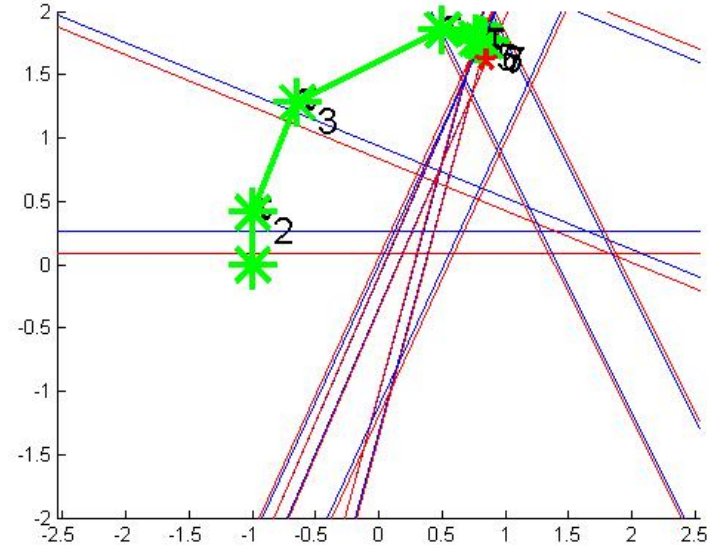


Рис. 3. Эволюция векторов τ_k

В самом общем виде их можно понимать в том смысле, что множество стабилизирующих обратных связей открытое: если этим свойством обладает некоторая обратная связь, то таковы же и все достаточно близкие к ней. В нашем контексте для доказательства теоремы 2 потребовалась бы следующая формулировка: если для процессов минимально фазового объекта (26) при всех достаточно больших k справедливо неравенство

$$|y_k| \leq M + \epsilon |\varphi_{k-l-1}|, \quad (32)$$

и значение ϵ достаточно мало, то $\sup_k |\varphi_k|$ конечен. В нашем случае условие (31) гарантирует усиленную разрешимость неравенств $|y_k - \tau' \varphi_{k-l-1}| < M$, т.е. условия (20) теоремы 1. По этой теореме

$$|y_k - \tau'_{k-1} \varphi_{k-l-1}| < M + \epsilon_k |\varphi_{k-l-1}|, \quad \epsilon_k \rightarrow 0, \quad \epsilon_k := \tau_{k-1} - \tau_{k-1-l} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

а $\tau'_{k-l-1} \varphi_{k-l-1} = 0$ по выбору управления. Следовательно,

$$\begin{aligned} |y_k| &= |y_k - \tau'_{k-1} \varphi_{k-l-1} + \tau'_{k-1} \varphi_{k-l-1}| \leq |y_k - \tau'_{k-1} \varphi_{k-l-1}| + |\tau'_{k-1} \varphi_{k-l-1}| = \\ &= |y_k - \tau'_{k-1} \varphi_{k-l-1}| + |(\tau_{k-1} - \tau_{k-1-l})' \varphi_{k-l-1}| \leq M + \epsilon_k |\varphi_{k-l-1}| + \epsilon_k |\varphi_{k-l-1}|. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\epsilon > 0$ неравенство (32) выполнено при всех достаточно больших k . Отсюда по упомянутой теореме о малом коэффициенте следует ограниченность векторов φ_k , т.е. выполнено дополнительное условие теоремы 1. Вновь применяя эту теорему, при достаточно больших k получаем $\tau_k = const$ и $|y_k| \leq M$, что и требовалось.

Иллюстрация к теореме — численное моделирование работы построенного адаптивного регулятора. Чтобы подчеркнуть, что набор решаемых неравенств не предопределен заранее, приводятся два процесса,

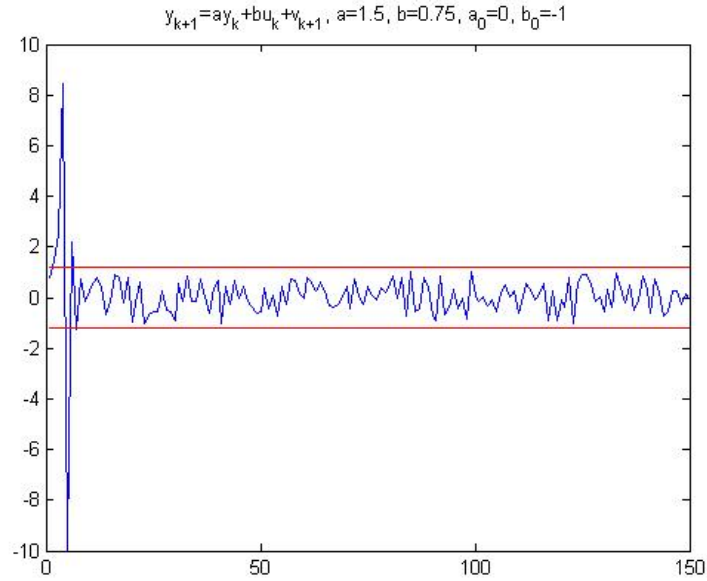


Рис. 4. Наблюдаемый выход адаптивной системы

стартующие с разных начальных значений вектора τ_k : $\tau_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\tau_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Результаты моделирования представлены на рисунках 3, 4 и 5, 6. На рисунках 3, 5 зеленая ломаная линия изображает эволюцию вектора τ_k , а красные и синие линии — границы полосок. Красная звездочка изображает вектор τ_* , т.е. соответствует истинным значениям параметров. Видно, что предельное значение τ_k не совпадает с τ_* , но это и не требуется.

На рисунках 4, 6 изображен наблюдаемый выход системы и границы, в которых он должен находиться после окончания переходного периода. Этот период заканчивается уже на седьмом и пятом шаге соответственно.

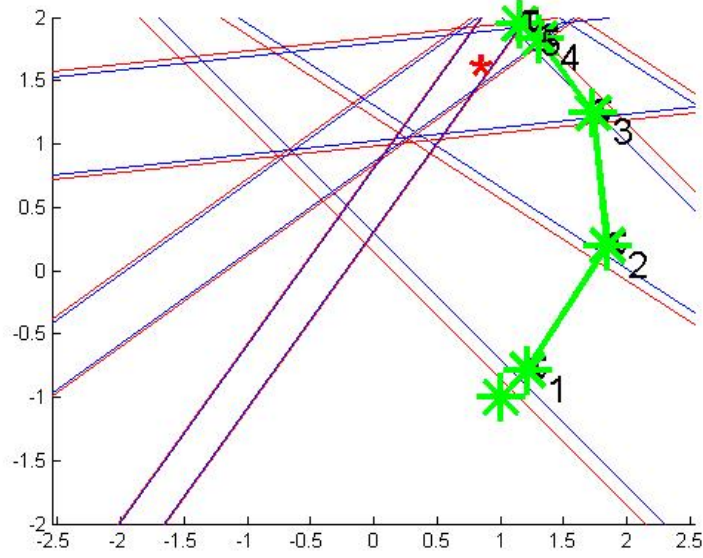


Рис. 5. Эволюция векторов τ_k

5°. Модификации базовых алгоритмов.

Подбор правой части неравенств.

В формулировке теоремы 2 присутствует условие

$$\rho M \geq \bar{J} = \inf J.$$

Если пренебречь множителем ρ , который можно выбирать сколь угодно близко к единице, то это условие означает просто достижимость поставленной цели управления, ибо обеспечить неравенство $\overline{\lim}_k |y_k| \leq M$ при $M < \bar{J}$ невозможно. Все-таки это условие может оказаться ограничительным, поскольку $\bar{J} = \|\delta(\lambda)\|C$, многочлен $\delta(\lambda)$ определяется по неизвестному многочлену $\alpha(\lambda)$, да и C — это амплитуда неизмеряемого возмущения. В результате выбранное значение M может оказаться завышенным, т.е. качество адаптивного управления окажется далеким от оптимального. Чтобы обеспечить заданное качество, будем считать известным значение \bar{R} — сколь угодно грубую оценку $|\tau_*|$ сверху. Фиксируем $\epsilon > 0$ и запустим алгоритм при $M = \epsilon$. Имеются две возможности: все частные суммы ряда (21) либо удовлетворяют неравенству

$$\sum_{|\eta_k| > M} \frac{(|\eta_k| - \rho M)^2}{2|\varphi_{k-l-1}|^2} \leq |\tau_0 + \bar{R}|^2 \quad (33)$$

либо нет. В первом случае алгоритм сойдется и $M = \epsilon \leq \epsilon + \bar{J}$, во втором при первом нарушении неравенства (33) следует положить $\tau_k = \tau_0$, увеличить значение M на ϵ и продолжить работу системы. Ясно, что рано или поздно неравенство (33) будет гарантировано, и цель управления будет выполнена при $M \leq \epsilon + \bar{J}$.

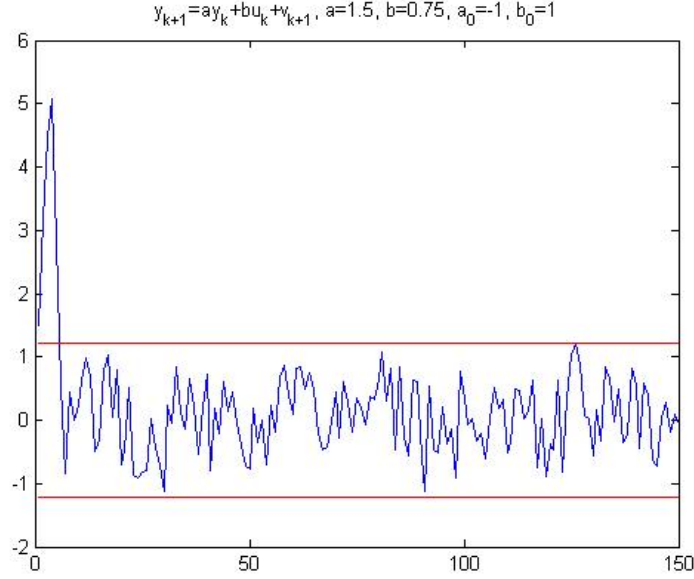


Рис. 6. Наблюдаемый выход адаптивной системы

Векторные и среднеквадратичные неравенства.

Вторая модификация связана с объектами управления, у которых вход, выход и возмущение — векторные величины. Если компоненты возмущения v_k ограничены по координатам, то никакой модификации не нужно, достаточно переписать уравнение объекта в виде

$$y_k - \tau' \varphi_{k-l-1} = \delta(\nabla) v_{k-l-n-1},$$

и решать отдельную систему неравенств для каждой строки этого уравнения. Если же возмущения ограничены в смысле евклидовой нормы, то в строй вступает так называемая векторная Полоска, предназначенная для решения неравенств

$$|Y_k - \Phi_{k-1} \tau|^2 \leq C_k^2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (34)$$

где Y_k — l -мерные векторы, а Φ_k — матрицы размерности $l \times n$. Алгоритм:

$$\tau_k = \begin{cases} \tau_{k-1}, & \text{если } \varkappa_k \leq C_k^2, \\ \tau_{k-1} + \mu_k \Gamma_k^{-1} G_k, & \text{если } \varkappa_k > C_k^2, \end{cases} \quad (35)$$

где $\mu_k \in [\mu', \mu'']$ и в остальном произвольны, $0 < \mu' < \mu'' < 2/(1 - \rho)$, $0 < \rho < 1$,

$$\varkappa_k = |Y_k - \Phi_{k-1} \tau_{k-1}|^2, \quad G_k = \Phi_{k-1}^* (Y_k - \Phi_{k-1} \tau_{k-1}), \quad \Gamma_k = \text{Tr} \Phi_{k-1} \Phi_{k-1}^*. \quad (36)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $C_k \geq C > 0$ и векторы τ_k порождены алгоритмом (35). Если существует такой вектор $\bar{\tau}$, что

$$|Y_k - \Phi_{k-1} \bar{\tau}|^2 < \rho^2 C_k^2 \quad \forall k, \quad (37)$$

то

$$|Y_k - \Phi_{k-1}\tau_{k-1}|^2 < C_k^2 + \varepsilon_k \Gamma_{k-1}, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad (38)$$

и $\tau_k - \tau_{k-1} \rightarrow 0$. Если, кроме того, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k < +\infty$, то (35) — конечно-сходящийся алгоритм системы неравенств (34).

Доказательство этого утверждения аналогично предыдущему. Интересно оно тем, что количество компонент векторов Y_k и строк в матрице Φ_k вполне можно увеличивать на каждом шаге работы системы, и это не нарушает адекватность обоснования теоремы. Правда, порождаемый при этом алгоритм нереализуем — его память бесконечно растет. К счастью, его можно переписать в рекуррентной форме [9]:

$$\tau_k = \begin{cases} \tau_{k-1}, & \text{если } \varkappa_k \leq C^2, \\ \tau_{k-1} + \mu_k \Gamma_k^{-1} G_k, & \text{если } \varkappa_k > C^2, \end{cases} \quad (39)$$

в котором по-прежнему $\mu_k \in [\mu', \mu'']$ и в остальном произвольны, $0 < \mu' < \mu'' < 2/(1 - \rho)$, $\rho \in (0, 1)$, но, в отличие от (35), $\varkappa_0 = 0$, $G_0 = 0$, $\theta_0 = 0$,

$$\begin{aligned} G_k &= \frac{k-1}{k} (G_{k-1} + \theta_{k-1} \Delta_{k-1}^*) + \frac{1}{k} \varphi_{k-1} \eta_k(\tau_{k-1})^*, \quad \eta_j(\tau) = y_j - \tau^* \varphi_{j-1}, \\ \Delta_k &= \tau_k - \tau_{k-1}, \quad \Gamma_k = \text{Tr } \theta_k, \quad \theta_k = \frac{k-1}{k} \theta_{k-1} + \frac{1}{k} \varphi_{k-1} \varphi_{k-1}^*, \\ \varkappa_k &= \frac{1}{k} \eta_k(\tau_{k-1})^2 + \frac{k-1}{k} (\varkappa_{k-1} + 2G_{k-1} \Delta_{k-1} + \Delta_{k-1}^* \theta_{k-1} \Delta_{k-1}). \end{aligned} \quad (40)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть векторы τ_k порождены алгоритмом (39). Если существует такой вектор $\bar{\tau}$, что

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |\eta_j(\bar{\tau})|^2 < \rho^2 C^2 \quad \forall k, \quad (41)$$

то

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |\eta_j(\tau_{j-1})|^2 < C^2 + \varepsilon_k \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |\varphi_{j-1}|^2, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad (42)$$

и $\tau_k - \tau_{k-1} \rightarrow 0$. Если, кроме того, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |\varphi_{j-1}|^2 < +\infty$, то (39) — конечно-сходящийся алгоритм системы неравенств

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |y_j - \tau^* \varphi_{j-1}|^2 \leq C^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (43)$$

Система неравенств (43) соответствует задаче адаптивного управления объектами

$$a(\nabla)y_k = b(\nabla)u_k + v_{k+n},$$

возмущающее воздействие на которые при достаточно больших K обладает конечной выборочной дисперсией:

$$\frac{1}{K} \sum_{k=0}^K |v_k|^2 < C^2,$$

а в остальном возмущение произвольно. Таким образом, излагаемая минимаксная (игровая) теория адаптивного управления применима к системам со случайными возмущениями.

Бесконечномерные неравенства.

Имеются в виду аналогичные уже рассмотренным неравенства

$$|y_k - (\tau, \varphi_{k-1})| \leq C, \quad k = 0, 1, \dots \quad (44)$$

Теперь, однако, будем предполагать, что τ и φ_k — элементы гильбертова (унитарного) пространства l_2 со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} x[j]y[j],$$

где $x[j]$ — j -тая компонента бесконечномерного вектора x или, что то же самое, j -тый член последовательности $x = \{x[0], x[1], \dots\}$.

Введем еще обозначение $x[l : m]$ для конечномерного вектора с компонентами $x[l], x[l+1], \dots, x[m]$, где $x = \{x[0], x[1], \dots\} \in l_2$.

В качестве решения системы неравенств (44) будем искать не произвольную точку l_2 , а такой вектор τ , что $0 = \tau[N] = \tau[N+1] = \dots$, то есть все его компоненты с достаточно большими номерами равны нулю, причем значение N заранее неизвестно и само подлежит определению.

Рассмотрим следующую процедуру [10] решения системы неравенств (44):

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_k = \varphi_{k-1}[1 : n_{k-1}], \quad \eta_k = y_k - \psi_k^* \tau_{k-1}, \\ \text{если } |\eta_k| \leq C, \text{ то } \quad \tau_k = \tau_{k-1}, \quad n_k = n_{k-1}, \\ \text{если } |\eta_k| > C, \text{ то } \quad \Delta_k = \mu_k \eta_k |\varphi_{k-1}|^{-2} (1 - C\rho |\eta_k|^{-1}) \psi_k, \\ \tau_k = \begin{bmatrix} \tau_{k-1} + \Delta_k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n_k = n_{k-1} + 1, \\ k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (45)$$

В эти уравнения входят постоянные параметры $\rho \in (0, 1)$, $r > 1$, переменные параметры $\mu_k \in (1/2, 1]$ и начальные данные $n_0 = 1$, $\tau_0 \neq 0$.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что некоторый бесконечномерный вектор $\bar{\tau} = (\bar{\tau}_{[j]})_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам $\bar{\tau}_{[j]} < \nu^{-j}$ и*

$$|y_k - (\bar{\tau}, \varphi_{k-1})| \leq \rho C \quad (46)$$

для всех достаточно больших j и k , где $0 < \rho < 1$, $\nu > 1$. Пусть векторы τ_k, ψ_k доставляются алгоритмом (45). Тогда

$$|\Delta_k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad (47)$$

$$|y_k - \tau_k^* \psi_k| \leq C + \varepsilon_k |\psi_k|, \quad (48)$$

где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. При дополнительном условии $\sup_k |\varphi_k| < +\infty$ неравенства (48) выполнены при $\varepsilon_k \equiv 0$ (и, значит, $\tau_k = const$, $n_k = const$) при всех достаточно больших k .

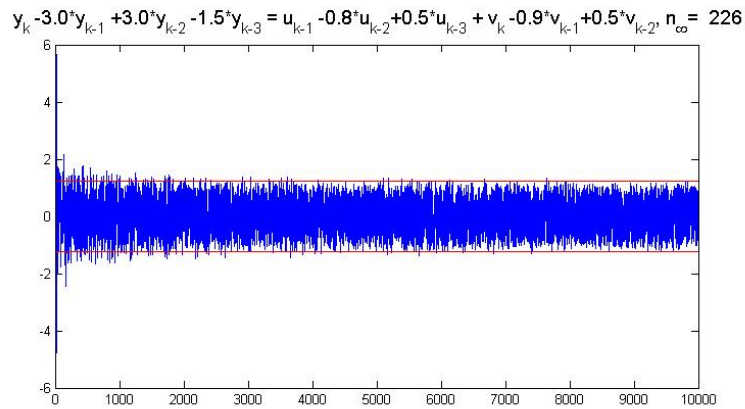


Рис. 7. Наблюдаемый выход адаптивной системы

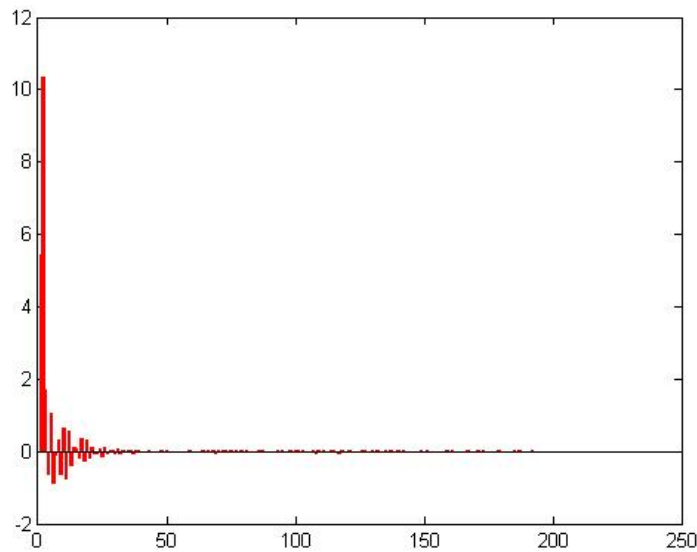


Рис. 8. Предельные значения коэффициентов регулятора

Бесконечномерные неравенства возникают в нескольких ситуациях. Самый простой случай — это когда порядок линейного дискретного стационарного объекта конечен, но неизвестен. Два других варианта связаны с предположениями о классе возмущений. Они могут порождаться произвольным ограниченным сигналом, прошедшим через устойчивый минимальнофазовый фильтр:

$$\theta(\nabla)v_k = \zeta(\nabla)w_k, |w_k| \leq C, k = 0, 1, \dots, \quad (49)$$

или даже

$$c(d/dt)v(t) = g(d/dt)w(t), |w(t)| \leq C, t \in [0, \infty).$$

Здесь, разумеется, $\theta(\lambda), \zeta(\lambda), c(\lambda), g(\lambda)$ — многочлены. В случае дифференциального уравнения для возмущения объект управления также описывается дифференциальным уравнением, а управляющее воздействие кусочно постоянно с шагом $h > 0$: $u(kh + \varepsilon) = u_k, \varepsilon \in [0, h), k = 0, 1, \dots$. Как следствие, равноотстоящие по времени значения управления u_k и наблюдаемого выхода $y_k := y(kh)$ удовлетворяют все тому же разностному уравнению

$$\alpha(\nabla)y_k = \beta(\nabla)u_{k-l} + v_{k+n}, k = 0, 1, \dots, \quad (50)$$

с некоторыми многочленами $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$. Возмущающее воздействие в этом уравнении ограничено, но условию (49) не удовлетворяет. Тем не менее, если к этой дискретной модели применить адаптивный регулятор, то после завершения конечного переходного процесса он обеспечит цель управления не только в кратные h моменты, но и также и в промежуточные, если h достаточно мало.

Работу алгоритма (45) с растущей (до конечного предела) размерностью вектора оценок τ_k демонстрируют рисунки 7 и 8. На первом показан выход объекта управления вместе с границами промежутка, попадание в который составляет цель управления. Видно, что она достигается практически полностью после короткого переходного периода. Второй график представляет установившиеся значения коэффициентов регулятора. Их количество весьма значительно (226), но оно явно избыточно — существенное влияние на значения управления оказывает разве лишь 30 первых коэффициентов, а остальные пренебрежимо малы. На практике, видимо, размерность оценок стоит повышать не при каждом нарушении целевого неравенства, а на каждом десятом–двадцатом, тогда лишних коэффициентов будет меньше.

Невыпуклые неравенства.

От невыпуклых, вообще говоря, неравенств

$$|\alpha_k + \tau^* \varphi_k + \zeta(\tau)^* \phi_k| \leq \varepsilon_k, k = 0, 1, \dots$$

можно [11] перейти к аналогичным, но с меньшей размерностью $\zeta(\tau)$. Применяв этот способ несколько раз, получаем систему выпуклых неравенств

$$|\tilde{\alpha}_k + \tau^* \tilde{\varphi}_k| \leq \tilde{\varepsilon}_k, k = 0, 1, \dots,$$

для решения которых можно использовать базовый алгоритм. Например, управление электрическими асинхронными машинами с короткозамкнутым ротором можно с высоким качеством осуществлять с помощью ПИ-регулятора в системе координат, связанной с вектором потокосцепления (field-oriented control). Сам вектор потокосцепления (flux) недоступен для измерения. Если параметры двигателя известны, то для оценки потокосцепления нужно решить систему неравенств, каждое из которых выделяет в 2-мерном пространстве кольцо, т.е. промежуток между окружностями:

$$|-2C_k^* \tau + |\tau|^2 + |C_k|^2 - R_k^2| < \varepsilon,$$

где τ и C_k — двумерные векторы, R_k — скалярные величины, вычисляемые по измеряемым токам и напряжениям обмоток статора. Каждое из этих неравенств выделяет в пространстве векторов τ кольцо, то есть промежуток между двумя окружностями с общим центром в точке C_k и радиусами $(R_k^2 \pm \varepsilon)^{1/2}$. Выписав два подряд идущих неравенства в виде

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< -2C_k^* \tau + |\tau|^2 + C_k^2 - R_k^2 < \varepsilon, \\ -\varepsilon &< 2C_{k+1}^* \tau - |\tau|^2 - C_{k+1}^2 + R_{k+1}^2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

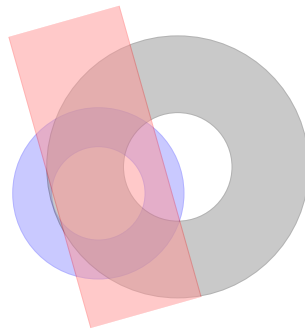
мы можем сложить эти два двойных неравенства, получив

$$|\tau^* \varphi_k + r_k| < 2\varepsilon, \quad k = 0, 1, \dots \quad (51)$$

где

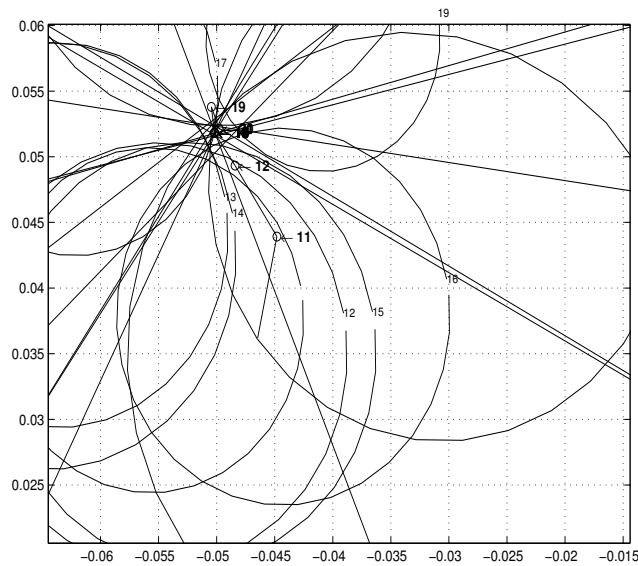
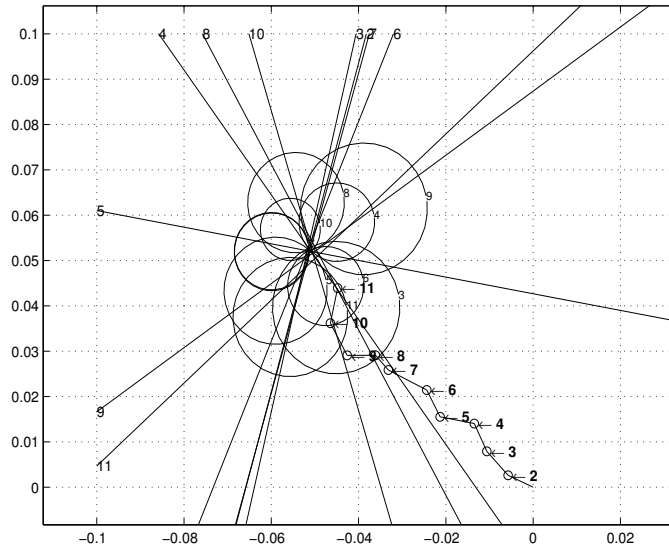
$$\varphi_k = 2[C_{k-1} - C_k], \quad r_k = C_k^2 - C_{k-1}^2 + R_{k-1}^2 - R_k^2.$$

Эта манипуляция с неравенствами имеет явный графический смысл: два кольца мы заменяем на полосу, содержащую их пересечение.



Из этой иллюстрации становится ясен ограниченный математический смысл предлагаемого подхода. Например, бесконечная система неравенств может задавать чередующиеся кольца, изображенные на рисунке. В этом случае алгоритм Полоска спроецирует стартовый вектор τ_0 на порождаемую кольцами полосу, и в дальнейшем векторы τ_k изменятся не будут, оставаясь вдали от пересечения колец. Чтобы обоснованно надеяться на

состоятельность оценок, хотя бы приблизительную, нужно потребовать, чтобы порождаемые неравенства полоски торчали во все стороны. Таким образом, получаемый на этот пути результат неизбежно будет условным, и способ обеспечить это условие вряд ли может быть найден. Численные эксперименты показывают, впрочем, что в реальных ситуациях это условие выполняется:



21

20

(Кольца изображены окружностями, "полоски" — прямыми).

Цель управления — заданные значения для электромагнитного момента T_e и модуля потокосцепления Ψ . Достигается после 1 секунды. На верхнем графике изображены еще истинные компоненты потокосцепления (зеленые кривые) и их оценки (красные). Нижний график — внешняя нагрузка (возмущение).

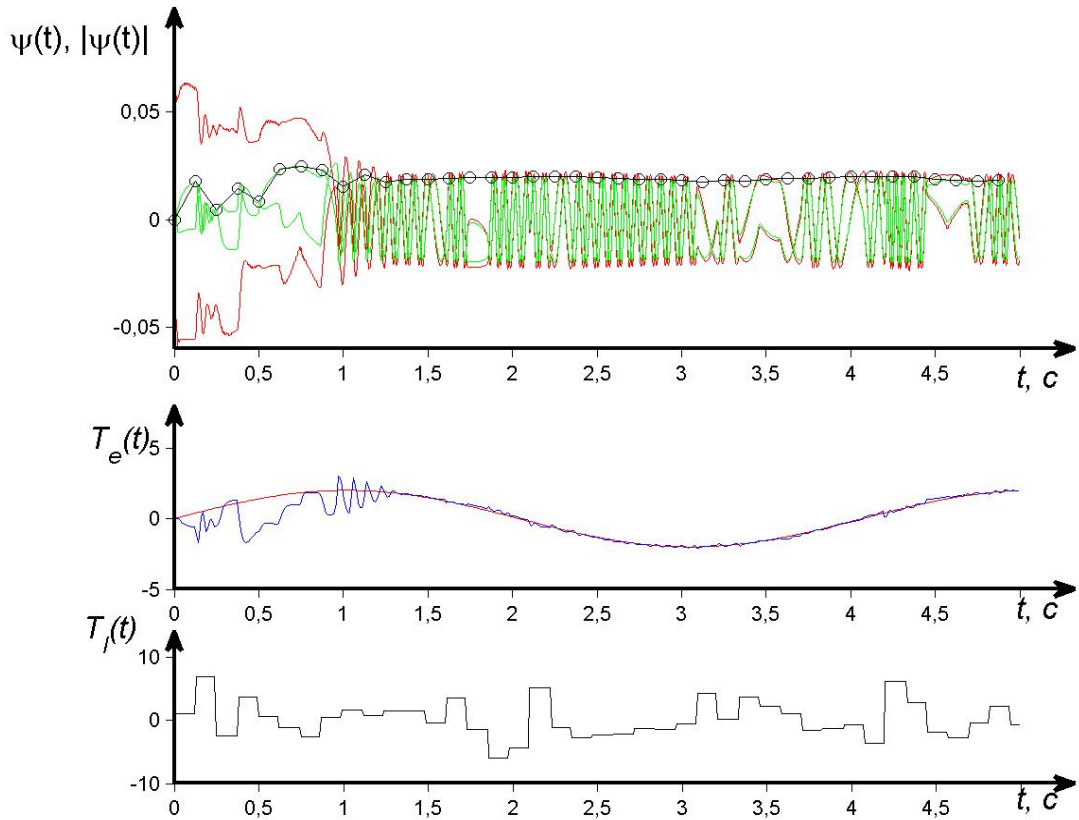
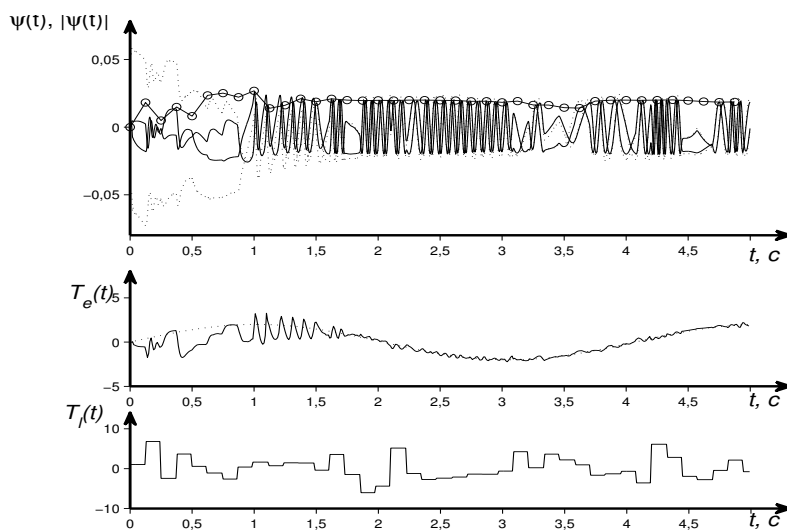


Рис. 9. Потокосцепление, электромагнитный момент, внешняя нагрузка.

Если параметры электрической машины известны не полностью, то увеличивается размерность вектора подстраиваемых оценок и количество шагов редукции нелинейности. Графически отобразить работу алгоритма адаптации в этом случае затруднительно, но результаты по достижению цели управления достигаются:



На рисунке отображается работа системы с неизвестным сопротивлением ротора. Это предположение реалистично, поскольку сопротивление

меняется вместе с температурой, которая зависит от режима работы системы.

В заключение хочется отметить, что алгоритмы типа Полоски сохраняют свои свойства при реализации с конечной разрядной сеткой и ограниченной пропускной способностью канала удаленного управления [12]. Если дополнить такой алгоритм несложной системой кодирования, то получается даже явно оценить пропускную способность канала, достаточную для обеспечения работоспособности системы.

Список литературы

- [1] Бондарко В.А. Конечно-сходящиеся алгоритмы в математической диагностике // Семинар «О & ML». Избранные доклады. 2 марта 2022 г. (<http://oml.cmlaboratory.com/rep22.shtml#0302>)
- [2] Бондарко В.А. Диагностика сферой // Семинар «О & ML». Избранные доклады. 13 апреля 2022 г. (<http://oml.cmlaboratory.com/rep22.shtml#0413>)
- [3] Якубович В.А. Некоторые общие теоретические принципы построения обучаемых опознающих систем. I // Вычислительная техника и вопросы программирования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. С.3–71.
- [4] Rosenblatt F. (1962) Principles of Neurodynamics: Perceptrons and the Theory of Brain Mechanisms. Spartan Books, Washington DC.
- [5] Малоземов В.Н., Плоткин А.В. Строгое линейное отделение двух конечных множеств и линейное программирование // Семинар «О & ML». Избранные доклады. 24 февраля 2022 г. (<http://oml.cmlaboratory.com/rep22.shtml#0224>)
- [6] Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448 с.
- [7] Якубович В.А. К теории адаптивных систем // ДАН СССР. 1968. Т.182. № 3. С. 518–521.
- [8] Бондарко В.А., Якубович В.А. Квадратичный критерий диссипативности дискретных систем и его применение к задачам адаптивного управления. В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1979, С. 87–120.
- [9] Гусев С.В. Конечно-сходящийся алгоритм восстановления функции регрессии и его применение в задачах адаптивного управления // АиТ. 1989. № 3. С. 99–108.
- [10] Бондарко В.А. Адаптивные субоптимальные системы с переменной размерностью вектора подстраиваемых параметров // Автоматика и телемеханика, 2006, N 11, С. 38–59.

- [11] Бондарко В.А. Адаптивное векторное управление асинхронным электродвигателем на основе метода рекуррентных целевых неравенств // Автоматика и телемеханика, 2010, N 9, С. 136–151.
- [12] Bondarko V.A., Fradkov A.L. Adaptive stabilisation of discrete LTI plant with bounded disturbances via finite capacity channel // International Journal of Control 2017, 91(4):1–16