

MDM-АЛГОРИТМ И ЗАДАЧА СИЛЬВЕСТРА. II*

В. Н. Малозёмов

v.malozemov@spbu.ru

Н. А. Соловьёва

4vinyo@gmail.com

Г. Ш. Тамасян

grigoriytamasjan@mail.ru

28 сентября 2023 г.

Вторая часть доклада является непосредственным продолжением первой части [1], в которой был описан MDM-алгоритм решения задачи Сильвестра.

5°. Сходимость MDM-алгоритма. Итак, считаем, что

$$\Delta(u_k) > 0 \quad \text{при всех } k = 0, 1, \dots \quad (32)$$

Согласно (27) при всех $k = 0, 1, \dots$ выполняется неравенство

$$Q(u_k) - Q(u_{k+1}) \geq \frac{1}{2}\delta_k \Delta(u_k). \quad (33)$$

Так как δ_k и $\Delta(u_k)$ положительны, то $Q(u_k) > Q(u_{k+1})$. Получили, что последовательность $\{Q(u_k)\}$ строго убывает. Кроме того, она ограничена снизу наименьшим значением $Q(u)$ на множестве планов U . Значит, последовательность $\{Q(u_k)\}$ имеет предел. Обозначим этот предел через α и запишем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q(u_k) = \alpha. \quad (34)$$

Напомним, что MDM-алгоритм состоит из итераций двух типов — неусеченных (при $\delta_k = \tilde{\delta}_k$) и усеченных (при $\delta_k < \tilde{\delta}_k$).

ЛЕММА. *Количество идущих подряд усеченных итераций конечно.*

Доказательство существенно опирается на тот факт, что в последовательности $\{u_k\}$ все планы попарно различны в силу строгого убывания последовательности $\{Q(u_k)\}$.

Пусть итерация с номером k_0 усеченная и далее следуют также усеченные итерации. Согласно (29), при $k \geq k_0$ справедливо равенство $\delta_k = u_k[i_k'']$.

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML»
<http://oml.cmlaboratory.com/>

Правило перехода от плана u_k к плану u_{k+1} принимает вид

$$u_{k+1}[i] = \begin{cases} u_k[i'_k] + u_k[i''_k] & \text{при } i = i'_k, \\ 0 & \text{при } i = i''_k, \\ u_k[i] & \text{при остальных } i \in 1 : m. \end{cases} \quad (35)$$

По определению, $u_k[i''_k] > 0$. Если $u_k[i'_k] > 0$, то у плана u_{k+1} появляется дополнительная нулевая компонента. При $u_k[i'_k] = 0$ формула (35) упрощается

$$u_{k+1}[i] = \begin{cases} u_k[i''_k] & \text{при } i = i'_k, \\ 0 & \text{при } i = i''_k, \\ u_k[i] & \text{при остальных } i \in 1 : m. \end{cases}$$

Ненулевая компонента $u_k[i''_k]$ переместилась на позицию $i = i'_k$, на которой раньше стоял ноль. Количество нулевых компонент не изменилось. Вместе с тем, количество последовательных преобразований, перемещающих положительную компоненту текущего плана на место нулевой компоненты, конечно. Значит, через конечное число усеченных итераций с $u_k[i'_k] = 0$ мы получим план, у которого аналогичная компонента положительна. У следующего плана появится дополнительная нулевая компонента.

Описанный процесс не может быть бесконечным, так как все планы u_k ненулевые.

Лемма доказана. \square

Таким образом, MDM-алгоритм может содержать конечные блоки подряд идущих усеченных итераций.

Из последовательности $\{u_k\}$ исключим все планы, порождающие усеченные итерации. Останется бесконечная подпоследовательность планов $\{u_{k_j}\}$, порождающих неусеченные итерации.

ТЕОРЕМА 6. Для векторов $x_{k_j} = Au_{k_j}$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = x^*,$$

где x^* — решение задачи (1).

Доказательство. Воспользуемся определением неусеченной итерации и формулой (28). Запишем

$$\delta_{k_j} = \tilde{\delta}_{k_j} = \frac{\Delta(u_{k_j})}{\|a_{i'_k} - a_{i''_k}\|^2} \geq \frac{\Delta(u_{k_j})}{d^2},$$

где $d = \max_{i \in 1:m, j \in 1:m} \|a_i - a_j\|$. Подставив это неравенство в (33) при $k = k_j$, получим

$$Q(u_{k_j}) - Q(u_{k_{j+1}}) \geq \frac{[\Delta(u_{k_j})]^2}{2d^2}. \quad (36)$$

Поскольку последовательность $\{Q(u_k)\}$ сходится, то левая часть неравенства (36) стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta(u_{k_j}) = 0. \quad (37)$$

На основании (14) приходим к заключению теоремы. \square

Теорема 6 показывает, что решение задачи (1) можно получить, если обращать внимание только на результаты неусеченных итераций MDM-алгоритма.

Вернемся к предельному соотношению (34) и выясним, чему равна константа α .

ТЕОРЕМА 7. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q(u_k) = Q(u^*),$$

где u^* — некоторое решение задачи (2).

Так что $\alpha = Q(u^*)$.

Доказательство. По определению множества планов U задачи (2) последовательность $\{u_{k_j}\}$ ограничена. Из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не умаляя общности, будем считать, что вся последовательность $\{u_{k_j}\}$ сходится к вектору \check{u} ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_{k_j} = \check{u}. \quad (38)$$

Очевидно, что \check{u} — план задачи (2). Покажем, что это оптимальный план.

Достаточно проверить, что $\Delta(\check{u}) = 0$. Допустим противное $\Delta(\check{u}) > 0$. Выберем столь большое J , чтобы при $j \geq J$ выполнялись неравенства

$$u_{k_j}[i] > 0 \quad \text{при } i \in I^+(\check{u}), \quad (39)$$

$$\left| (\langle a_i, x_{k_j} \rangle - b[i]) - (\langle a_i, x^* \rangle - b[i]) \right| < \varepsilon \quad \text{при } i \in 1:m. \quad (40)$$

Здесь выбрано $\varepsilon = \frac{1}{4}\Delta(\check{u})$, x^* — решение задачи (1). В силу (39) имеем $I^+(\check{u}) \subset I^+(u_{k_j})$. Далее

$$\begin{aligned} \Delta(u_{k_j}) &= \max_{i \in I^+(u_{k_j})} \{ \langle a_i, x_{k_j} \rangle - b[i] \} - \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x_{k_j} \rangle - b[i] \} \geq \\ &\geq \max_{i \in I^+(\check{u})} \{ \langle a_i, x_{k_j} \rangle - b[i] \} - \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x_{k_j} \rangle - b[i] \}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся неравенством (40). Получим

$$\begin{aligned} \Delta(u_{k_j}) &\geq \max_{i \in I^+(\check{u})} \{ \langle a_i, x^* \rangle - b[i] - \varepsilon \} - \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x^* \rangle - b[i] + \varepsilon \} = \\ &= \max_{i \in I^+(\check{u})} \{ \langle a_i, x^* \rangle - b[i] \} - \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x^* \rangle - b[i] \} - 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (41)$$

Из (38) следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Au_{k_j} = A\check{u},$$

так что, по теореме 6, $x^* = A\check{u} =: \check{x}$. Заменим в (41) x^* на \check{x} . Придем к неравенству

$$\Delta(u_{k_j}) \geq \Delta(\check{u}) - 2\varepsilon = \frac{1}{2} \Delta(\check{u}) > 0.$$

Это противоречит соотношению (37).

Установлено, что \check{u} оптимальный план задачи (2). Будем писать u^* вместо \check{u} . На основании (38) по непрерывности получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Q(u_{k_j}) = Q(u^*).$$

Строгое убывание последовательности $\{Q(u_k)\}$ гарантирует справедливость заключения теоремы. \square

6°. Примеры. В этом разделе приведено пять примеров на применение MDM-алгоритма к решению задачи Сильвестра на плоскости. Вычисления заканчивались, когда на очередном приближении u_{k+1} выполнялось хотя бы одно из условий:

$$\sqrt{\Delta(u_{k+1})} < 5 \cdot 10^{-3} \quad (42)$$

или

$$\|x_k - x_{k+1}\| < 10^{-5}. \quad (43)$$

Используется обозначение $R_k = \sqrt{-2Q(u_k)}$ для приближенного значения радиуса минимального шара.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим три точки, лежащих на окружности, с центром в начале координат и радиуса 2 (на рис. 1 точки синего цвета):

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

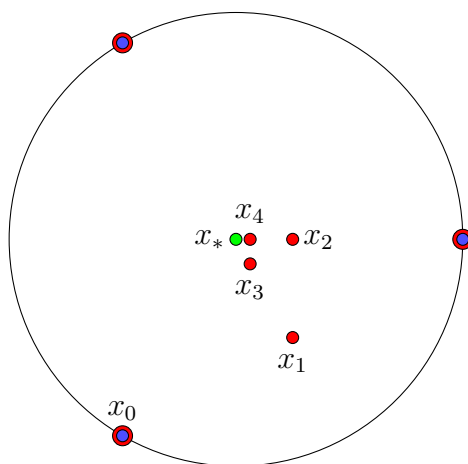


Рис. 1. Ход решения

В качестве начального приближения u_0 взят вектор $(1, 0, 0)$, что соответствует $x_0 = a_1$. Вычисления закончились при выполнении условия (42). На рис. 1 зеленым цветом отмечено решение задачи. Точки на окружности, выделенные красным цветом, являются опорными.

Ниже в виде графиков приведены результаты расчетов. Всюду по оси абсцисс указывается номер итерации.

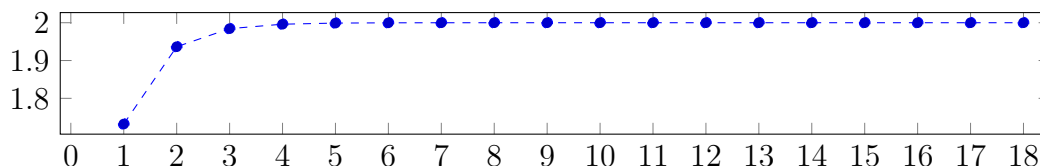


Рис. 2. График последовательности R_k

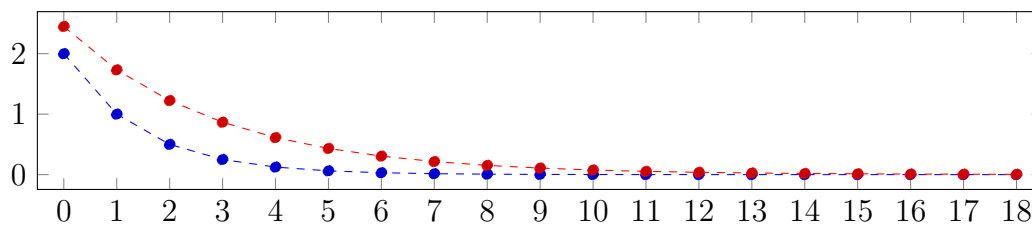


Рис. 3. Графики оценок $\bullet \|x_k - x_*\|$ и $\bullet \sqrt{\Delta(u_k)}$

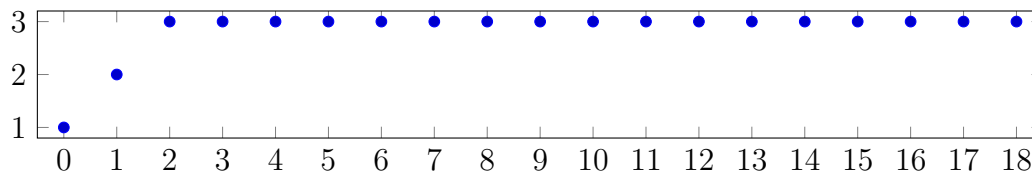


Рис. 4. График последовательности $|I^+(u_k)|$

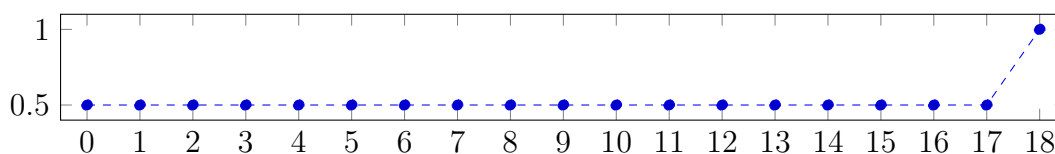


Рис. 5. График отношения $\frac{\|x_{k+1} - x_*\|}{\|x_k - x_*\|}$

Рассмотрим другие способы выбора стартовой точки. В качестве начального приближения можно взять центр тяжести заданной системы a_1, \dots, a_m , а именно вектор u_0 с компонентами $u_0[i] = \frac{1}{m}$, $i \in 1 : m$. Можно поступить иначе: искусственно к исходному набору точек добавить еще одну точку $a_{m+1} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i$ и в качестве начального приближения взять вектор u_0 с компонентами $u_0[i] = 0$, $i \in 1 : m$, $u_0[m+1] = 1$.

На рисунках 6–10 приведены результаты расчета для набора точек (44). Начальное приближение строилось с привлечением дополнительной точки. В качестве u_0 был выбран план $(0, 0, 0, 1)$, что соответствует $x_0 = a_4 = \mathbf{0}$.

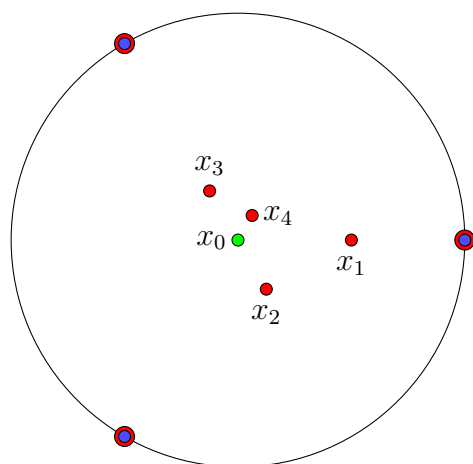
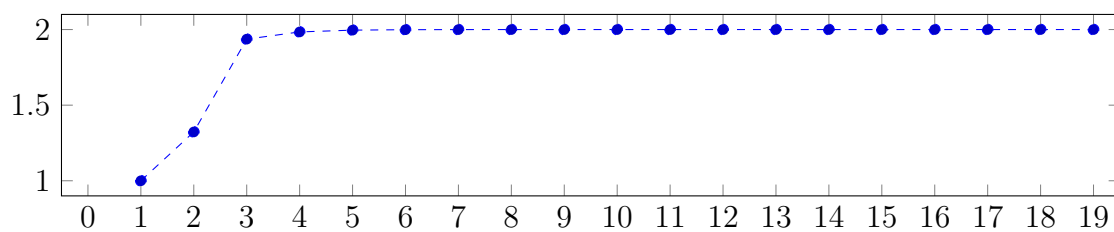
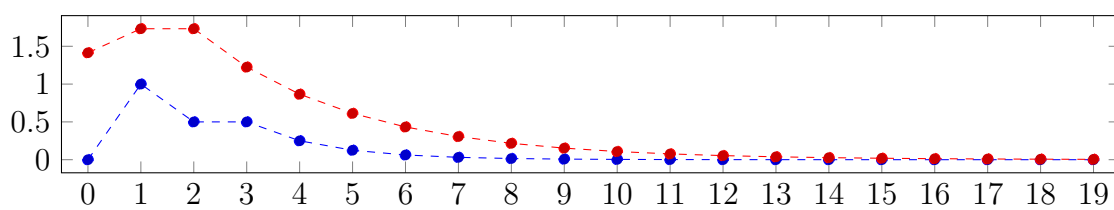
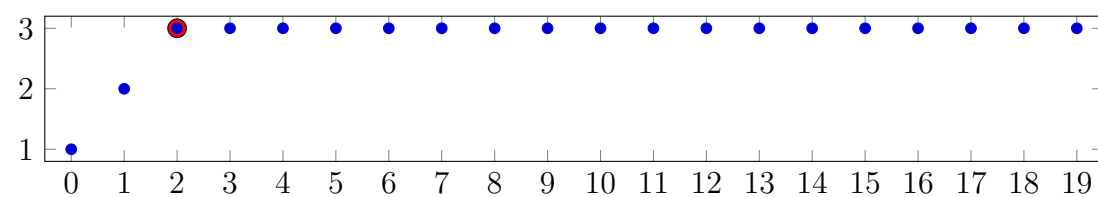
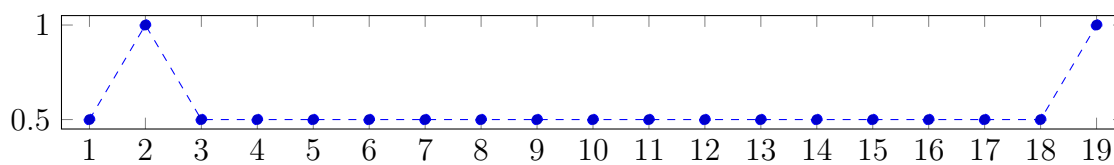


Рис. 6. Ход решения

Рис. 7. График последовательности R_k Рис. 8. Графики оценок $\bullet \|x_k - x_*\|$ и $\bullet \sqrt{\Delta(u_k)}$ Рис. 9. График последовательности $|I^+(u_k)|$ Рис. 10. График отношения $\frac{\|x_{k+1} - x_*\|}{\|x_k - x_*\|}$

На рис. 8 видно, что план u_0 не является оптимальным, т. к. $\sqrt{\Delta(u_0)} > 0$, хотя соответствующая ей точка $x_0 = \mathbf{0}$ является решением исходной задачи. Оптимальным планом будет вектор $(1/3, 1/3, 1/3, 0)$.

На рис. 9 красным цветом выделена усеченная итерация.

Вычисления закончились по условию (42).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим пример, когда генерировалось 15 случайных точек, лежащих внутри и на границе круга $(x - 20)^2 + (y - 30)^2 \leq 10$ (см. рис. 11).

В качестве начального приближения u_0 была выбрана одна из исходных точек. Результаты расчетов представлены на графиках 11–15. Вычисления были остановлены по достижению неравенства $\sqrt{\Delta(u_{15})} < 0.005$.

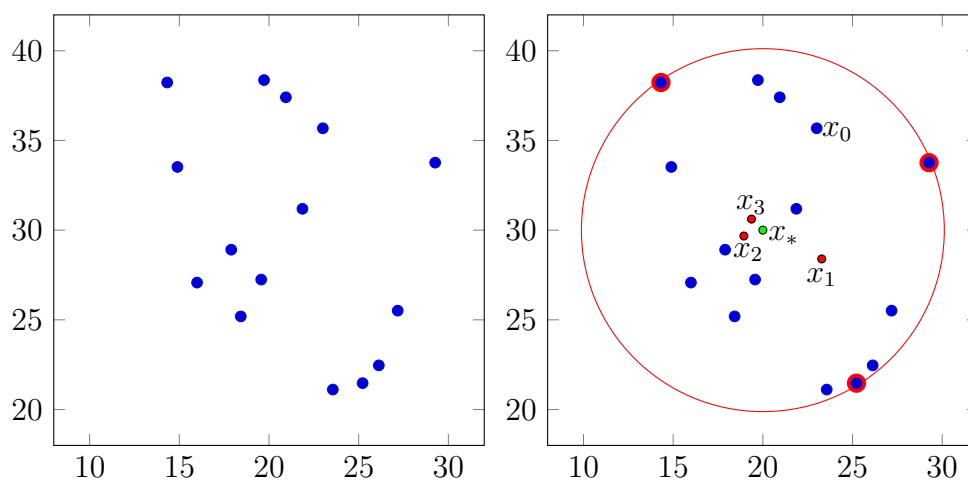


Рис. 11. Исходные данные и решение задачи

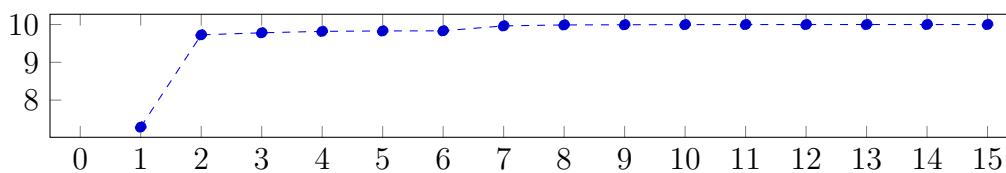


Рис. 12. График последовательности R_k

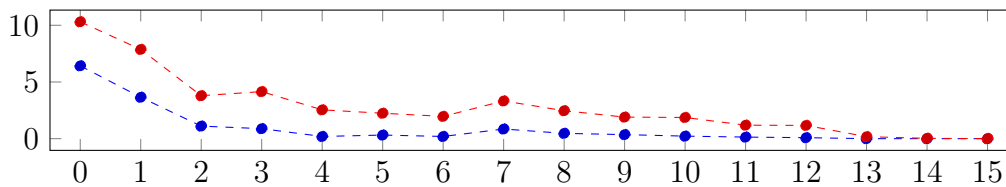


Рис. 13. Графики оценок $\bullet \|x_k - x_*\|$ и $\bullet \sqrt{\Delta(u_k)}$

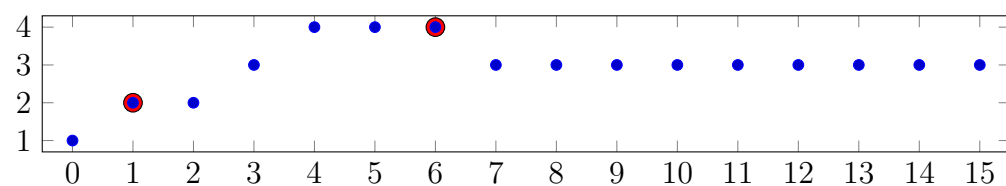


Рис. 14. График последовательности $|I^+(u_k)|$

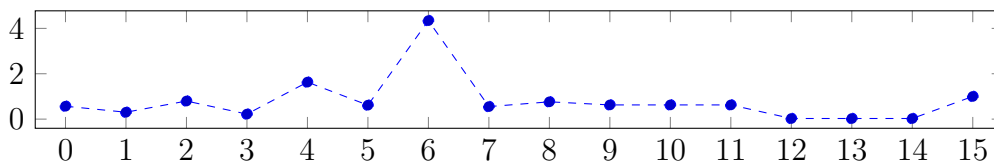


Рис. 15. График отношения $\frac{\|x_{k+1} - x_*\|}{\|x_k - x_*\|}$

ПРИМЕР 3. Допустим, что нужно выяснить, лежит ли данный набор точек на окружности. Это можно сделать, решая соответствующую задачу Сильвестра.

В примере генерировалось 9 случайных точек, лежащих на границе круга $(x-20)^2 + (y-30)^2 \leq 10$ (см. рис. 16). На графиках 17–20 представлены результаты решения задачи Сильвестра, когда в качестве начального приближения выбрана одна из исходных точек. Вычисления закончились на 12-й итерации при выполнении правила останова (43).

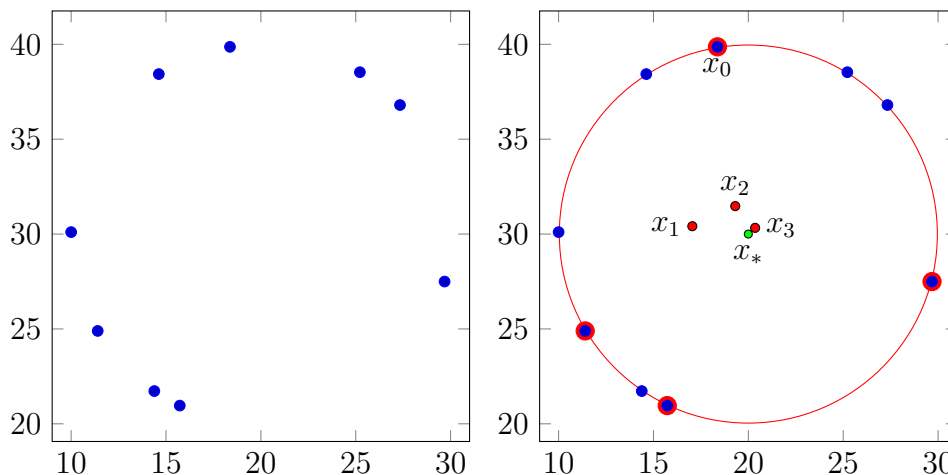


Рис. 16. Исходные данные и решение задачи

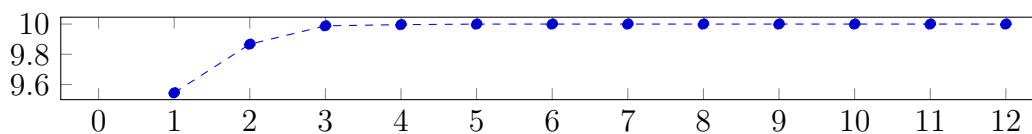


Рис. 17. График последовательности R_k

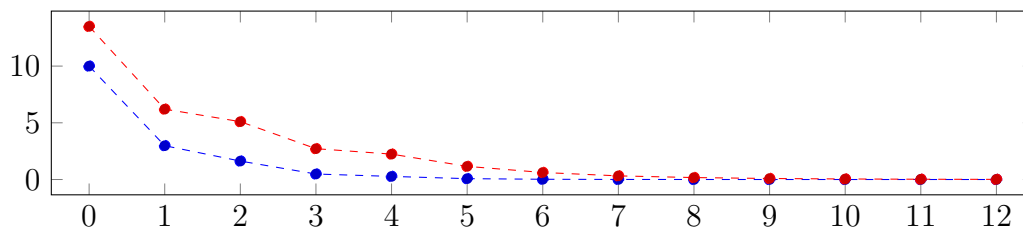
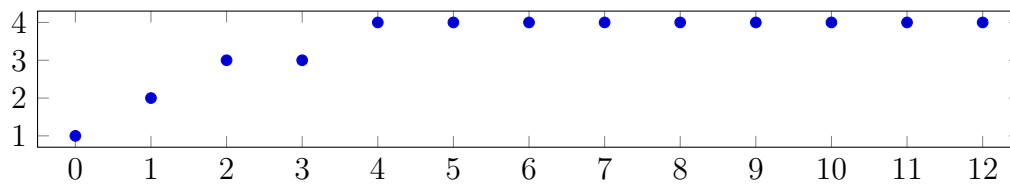
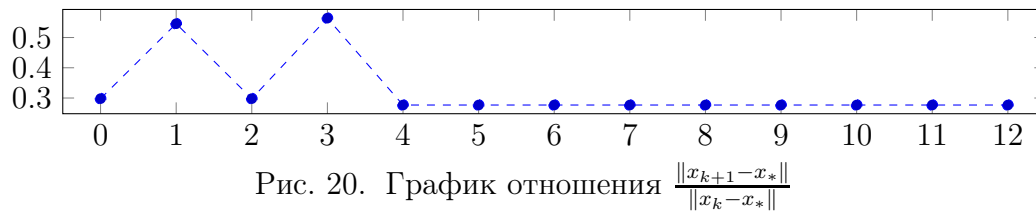


Рис. 18. Графики оценок $\bullet \|x_k - x_*\|$ и $\bullet \sqrt{\Delta(u_k)}$

Рис. 19. График последовательности $|I^+(u_k)|$ Рис. 20. График отношения $\frac{\|x_{k+1}-x_*\|}{\|x_k-x_*\|}$

ПРИМЕР 4. В примере генерировалось 10 случайных точек, лежащих в круге $(x - 20)^2 + (y - 30)^2 \leq 10$ (см. рис. 21). На графиках 21–25 представлены результаты решения задачи Сильвестра, когда в качестве начального приближения выбран центр тяжести исходных точек. Вычисления закончились на 24-й итерации при выполнении правила останова (42).

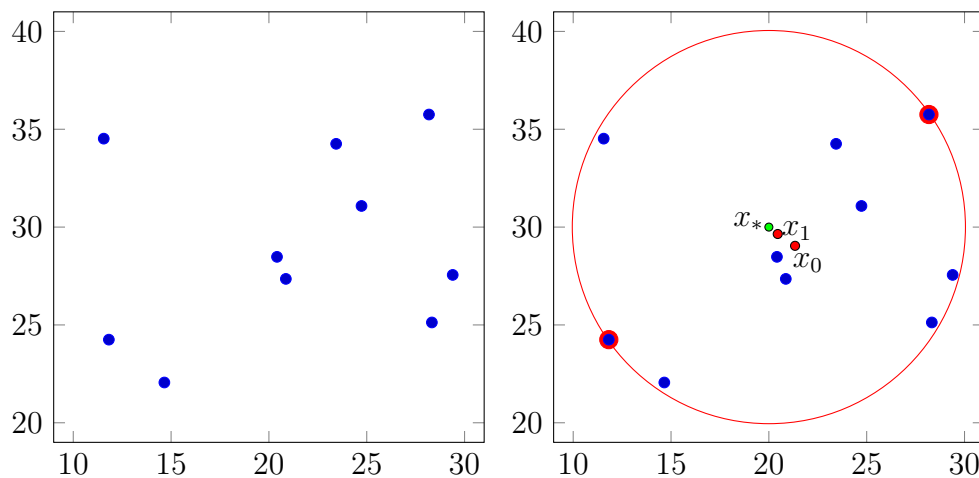
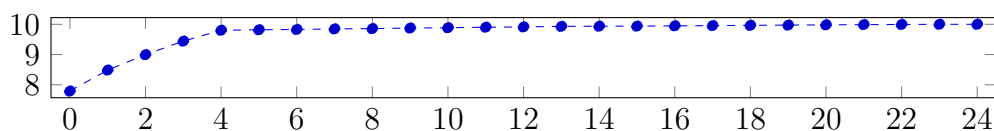
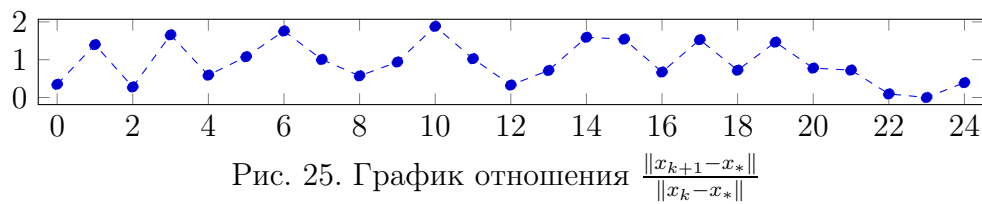
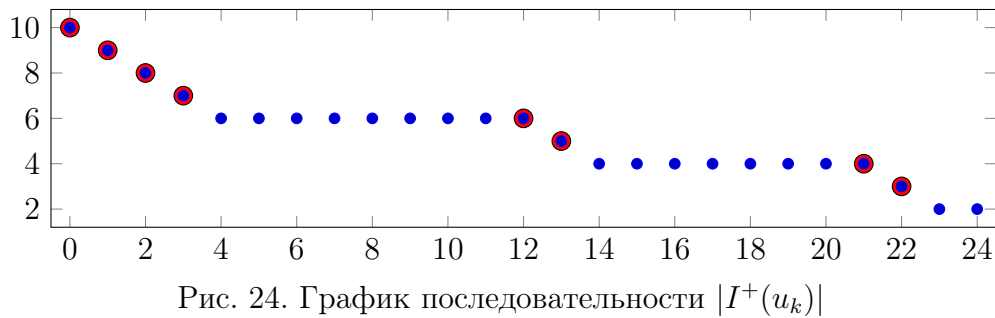
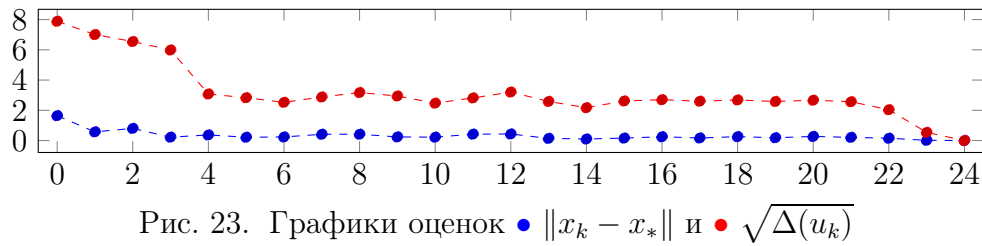
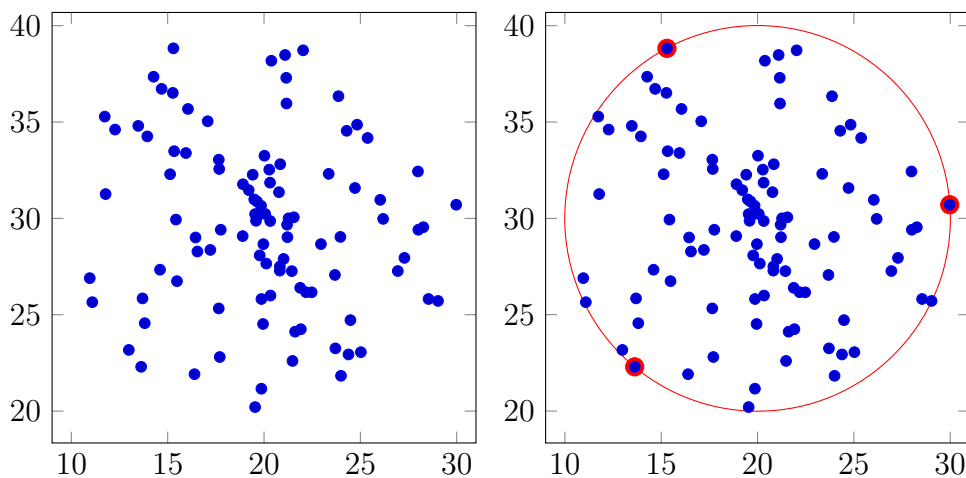


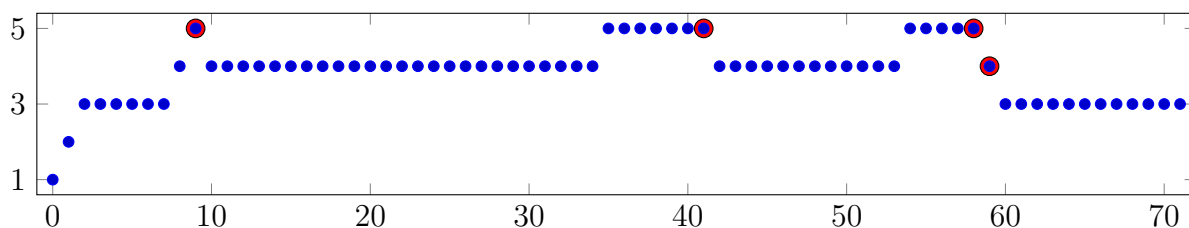
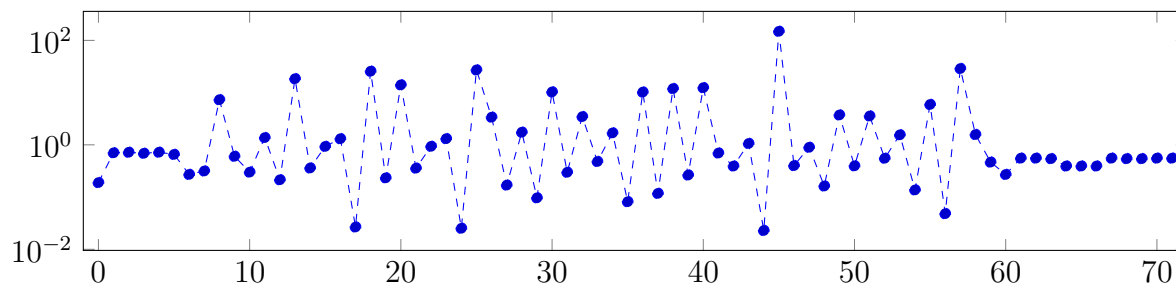
Рис. 21. Исходные данные и решение задачи

Рис. 22. График последовательности R_k



ПРИМЕР 5. В этом примере генерировалось 100 случайных точек, лежащих в круге $(x-20)^2 + (y-30)^2 \leq 10$ (см. рис. 26). На графиках 26–28 представлены результаты расчетов. В качестве начального приближения выбрана одна из исходных точек. Вычисления закончились на 71-й итерации при выполнении правила останова (43).



Рис. 27. График последовательности $|I^+(u_k)|$ Рис. 28. График отношения $\frac{\|x_{k+1}-x_*\|}{\|x_k-x_*\|}$

Замечание 1. Эффективность MDM-алгоритма решения задачи Сильвестра зависит от величины $|I^+(u^*)|$. Наиболее благоприятный случай, когда $|I^+(u^*)| = n + 1$.

Замечание 2. Если план u_k порождает усеченную итерацию, то при переходе от u_k к u_{k+1} мощность $|I^+(u_k)|$ уменьшается на единицу при $u_k[i'_k] > 0$ и остается прежней при $u_k[i'_k] = 0$ (см. доказательство леммы).

В заключение отметим, что численные методы решения задачи Сильвестра рассматривались также в работах [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А., Тамасян Г. Ш. *MDM-алгоритм и задача Сильвестра. I* // Семинар «O & ML». Избранные доклады. 14 сентября 2023 г. (<http://oml.cmlaboratory.com/rep23.shtml#0914>)
2. Кольцов М. А. *Решение задачи Сильвестра в MATLAB* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 26 февраля 2015 г. (<http://cnsa.cmlaboratory.com/rep15.shtml#0226>)
3. Yildirim E. A. *Two algorithms for the minimum enclosing ball problem* // SIAM J. Optim. 2008. Vol. 19. No 3. Pp. 1368–1391.