

# Новое итерационное отображение фейеровского типа для решения системы линейных алгебраических уравнений с условием неотрицательности

В.И. Ерохин

<sup>1</sup>Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия  
[vka@mil.ru](mailto:vka@mil.ru)



Семинар по оптимизации, машинному обучению  
и искусственному интеллекту «O&ML»

2 ноября 2023 г.

 В выкладках существенно используются псевдообратные матрицы и ортогональные проекторы. Базовые сведения и ссылки – в докладе\*) «Шаговая регрессия и рекуррентный метод наименьших квадратов», семинар «O&ML», 9 марта 2023 г.

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  – некоторая матрица,  $\text{rank } A = r \leq \min\{m, n\}$ . Псевдообратной к матрице  $A$  будем называть матрицу  $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , для которой выполняются

**уравнения Пенроуза:**

$$AA^+A = A, \tag{1}$$

$$A^+AA^+ = A^+, \tag{2}$$

$$(AA^+)^T = AA^+, \tag{3}$$

$$(A^+A)^T = A^+A. \tag{4}$$

\*) <http://oml.cmlaboratory.com/rep23.shtml#0309>



## M-фейеровские отображения: Определение

Пусть  $\phi : D \rightarrow E$  – некоторое отображение (*итерационная функция*),  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $E \subseteq D$ ,  $M = \{x \in D \mid \phi(x) = x\} \subseteq E$  – множество *неподвижных точек* отображения  $\phi$ ,  $\{x^k\}$  строится по правилу

$$x^{k+1} = \phi(x^k), \quad x^0 \in D, \quad x^0 \notin M, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

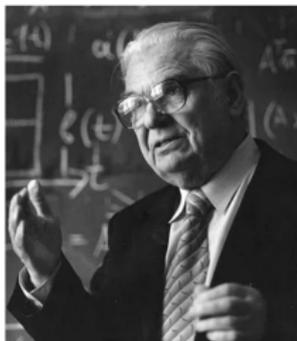
Отображение  $\phi$  называется *M-фейеровским*, если

$$M \neq \emptyset, \quad \|\phi(x) - y\| < \|x - y\| \quad \forall y \in M, \forall (x \in D, x \notin M). \quad (6)$$

(в последующем тексте, в зависимости от контекста,  $\|\cdot\|$  – евклидова векторная норма или спектральная матричная норма).

Класс *M-фейеровских* отображений обозначим через  $F_M$ .

# Российские исследователи фейеровских отображений



Еремин Иван Иванович (1933-2013)  
Академик РАН, г.н.с. отдела математического  
программирования УрО РАН



Васин Владимир Васильевич  
Чл.-корр. РАН, г.н.с. отдела некорректных  
задач и анализа приложений УрО РАН



Попов Леонид Денисович  
д.ф.м.н, в.н.с. отдела математического  
программирования УрО РАН



Соколинский Леонид Борисович  
д.ф.м.н, зав. кафедрой «Системное  
программирование» ЮУрГУ



Соколинская Ирина Михайловна  
к.ф.м.н, доцент кафедры  
«Математическое обеспечение  
информационных технологий» ЮУрГУ



Нурминский Евгений Алексеевич  
д.ф.м.н, профессор департамента  
математического и компьютерного  
моделирования ДВФУ







# Предистория

Википедия

## Фейер, Липот

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

**Липот Фейер** (также *Леопольд Фейер*, венг. *Fejér Lipót* или нем. *Leopold Fejér*, настоящая фамилия *Ва́йс*, нем. *Weiss*; 9 февраля 1880, Печ — 15 октября 1959, Будапешт) — венгерский математик.

### Содержание

- Биография
- Вклад в математику
- Примечания
- Литература
- Ссылки

### Биография

Родился в Пече, в еврейской семье; его отец Самуэль Ва́йс владел магазином, мать — Виктория Гольдбергер. Прадед по материнской линии Самуэль Наход был врачом, а дед — автором иврит-венгерского словаря.

В начальных классах не справлялся со школьной программой, потому на некоторое время отец забрал его на домашнее обучение. Интерес к математике у будущего учёного проснулся в старших классах благодаря учителю Сигизмунду Максаву<sup>[4][5]</sup>. С 1894 года принимал участие в конкурсе имени Эгнэша Венгерского математического общества, а в 1897 году занял на нём второе место. В том же году поступил в Будапештский университет. В 1902 году получил докторскую степень за открытие *сходимости по Чебыру* для рядов Фурье, одну из своих самых известных работ, которую он опубликовал ещё четвероуреником в 1900 году<sup>[6][7]</sup>.

1899—1900 учебный год Фейер провёл в Берлине, где познакомился с Германом Шварцем. На одном из семинаров Шварца он встретил Константина Каратеодори, а позднее — Эдмунда Ландау и Исаию Шура. Эти знакомства положили начало многолетней дружбе и плодотворному научному сотрудничеству<sup>[6]</sup>.

В 1900 году, в связи с проводимой тогда политической мадьяризации, Леопольд Ва́йс сменил имя на венгерский вариант — Липот Фейер<sup>[4]</sup>. Тем не менее, из-за еврейского происхождения он несколько лет не мог найти постоянного места работы и был вынужден подрабатывать. Из неоконченных работ, которыми временно занимался Фейер, биографы упоминают должность сотрудника обсерватории по наблюдению за метеоритами<sup>[7]</sup>. В 1902—1903 году Фейер стажировался в Гёттингене и Париже. В 1903 году начал преподавать в Будапештском университете, а в следующем году получил место ассистента в *Franz Joseph University* в Коложваре, где сотрудничал с Людвигом Шлезингером и позднее получил звание *хабитуированного доктора*<sup>[8]</sup>.

В 1905 году, когда Абри Пуанкаре получил Премию Бойни, он прибыл для награждения в Будапешт. Сойдя с поезда, он первым делом спросил у встречавшей его делегации высокопоставленных чиновников, «А где же Фейер?». На их вопрос, кто это такой, Пуанкаре ответил: «Фейер — величайший венгерский математик, один из лучших математиков мира»<sup>[4][7]</sup>.

В 1911 году Фейер получил звание полного профессора Будапештского университета и возглавил кафедру математики, где проработал до конца карьеры. С 1916 до 1919 год не мог публиковаться из-за Белого террора при раннем режиме Миклоша Хорти<sup>[7]</sup>.

Действительный член Венгерской академии наук (1930, член-корреспондент с 1908 года), член-корреспондент Гёттингской, Мюнхенской и Польской Академий наук, почётный член Математического общества Калькутты, обладатель *Премии имени Кошута*<sup>[6]</sup>.

**Липот Фейер**  
венг. *Fejér Lipót*



<b>Имя при рождении</b>	нем. <i>Leopold Weiss</i>
<b>Дата рождения</b>	9 февраля 1880 <sup>[1]</sup>
<b>Место рождения</b>	Печ, Королевство Венгрия, Австро-Венгрия <sup>[2]</sup>
<b>Дата смерти</b>	15 октября 1959 <sup>[2][11…]</sup> (79 лет)
<b>Место смерти</b>	Будапешт, Венгрия <sup>[2]</sup>
<b>Страна</b>	<span><span><span></span></span><span> </span></span> Венгрия
<b>Научная сфера</b>	анализ
<b>Место работы</b>	Будапештский университет <sup>[1]</sup> Университет Франца Иосифа <sup>[8][1]</sup>
<b>Альма-матер</b>	Будапештский университет (1902) <sup>[1]</sup> Университет Фридриха Вильгельма (1900) <sup>[1]</sup>

## M-фейеровские отображения: Основные свойства

### СВОЙСТВО 1.

Пусть  $\{x^k\}$  построена по правилу (5) с помощью  $\phi \in F_M$ .  
Тогда если  $\{x^k\} \cap M = \emptyset$ , то  $x^k \rightarrow \bar{x} \in M$ , иначе  
 $\exists k \in \mathbb{N} \mid x^k, x^{k+1}, \dots \in M$ .

### СВОЙСТВО 2.

Пусть  $\phi_\lambda(x) = \lambda\phi(x) + (1 - \lambda)x$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\phi \in F_M$ . Тогда  
 $\phi_\lambda \in F_M$ .

### СВОЙСТВО 3.

Пусть  $\phi_j \in F_M$ ,  $\phi(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \phi_j(x)$ ,  $\alpha_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$ .  
Тогда  $\phi \in F_M$ .

### СВОЙСТВО 4.

Пусть  $\phi_j \in F_{M_j}$ ,  $\phi(x) = \phi_1(\phi_2(\dots(\phi_m(x))\dots))$ ,  
 $M = \bigcap_{j=1}^m M_j \neq \emptyset$ . Тогда  $\phi \in F_M$ .

# M-фейеровские отображения: Базовые конструкции для решения систем линейных алгебраических уравнений и неравенств

## 1. Отображение $\pi_L$

на основе проекции точки на полупространство:

$$L = \{x \mid l(x) = a^T x - \beta \leq 0\}, \quad a, x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^1, \quad a \neq 0,$$

$$\pi_L(x) = x - \lambda [l(x)]_+ a / a^T a, \quad \lambda \in (0, 2). \quad ([\cdot]_+ - \text{операция положительной срезки (поэлементная)})$$

## 2. Отображение $\pi_+$

на основе проекции точки на  $\mathbb{R}_+^n$ :  $\pi_+(x) = [x]_+$

## 3. Отображение $\pi_X$

на основе проекции точки на множество решений совместной

$$\text{СЛАУ: } X = \{x \mid Ax = b\}, \quad \pi_X(x) = x + A^+ r(x), \quad r(x) = b - Ax. \quad (A^+ - \text{псевдообратная матрица})$$

**Замечание.** Несложно убедиться, что

$$\pi_+(x) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \pi_+(\pi_+(x)) = \pi_+(x), \quad \pi_X(x) \in X, \quad \pi_X(\pi_X(x)) = \pi_X(x).$$

# Фейеровское отображение для поиска неотрицательного решения СЛАУ

Заметим, что из отображений  $\pi_+$  и  $\pi_X$  может быть построено отображение

$$\tilde{\pi}_{X_+}(x) = \pi_+(\pi_X(x)) = [x + A^+r(x)]_+, \quad (7)$$

которое, в силу свойства 4, является  $X_+$ -фейеровским.

# Работы с $\tilde{\pi}_{X_+}(x)$ : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , $m \leq n$ , $\text{rank } A = m$ , $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$

Уральское отделение Российской академии наук  
Институт математики и механики

Алгоритмы и программные средства параллельных  
вычислений — 2002. Вып. 6

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ФЕЙЕРОВСКИЕ МЕТОДЫ  
ДЛЯ СИЛЬНО СТРУКТУРИРОВАННЫХ  
СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ  
И УРАВНЕНИЙ \***

И. И. ЕРЕМИН, Л. Д. ПОПОВ

*Математические  
структуры и моделирование*  
2002, вып. 9, с. 1-17

УДК 519.6

**ФЕЙЕРОВСКИЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ  
ДЛЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО  
ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

И.И. Еремин, И.М. Соколинская

*Автоматика и телемеханика*, № 2, 2004

© 2004 г. **Е. А. БЕРДНИКОВА,  
И. И. ЕРЕМИН**, академик,  
**Л. Д. ПОПОВ**, д-р физ.-мат. наук  
(Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург)

**РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ФЕЙЕРОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ  
ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ  
И ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ<sup>1</sup>**

 Экономико-математическая литература

И. И. ЕРЕМИН

**ТЕОРИЯ  
ЛИНЕЙНОЙ  
ОПТИМИЗАЦИИ**

[http://www.ksu.ru/journals/izv\\_vuz/](http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/)  
e-mail: [izvuz.matem@ksu.ru](mailto:izvuz.matem@ksu.ru)

*Известия вузов. Математика*  
2009, № 1, с. 44-65

Посвящается 50-летию журнала.

И.И. ЕРЕМИН, Л.Д. ПОПОВ

**ФЕЙЕРОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ТЕОРИИ И ПРАКТИКЕ:  
ОБЗОР ПОСЛЕДНИХ РЕЗУЛЬТАТОВ**



## Преимущества, недостатки и мотивация исследования $M$ -фейеровских отображений в МП

Сильные стороны, полезность (слабость – медленная сходимость)

- *для теории и методов МП:*
  - возможность декомпозиции
    - решение задач ЛП большой размерности
    - параллельные вычисления
  - полиномиальная трудоемкость
  - глобальная сходимость
  - устойчивость к ошибкам округления, самоисправляемость
  - возможность обработки динамических данных
  - пригодность для ввода алгоритмов внутренних точек в допустимую область задачи ЛП
  - возможность адаптации к решению СЛАУ с двухсторонними ограничениями
- *для приложений:*
  - решение балансовых задач: *экономических, электро-энергетических, химико-технологических*

# Задача согласования материального баланса ХТС

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2010, № 2, с. 130–140

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

УДК 51-71

## СОГЛАСОВАНИЕ МАТЕРИАЛЬНОГО БАЛАНСА КРУПНОГО НЕФТЕПЕРЕРАБАТЫВАЮЩЕГО ЗАВОДА В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНЫХ ДАННЫХ

© 2010 г. В. И. Ерохин, А. Ю. Лагтев, Н. В. Лисцын  
Санкт-Петербург, СПбГИ (технический ун-т)

www.scipub.org/acer

Advanced Chemical Engineering Research Vol. 2 Iss. 4, December 2013

## Reconciliation of Experimental Data for Balance Calculation In Chemical- Technological Systems

N. Kuzichkin, V. Erohin, N. Lisitsyn  
190013, St. Petersburg, Russia; Moscow Avenue, Building 26.

$$f(x^{\text{var}}) = \sum_{j=1}^{n_{\text{var}}} \left( k_j^y \left( \frac{x_j^{\text{var}} - y_j}{y_j \cdot \varepsilon_j^y} \right)^2 + k_j^z \left( \frac{x_j^{\text{var}} - z_j}{z_j \cdot \varepsilon_j^z} \right)^2 \right) \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

$$A_1 x^{\text{var}} + A_2 x^{\text{fix}} = 0, \quad (1.2)$$

где  $y = (y_j) \in \mathbb{R}^{n_{\text{var}}}$ ,  $z = (z_j) \in \mathbb{R}^{n_{\text{var}}}$  – векторы измерений ( $y$  – измерение на выходе с некоторой установки или на входе в трубопровод,  $z$  – измерение на входе в некоторую установку или на выходе из трубопровода),  $k^y = (k_j^y) \in \mathbb{Z}^{n_{\text{var}}}$ ,  $k^z = (k_j^z) \in \mathbb{Z}^{n_{\text{var}}}$  – векторы, составленные из чисел 1 (измерение существует) и 0 (измерение отсутствует),  $\varepsilon^y = (\varepsilon_j^y) \in \mathbb{R}^{n_{\text{var}}}$ ,  $\varepsilon^z = (\varepsilon_j^z) \in \mathbb{R}^{n_{\text{var}}}$  – векторы относительных погрешностей измерений,  $x^{\text{var}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{var}}}$  – вектор рассчитываемых значений массовых расходов материальных потоков (варьируе-

мых значений),  $x^{\text{fix}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{fix}}}$  – вектор фиксированных значений массовых расходов материальных потоков (потоки сырья, товарной продукции и потоки, измеряемые по изменению уровня жидкости в резервуаре),  $A = [A_1 | A_2] = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $n = n_{\text{var}} + n_{\text{fix}}$ ,  $m < n$  – матрица системы балансовых уравнений ( $a_{ij} = 1 - u_i$ , если материальный поток с номером  $j$  входит в объект с номером  $i$ ,  $a_{ij} = -1$ , если поток с номером  $j$  выходит из объекта с номером  $i$ ,  $a_{ij} = 0$ , если поток с номером  $j$  не участвует в материальном балансе установки с номером  $i$ ),  $u = (u_i) \in \mathbb{R}^m$  – вектор коэффициентов потерь ( $u_i$  – доля потерь объекта с номером  $i$  от суммы массовых расходов входных материальных потоков указанного объекта).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.9965 & 0.9965 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9966 & 0.9966 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9964 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Новое $X_+$ -фейеровское отображение $\pi_{X_+, \lambda}(x)$

Пусть

$$\pi_{X, \lambda}(x) = x + \lambda A^+ r(x), \lambda \in (0, 2); \pi_{X_+, \lambda}(x) = |\pi_{X, \lambda}(x)|$$

( $|\cdot|$  – поэлементная операция взятия абсолютной величины)

Очевидно, что отображения  $\pi_{X, \lambda}$  и  $\pi_{X_+, \lambda}$  непрерывны,  $\pi_{X, \lambda} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Отображение  $\pi_{X_+, \lambda}$  в последующих выкладках будем рассматривать как отображение из  $\mathbb{R}_+^n$  в  $\mathbb{R}_+^n$ , т.е., как инструмент порождения итерационных числовых последовательностей  $\{x^k\}$  вида

$$x^{k+1} = \pi_{X_+, \lambda}(x^k) \in \mathbb{R}_+^n, x^0 \in \mathbb{R}_+^n, x^0 \notin X_+, k = 0, 1, \dots \quad (8)$$

*Заметим, что отображение  $\pi_{X_+, \lambda}$  в литературе ранее не упоминалось и его свойства ранее не исследовались.*

# ЛЕММА 1. $\pi_{X,\lambda}(x) \in F_X$

**Доказательство.** Пусть  $X \neq \emptyset$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$  – некоторые векторы такие, что  $x \notin X$ ,  $y \in X$ . В силу сделанных допущений  $b = Ay$ ,

$$r(x) = A(y - x). \tag{9}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \pi_{X,\lambda}(x) &= x + \lambda A^+(b - Ax) = x + \lambda A^+ A(y - x) = y + (x - y) + \lambda A^+ A(y - x), \\ \pi_{X,\lambda}(x) - y &= (x - y) + \lambda A^+ A(y - x) = (1 - \lambda)A^+ A(x - y) + (I - A^+ A)(x - y) = \\ &= (1 - \lambda)P(x - y) + Q(x - y) = (1 - \lambda)p + q, \end{aligned}$$

где  $P$  – ортогональный проектор в линейное подпространство  $L$  строк матрицы  $A$ ,  $Q$  – ортогональный проектор в линейное подпространство  $L^\perp$ . Поэтому  $p \perp q$ ,  $\|p\|^2 + \|q\|^2 = \|x - y\|^2$ . В то же время,

$$\|\pi_{X,\lambda}(x) - y\|^2 = (1 - \lambda)^2 \|p\|^2 + \|q\|^2 = \|x - y\|^2 - \lambda(2 - \lambda) \|p\|^2.$$

Заметим, что  $\lambda(2 - \lambda) > 0$  в силу условия  $\lambda \in (0, 2)$ . Покажем, что  $\|p\|^2 > 0 \Leftrightarrow p \neq 0$ . Предположим противное, пусть

$$p = A^+ A(x - y) = 0 \Leftrightarrow Px = Py \Rightarrow A \cdot Px = A \cdot Py \Leftrightarrow Ax = Ay = b \Rightarrow x \in X.$$

Получили противоречие. Таким образом,

$$\lambda(2 - \lambda) \|p\|^2 > 0, \quad \|\pi_{X,\lambda}(x) - y\|^2 < \|x - y\|^2, \quad \|\pi_{X,\lambda}(x) - y\| < \|x - y\| \quad \forall y \in X, \forall x \notin X.$$

Следовательно,  $\pi_{X,\lambda}(x) \in F_X$ . ■

# ТЕОРЕМА 1. $\pi_{X_+, \lambda}(x) \in F_{X_+}$

**Доказательство.** Пусть  $X_+ \neq \emptyset$ ,  $x, y \in \mathbb{R}_+^n$  – некоторые векторы такие, что,  $x \notin X_+$ ,  $y \in X_+$ . В силу сделанных допущений  $Ax \neq b$ ,  $Ay = b$ . В силу леммы 1 и определения  $\pi_{X_+, \lambda}(x)$  справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \pi_{X_+, \lambda}(x) &= |y + (x - y) + \lambda A^+ A(y - x)| = |y + (1 - \lambda)P(x - y) + Q(x - y)|, \\ \left| \pi_{X_+, \lambda}(x) - y \right| &= \left| |y + (1 - \lambda)P(x - y) + Q(x - y)| - y \right|, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\left| \pi_{X_+, \lambda}(x) - y \right| \leq \left| (1 - \lambda)P(x - y) + Q(x - y) \right|. \quad (10)$$

В свою очередь, в силу леммы 1, соотношения (10), принадлежности евклидовой нормы к классу абсолютных норм и условия  $Ax \neq b$ , имеем

$$\left\| \pi_{X_+, \lambda}(x) - y \right\| \leq \left\| (1 - \lambda)P(x - y) + Q(x - y) \right\| < \|x - y\| \quad (11)$$

$$\forall y \in X_+, \forall x : (x \in \mathbb{R}_+^n, x \notin X_+).$$

Следовательно,  $\pi_{X_+, \lambda}(x) \in F_{X_+}$ . ■

**ТЕОРЕМА 2.** Если  $X_+ \neq \emptyset$  и последовательность  $\{x^k = \pi_{X_+, \lambda}(x^{k-1})\}$  является бесконечной, то  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = y \in X_+$ ,  $\|\pi_{X_+, \lambda}(x^k) - y\| \leq \theta \cdot \|x^k - y\|$   
 $\forall y \in X_+, \forall x^k \in \mathbb{R}_+^n$ , где  $0 \leq \theta < 1$

**Доказательство.** Пусть  $X_+ \neq \emptyset$  и последовательность  $\{x^k\}$  является бесконечной.

Тогда  $x^k \rightarrow y \in X_+$  в силу теоремы 1 и свойства 2. В силу леммы Хофмана выполняется условие

$$\|x - y\| \leq C \|r(x)\|, \tag{12}$$

где  $C > 0$  – некоторая константа,  $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $x \notin X_+$ ,  $x \in \{x^k\}$ ,  $y \in X_+$ .

Но  $b = Ay$ , поэтому  $b - Ax = A(y - x) = AA^+A(y - x) = AP(y - x)$ , откуда имеем

$$\|x - y\| \leq C \|A\| \cdot \|P(y - x)\| = C \|A\| \cdot \|p\|, \quad \|p\| \geq \frac{\|x - y\|}{C \|A\|}. \tag{13}$$

В силу свойств евклидовых норм ортогональных проекций  $\|p\| \leq \|x - y\|$ , поэтому  $C \geq \|A\|^{-1}$ . В силу соотношения (11) (теорема 1), а также свойств евклидовых норм ортогональных проекций, соотношение (13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \|\pi_{X_+, \lambda}(x) - y\|^2 &\leq \|(1 - \lambda)P(x - y) + Q(x - y)\|^2 = (1 - \lambda)^2 \|p\|^2 + \|q\|^2 = \\ &= (1 - \lambda)^2 \|p\|^2 + \|x - y\|^2 - \|p\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \frac{\lambda(2 - \lambda)}{C^2 \|A\|^2} \|x - y\|^2 \leq \frac{(1 - \lambda)^2 + C^2 \|A\|^2 - 1}{C^2 \|A\|^2} \|x - y\|^2, \end{aligned}$$

откуда получаем утверждение

$$\|\pi_{X_+, \lambda}(x) - y\| \leq \bar{\theta} \cdot \|x - y\| \quad \forall y \in X_+, \forall (x \in \mathbb{R}_+^n, x \notin X_+), \tag{14}$$

где

$$\bar{\theta} = \left( \frac{(1 - \lambda)^2 + C^2 \|A\|^2 - 1}{C^2 \|A\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \Theta^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Заметим, что при  $\lambda \in (0, 2)$  и произвольном  $C \geq \|A\|^{-1}$  выполняются условия  $0 \leq \Theta < 1$ ,  $0 \leq \bar{\theta} < 1$ . При этом  $\bar{\theta}$ , заданная формулой (15), является верхней оценкой  $\theta$  – константы асимптотики сходимости последовательности  $\{x^k\}$ , а, из (14) следует, что порядок сходимости последовательности  $\{x^k\}$  – не ниже первого. ■

### ТЕОРЕМА 3. (Об оценке сходимости $\{x^k\}$ по сходимости $\{r(x^k)\}$ )

Пусть  $X_+ \neq \emptyset$  и последовательность  $\{x^k\}$  является бесконечной. Тогда 1)  $\|r(x^k)\| \rightarrow 0$ , 2) имеет место неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r(x^{k+1})\|}{\|r(x^k)\|} \leq \bar{\theta} \|A\| C = \bar{\bar{\theta}}, \quad (16)$$

где  $\bar{\bar{\theta}}$  – верхняя оценка константы асимптотики сходимости последовательности  $\{r(x^k)\}$ .

**Доказательство.** Истинность утверждения 1) легко обосновать «от противного» с использованием теоремы 2. Перейдем к доказательству утверждения 2). В силу (9) и свойств спектральной матричной и евклидовой векторной нормы для любых  $x, y \in \mathbb{R}^n$  справедливо условие

$$\|r(x)\| \leq \|A\| \cdot \|y - x\|. \quad (17)$$

Пусть  $x \notin X_+, y \in X_+$ . Тогда справедливо также условие (12). Объединив (17) и (12), получим

$$\|r(x)\| \leq \|A\| \cdot \|y - x\| \leq \|A\| C \|r(x)\|. \quad (18)$$

Объединив (18) с условием (14), справедливым в силу теоремы 2, получим

$$\|r(\pi_{X_+, \lambda}(x))\| \leq \|A\| \cdot \|\pi_{X_+, \lambda}(x) - y\| \leq \bar{\theta} \|A\| \cdot \|x - y\| \leq \bar{\theta} \|A\| C \|r(x)\|. \quad (19)$$

Подставляя в (19) члены последовательности  $\{x^k\}$   $x^0, x^1, \dots, x^{k-1}$ , получим

$$\|r(x^1)\| \leq \bar{\theta} \|A\| C \|r(x^0)\|, \dots, \|r(x^k)\| \leq \bar{\theta} \|A\| C \|r(x^{k-1})\|. \quad (20)$$

Используя (20), получаем (27). ■

## ТЕОРЕМА 4. (О сходимости $\{x^k\}$ за конечное число шагов)

Пусть  $X_+ \neq \emptyset$  и последовательность  $\{x^k\}$  порождается некоторым отображением  $\pi_{X_+, \lambda}$ , где  $\lambda \in [1, 2)$ . Если при этом  $\pi_{X, \lambda}(x^k) \geq 0$  для некоторого  $k \geq 0$ , то  $\pi_X(x^k) \in X_+$ .

**Доказательство.** В силу определений  $\pi_X$ ,  $\pi_{X, \lambda}$ ,  $\pi_{X_+, \lambda}$  и сделанных предположений имеем:

$$x^k \geq 0, x^k + \lambda A^+ r(x^k) \geq 0 \Rightarrow x^k + A^+ r(x^k) \geq 0 \Leftrightarrow \pi_X(x^k) \in X_+.$$



Для справки:

$$\pi_X(x) = x + A^+ r(x), \pi_{X, \lambda}(x) = x + \lambda A^+ r(x), \pi_{X_+, \lambda}(x) = |x + \lambda A^+ r(x)|$$

## Отображение $\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(x)$ – база сравнения с отображением $\pi_{X_+, \lambda}(x)$

Рассмотрим итерационную функцию

$$\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(x) = \pi_+(\pi_{X, \lambda}(x)) = [x + \lambda A^+ r(x)]_+. \quad (21)$$

*Хотя указанная функция не встречается в литературе, считать её «новой», по-видимому, нет оснований, так как отображение  $\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}$  является очевидным обобщением отображения  $\pi_{X_+}$ .*

**ЛЕММА 2.**  $\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(x) \in F_{X_+}$ .

Доказываемое утверждение непосредственно следует из леммы 1 и свойства 4.

Отображение  $\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}$ , также как и отображение  $\pi_{X_+, \lambda}$  в последующих выкладках будем рассматривать как отображение из  $\mathbb{R}_+^n$  в  $\mathbb{R}_+^n$ , т.е., как инструмент порождения итерационных числовых последовательностей  $\{\tilde{x}^k\}$  вида

$$\tilde{x}^{k+1} = \tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(\tilde{x}^k) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \tilde{x}^0 \in \mathbb{R}_+^n, \quad \tilde{x}^0 \notin X_+, \quad k = 0, 1, \dots \quad (22)$$

**ТЕОРЕМА 5.** Если  $X_+ \neq \emptyset$  и последовательность  $\{\tilde{x}^k = \tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(\tilde{x}^{k-1})\}$  является бесконечной, то  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}^k = y \in X_+$ ,  $\|\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(\tilde{x}^k) - y\| \leq \theta \cdot \|\tilde{x}^k - y\|$   
 $\forall y \in X_+, \forall \tilde{x}^k \in \mathbb{R}_+^n$ , где  $0 \leq \theta < 1$

**Доказательство.** Заметим, что (поэлементные) функции  $|\tilde{x}|$  и  $[\tilde{x}]_+$  связаны соотношением

$$[\tilde{x}]_+ = \frac{|\tilde{x}| + \tilde{x}}{2}. \quad (23)$$

Пусть  $X_+ \neq \emptyset$ ,  $\tilde{x}, y \in \mathbb{R}_+^n$  – некоторые векторы такие, что,  $\tilde{x} \notin X_+, y \in X_+$ . В силу сделанных допущений  $Ax \neq b, Ay = b$ . В силу леммы 1 и определения (21) справедливы соотношения:

$$\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(\tilde{x}) = [y + (\tilde{x} - y) + \lambda A^+ A(y - \tilde{x})]_+ = [y + (1 - \lambda)P(\tilde{x} - y) + Q(\tilde{x} - y)]_+,$$

$$\begin{aligned} |\pi_{X_+, \lambda}(\tilde{x}) - y| &= |[y + (1 - \lambda)P(\tilde{x} - y) + Q(\tilde{x} - y)]_+ - y| = \\ &= \left| \frac{|y + (1 - \lambda)P(\tilde{x} - y) + Q(\tilde{x} - y)| - y}{2} + \frac{y + (1 - \lambda)P(\tilde{x} - y) + Q(\tilde{x} - y) - y}{2} \right|, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$|\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(\tilde{x}) - y| \leq [(1 - \lambda)P(\tilde{x} - y) + Q(\tilde{x} - y)]_+. \quad (24)$$

В свою очередь, в силу лемм 1,2, соотношения (24), принадлежности евклидовой нормы к классу абсолютных норм и условия  $Ax \neq b$ , имеем

$$\|\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(\tilde{x}) - y\| \leq \|(1 - \lambda)P(\tilde{x} - y) + Q(\tilde{x} - y)\| < \|\tilde{x} - y\| \quad (25)$$

$$\forall y \in X_+, \forall \tilde{x} : (\tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n, \tilde{x} \notin X_+).$$

Соотношение (25) имеет тот же самый вид, что и соотношение (11). Поэтому справедливы выкладки из доказательства теоремы 2: в силу соотношений (12), (13), (25), получаем

$$\|\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(\tilde{x}) - y\| \leq \bar{\theta} \cdot \|\tilde{x} - y\| \quad \forall y \in X_+, \forall (\tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n, \tilde{x} \notin X_+), \quad (26)$$

где параметр  $\theta$  задан формулой (15) и отвечает условию  $0 \leq \bar{\theta} < 1$ . ■

## ТЕОРЕМА 6. (Об оценке сходимости $\{\tilde{x}^k\}$ по сходимости $\{r(\tilde{x}^k)\}$ )

Пусть  $X_+ \neq \emptyset$  и последовательность  $\{\tilde{x}^k\}$  является бесконечной. Тогда 1)  $\|r(\tilde{x}^k)\| \rightarrow 0$ , 2) имеет место неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r(\tilde{x}^{k+1})\|}{\|r(\tilde{x}^k)\|} \leq \bar{\theta} \|A\| C = \bar{\bar{\theta}}, \quad (27)$$

где  $\bar{\bar{\theta}}$  – верхняя оценка константы асимптотики сходимости последовательности  $\{r(\tilde{x}^k)\}$ .

**Доказательство.** Проведем выкладки, аналогичные доказательству теоремы 3, убеждаемся в истинности соотношения (18). Объединив (18) с условием (26), справедливым в силу теоремы 4, получим

$$\begin{aligned} \|r(\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(\tilde{x}))\| &\leq \|A\| \cdot \|\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(\tilde{x}) - y\| \leq \theta \|A\| \cdot \|\tilde{x} - y\| \leq \\ &\leq \theta \|A\| C \|r(\tilde{x})\|. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя в (28) члены последовательности  $\{\tilde{x}^k\}$   $\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{k-1}$ , убеждаемся в истинности соотношений (20) и (27). ■

## ТЕОРЕМА 7. (О сходимости $\{\tilde{x}^k\}$ за конечное число шагов)

Пусть  $X_+ \neq \emptyset$  и последовательность  $\{\tilde{x}^k\}$  порождается некоторым отображением  $\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}$ , где  $\lambda \in [1, 2)$ . Если при этом  $\tilde{\pi}_{X, \lambda}(x^k) \geq 0$  для некоторого  $k \geq 0$ , то  $\pi_X(x^k) \in X_+$ .

**Доказательство.** В силу определений  $\pi_X$ ,  $\pi_{X, \lambda}$ ,  $\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}$  и сделанных предположений имеем:

$$\tilde{x}^k \geq 0, \tilde{x}^k + \lambda A^+ r(\tilde{x}^k) \geq 0 \Rightarrow \tilde{x}^k + A^+ r(\tilde{x}^k) \geq 0 \Leftrightarrow \pi_X(\tilde{x}^k) \in X_+.$$



Для справки:

$$\pi_X(x) = x + A^+ r(x), \pi_{X, \lambda}(x) = x + \lambda A^+ r(x), \tilde{\pi}_{X_+, \lambda}(x) = [x + \lambda A^+ r(x)]_+$$

# 1 - Модельный пример малой размерности. Исследование сходимости $\pi_{X_+, \lambda}$ за конечное число шагов

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{rank } A = 2, \text{rank} [ A \quad b ] = 2, X_+ \neq \emptyset, x^0 = 0$$

$\lambda$	$k^*$	$\min_{j=1, \dots, 5} (\pi_{X, \lambda}(x^{k^*-1}))_j$	$\min_{j=1, \dots, 5} (\pi_{X, \lambda}(x^{k^*}))_j$	$\ r(x^{k^*})\ $
1	124	$-4.449 \cdot 10^{-17}$	$4.449 \cdot 10^{-17}$	0
1.05	105	$-1.438 \cdot 10^{-16}$	$1.756 \cdot 10^{-17}$	$5.439 \cdot 10^{-16}$
1.1	94	$-7.892 \cdot 10^{-17}$	$7.684 \cdot 10^{-18}$	$2.220 \cdot 10^{-16}$
1.15	78	$-2.038 \cdot 10^{-17}$	$6.294 \cdot 10^{-17}$	$1.110 \cdot 10^{-16}$
1.2	54	$-1.663 \cdot 10^{-16}$	$8.857 \cdot 10^{-17}$	$2.220 \cdot 10^{-16}$
1.25	8	$-1.031 \cdot 10^{-3}$	$1.003 \cdot 10^{-4}$	$2.116 \cdot 10^{-3}$
1.3	6	$-5.219 \cdot 10^{-3}$	$1.645 \cdot 10^{-3}$	$9.453 \cdot 10^{-3}$
1.35	5	$-1.637 \cdot 10^{-2}$	$2.866 \cdot 10^{-3}$	$2.256 \cdot 10^{-2}$
1.4	5	$-9.189 \cdot 10^{-3}$	$1.259 \cdot 10^{-2}$	$4.049 \cdot 10^{-2}$
1.45	5	$-8.319 \cdot 10^{-4}$	$2.417 \cdot 10^{-2}$	$9.872 \cdot 10^{-2}$
1.5	4	$-5.603 \cdot 10^{-2}$	$8.743 \cdot 10^{-3}$	$2.818 \cdot 10^{-1}$
1.55	4	$-5.663 \cdot 10^{-2}$	$1.957 \cdot 10^{-2}$	$3.662 \cdot 10^{-1}$
1.6	4	$-5.760 \cdot 10^{-2}$	$3.168 \cdot 10^{-2}$	$4.849 \cdot 10^{-1}$
1.65	4	$-5.906 \cdot 10^{-2}$	$4.507 \cdot 10^{-2}$	$6.432 \cdot 10^{-1}$
1.7	4	$-6.113 \cdot 10^{-2}$	$5.975 \cdot 10^{-2}$	$8.471 \cdot 10^{-1}$
1.75	4	$-6.393 \cdot 10^{-2}$	$7.567 \cdot 10^{-2}$	1.103
1.8	4	$-6.758 \cdot 10^{-2}$	$7.118 \cdot 10^{-2}$	1.186
1.85	4	$-9.376 \cdot 10^{-2}$	$4.449 \cdot 10^{-2}$	1.186
1.9	4	$-1.472 \cdot 10^{-1}$	$1.280 \cdot 10^{-2}$	1.303
1.95	5	$-2.762 \cdot 10^{-2}$	$7.557 \cdot 10^{-2}$	1.261

# 1 - Модельный пример малой размерности. Исследование сходимости $\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}$ за конечное число шагов

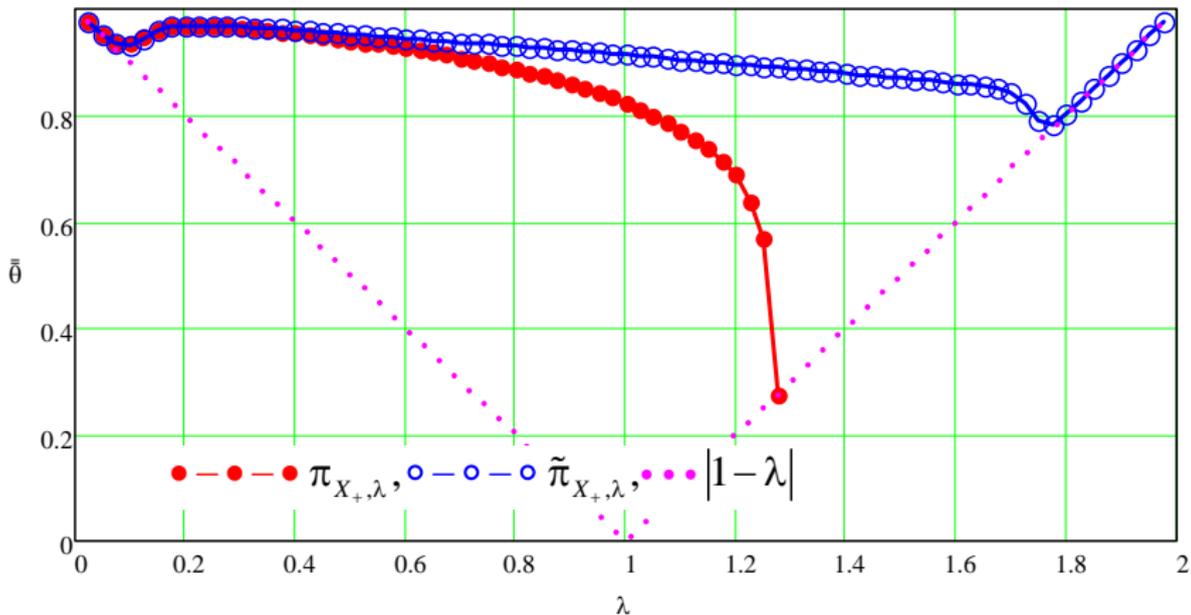
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{rank } A = 2, \text{rank} [ A \quad b ] = 2, X_+ \neq \emptyset, \tilde{x}^0 = 0$$

$\lambda$	$k^*$	$\min_{j=1, \dots, 5} (\pi_{X, \lambda}(\tilde{x}^{k^* - 1}))_j$	$\min_{j=1, \dots, 5} (\pi_{X, \lambda}(\tilde{x}^{k^*}))_j$	$\ r(\tilde{x}^{k^*})\ $
1	256	$-2.591 \cdot 10^{-16}$	$-2.035 \cdot 10^{-16}$	$4.965 \cdot 10^{-16}$
1.05	242	$-3.303 \cdot 10^{-16}$	$-2.137 \cdot 10^{-16}$	$4.965 \cdot 10^{-16}$
1.1	234	$-2.035 \cdot 10^{-16}$	$-2.341 \cdot 10^{-16}$	$4.965 \cdot 10^{-16}$
1.15	222	$-2.128 \cdot 10^{-16}$	$-1.596 \cdot 10^{-16}$	$3.140 \cdot 10^{-16}$
1.2	209	$-4.108 \cdot 10^{-16}$	$-2.442 \cdot 10^{-16}$	$4.965 \cdot 10^{-16}$
1.25	201	$-3.238 \cdot 10^{-16}$	$-2.544 \cdot 10^{-16}$	$4.965 \cdot 10^{-16}$
1.3	193	$-3.728 \cdot 10^{-16}$	$-2.646 \cdot 10^{-16}$	$4.965 \cdot 10^{-16}$
1.35	185	$-2.998 \cdot 10^{-16}$	$-1.998 \cdot 10^{-16}$	$4.441 \cdot 10^{-16}$
1.4	177	$-3.886 \cdot 10^{-16}$	$-2.850 \cdot 10^{-16}$	$4.965 \cdot 10^{-16}$
1.45	171	$-4.025 \cdot 10^{-16}$	$-2.951 \cdot 10^{-16}$	$4.965 \cdot 10^{-16}$
1.5	164	$-4.441 \cdot 10^{-16}$	$-2.220 \cdot 10^{-16}$	$4.441 \cdot 10^{-16}$
1.55	158	$-4.589 \cdot 10^{-16}$	$-2.294 \cdot 10^{-16}$	$4.441 \cdot 10^{-16}$
1.6	154	$-4.441 \cdot 10^{-16}$	$-2.220 \cdot 10^{-16}$	$3.140 \cdot 10^{-16}$
1.65	149	$-3.053 \cdot 10^{-16}$	$-1.221 \cdot 10^{-16}$	$2.220 \cdot 10^{-16}$
1.7	148	$-0.629 \cdot 10^{-16}$	0	0
1.75	141	$-3.238 \cdot 10^{-16}$	$-2.429 \cdot 10^{-16}$	$3.140 \cdot 10^{-16}$
1.8	140	$-1.998 \cdot 10^{-16}$	$3.330 \cdot 10^{-15}$	$1.187 \cdot 10^{-14}$
1.85	140	$-6.850 \cdot 10^{-15}$	0	$5.446 \cdot 10^{-10}$
1.9	130	$-1.230 \cdot 10^{-16}$	$7.030 \cdot 10^{-15}$	$4.407 \cdot 10^{-6}$
1.95	129	$-1.442 \cdot 10^{-16}$	$7.219 \cdot 10^{-15}$	$4.644 \cdot 10^{-3}$

## 2 - Реальный пример средней размерности: $m = 136, n = 285,$ $\text{rank } A = 136, X_+ \neq \emptyset, x^0 = 0.$

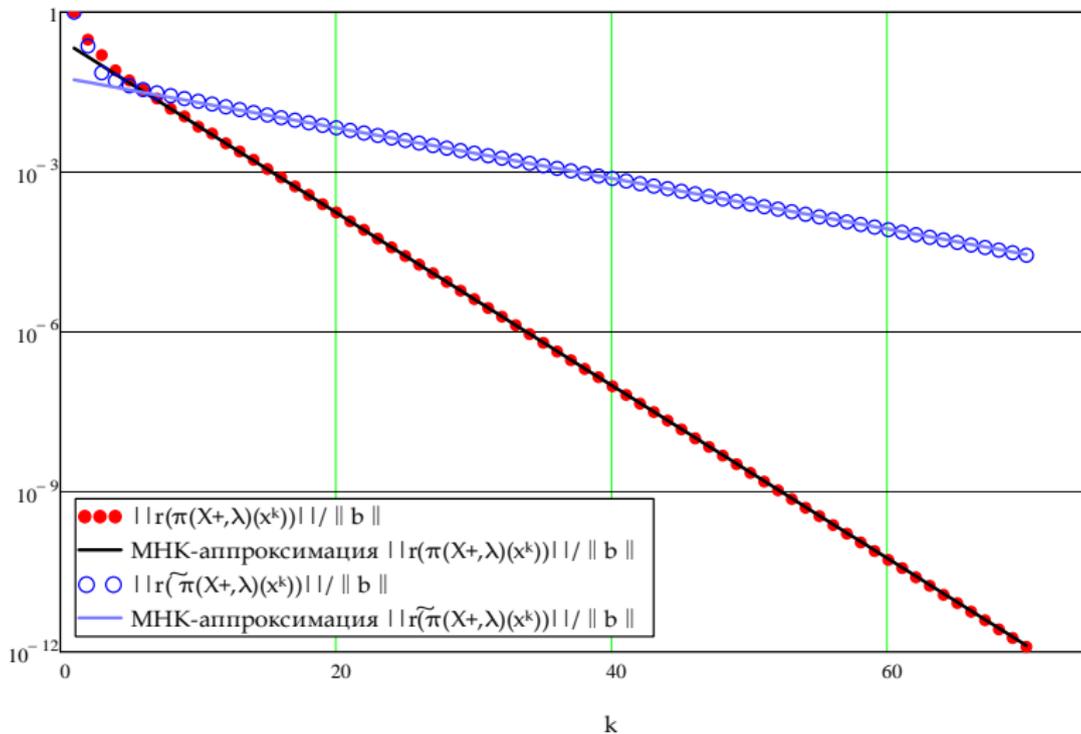
### Сравнительное исследование сходимости $\pi_{X_+, \lambda}$ и $\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}$

Экспериментальная оценка  $\bar{\theta}(\lambda)$  по последовательностям  $\{x^k\}_\lambda$  и  $\{\tilde{x}^k\}_\lambda$   
 Для всех представленных на графиках данных экспериментально подтвержден первый  
 порядок сходимости и выполнение условий  $\pi_{X, \lambda}(x) \not\geq 0 \forall x \in \{x^k\}, \tilde{\pi}_{X, \lambda}(\tilde{x}) \not\geq 0 \forall \tilde{x} \in \{\tilde{x}^k\}$



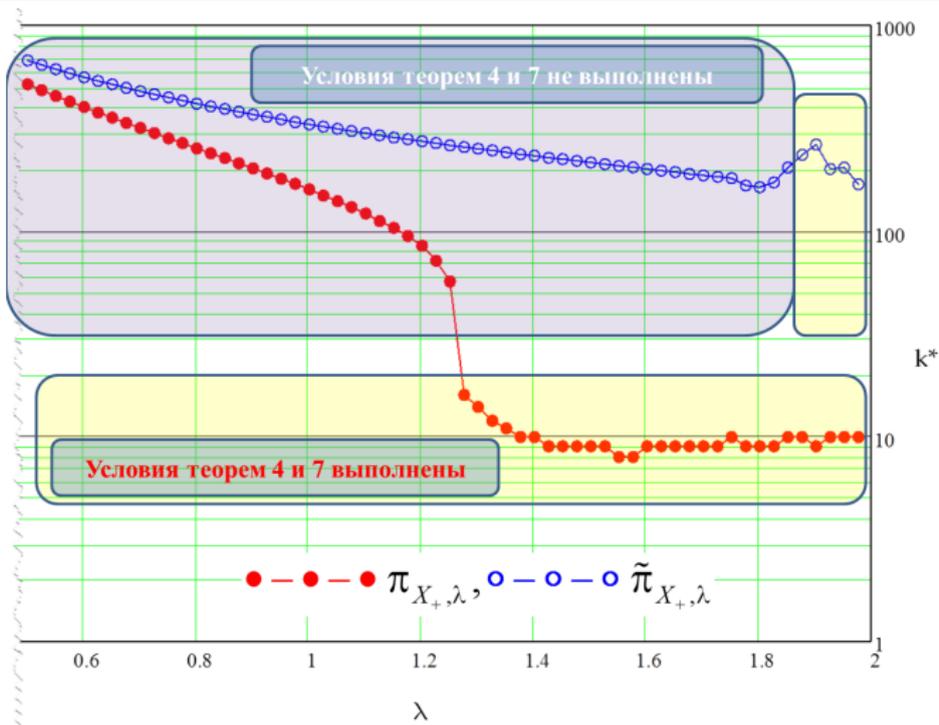
# Иллюстрация экспериментальной методики оценивания $\bar{\theta}(\lambda)$

$\lambda = 1.2$



2 - Реальный пример средней размерности:  $m = 136$ ,  $n = 285$ ,  
 $\text{rank } A = 136$ ,  $X_+ \neq \emptyset$ ,  $x^0 = 0$ .

Исследование числа шагов  $k^*$  отображений  $\pi_{X_+, \lambda}$  и  $\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}$

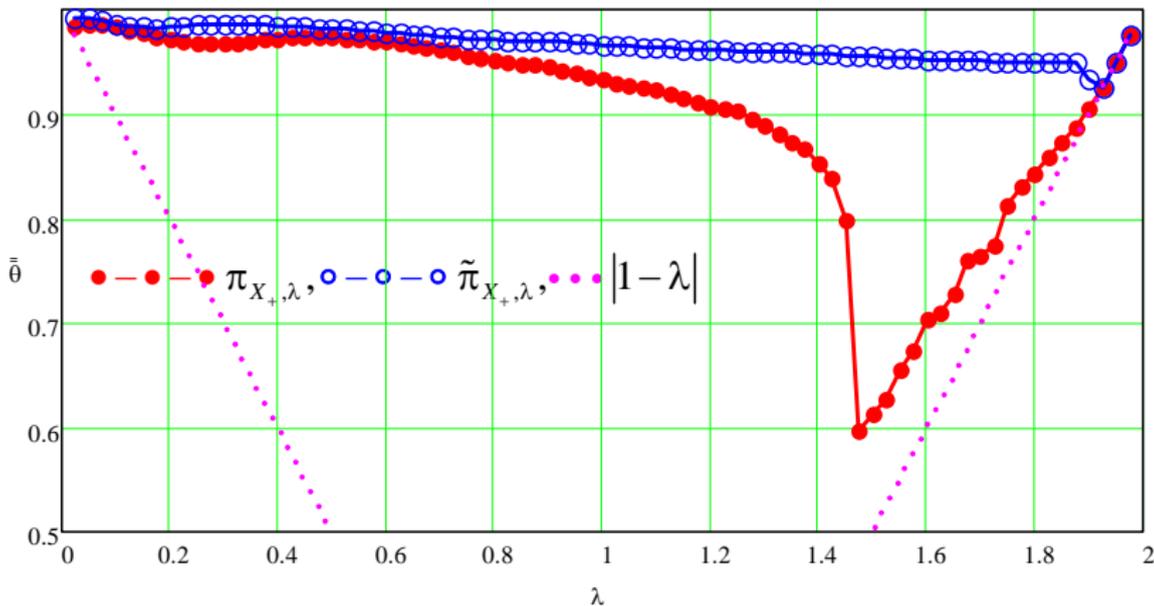


### 3 - Реальный пример средней размерности: $m = 497, n = 606,$ $\text{rank } A = 469, X_+ \neq \emptyset, x^0 = 0.$

#### Сравнительное исследование сходимости $\pi_{X_+, \lambda}$ и $\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}$

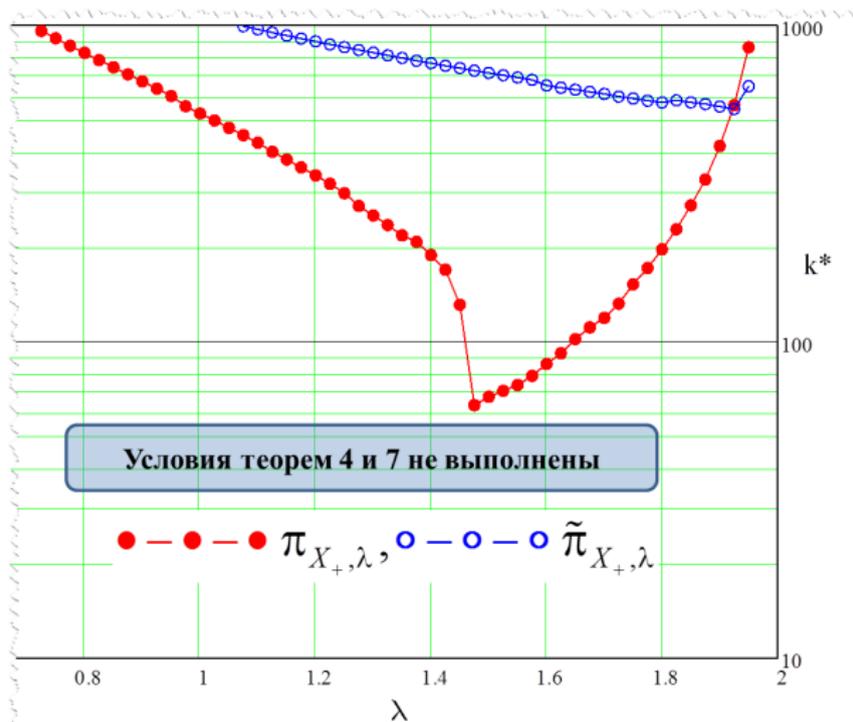
Экспериментальная оценка  $\bar{\theta}(\lambda)$  по последовательностям  $\{x^k\}_\lambda$  и  $\{\tilde{x}^k\}_\lambda$

Для всех представленных на графиках данных экспериментально подтвержден первый порядок сходимости и выполнение условий  $\pi_{X, \lambda}(x) \not\geq 0 \forall x \in \{x^k\}, \tilde{\pi}_{X, \lambda}(\tilde{x}) \not\geq 0 \forall \tilde{x} \in \{\tilde{x}^k\}$



3 - Реальный пример средней размерности:  $m = 497, n = 606,$   
 $\text{rank } A = 469, X_+ \neq \emptyset, x^0 = 0.$

Исследование числа шагов  $k^*$  отображений  $\pi_{X_+, \lambda}$  и  $\tilde{\pi}_{X_+, \lambda}$



## Заключительные замечания

Получен достаточно быстрый, глобально сходящийся допускающий простую вычислительную реализацию (включая распараллеливание) численный метод решения систем линейных алгебраических уравнений с условием неотрицательности.

### Планируемые направления дальнейших исследований:

- построение метода с оптимальным выбором параметра  $\lambda$
- тестирование метода на задачах большой размерности
- построение метода для решения задач с двухсторонними ограничениями

Спасибо за внимание!  
Вопросы?

# Новое итерационное отображение фейеровского типа для решения системы линейных алгебраических уравнений с условием неотрицательности

В.И. Ерохин

<sup>1</sup>Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия  
[vka@mil.ru](mailto:vka@mil.ru)



Семинар по оптимизации, машинному обучению  
и искусственному интеллекту «O&ML»

2 ноября 2023 г.