

О МЕТОДЕ СКОРОСТНОГО ГРАДИЕНТА

**А.Л.Фрадков
ИШМаш РАН, СПбГУ**

Семинар В.Н.Малоземова, 14 декабря 2023 г.

**Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.
Метод скоростного градиента и его приложения.
Автоматика и Телемеханика, 2021, №9, С.3-72,**

ВВЕДЕНИЕ. ПЛАН ДОКЛАДА

- 1-5. Основы метода СГ (постановка задачи, пример, синтез алгоритма управления, результат, доказательство)**
- 6. Робастность систем с СГ-алгоритмами**
- 7. Управление энергией**
- 8. Управление инвариантами**
- 9. Примеры**
 - 9.1 Управление маятником Капицы**
 - 9.2. Управление молекулой**
 - 9.3. Управление синхронизацией**
- 10. СГ-модели физических систем.**
- 11. Управление энтропией**
- 12. Другие задачи (негладкость, идентификация, ограничения...**

1 Метод скоростного градиента. Постановка задачи.

Кратко опишем метод скоростного градиента, см.

Фрадков А.Л. Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. 1979. № 9. С.90–101.

Рассмотрим нелинейную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = F(x(t), \theta(t), t), \quad (1)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния системы; $\theta \in R^N$ – вектор входов (управляющие или настраиваемые переменные).

Пусть цель управления задана следующим образом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0, \quad (2)$$

где $Q(x, t) \geq 0$ – неотрицательная гладкая целевая функция.

Задача: построить алгоритм управления/адаптации

$$\dot{\theta}(t) = ?,$$

обеспечивающий достижение цели (2).

2 Метод скоростного градиента. Синтез алгоритма управления/адаптации

1. Шаг 1. Вычислить скорость изменения целевой функции $Q(x, t)$ вдоль решений управляемой системы (1):

$$\dot{Q} = w(x, \theta, t) = \partial Q / \partial t + \nabla_x Q(x, t)^T F(x(t), \theta(t), t)$$

2. Шаг 2. Вычислить градиент по θ функции $w(x, \theta, t)$: $\nabla_{\theta} w(x, \theta, t)$.

3. Шаг 3. Использовать дифференциальный СГ-алгоритм:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla_{\theta} w(x, \theta, t), \quad (3)$$

или конечный СГ-алгоритм

$$\theta = -\psi(\nabla_{\theta} w(x, \theta, t)) \quad (4)$$

где $\Gamma > 0$ – положительно-определенная матрица усиления, а вектор-функция $\psi(x, \theta, t)$ составляет острый угол с СГ $\nabla_{\theta} w(x, \theta, t)$.

3 Метод скоростного градиента. Предположения

A1. (Регулярность) Функции F и ∇_w непрерывны по x, θ , кусочно непрерывны по t и локально ограничены равномерно по t , т. е. для любого $\beta > 0$ существует $C(\beta) > 0$ такое, что неравенство

$$|F(x, \theta, t)| + |\nabla_{\theta} w(x, \theta, t)| \leq C(\beta)$$

имеет место при $|x| \leq \beta, |\theta| \leq \beta$.

A2. Функция $Q(x, t)$ неотрицательна, равномерно непрерывна в множествах вида $\{(x, t) : |x| \leq \beta, t \geq 0\}$ и **радиально неограничена:**

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \inf_{t \geq 0} Q(x, t) = +\infty$$

A3. (Выпуклость) Функция $w(x, \theta, t)$ выпукла по θ , т. е. неравенство

$$w(x, \theta, t) - w(x, \bar{\theta}, t) \geq (\theta - \bar{\theta})^T \nabla_{\theta} w(x, \theta, t)$$

выполнено для всех $\theta \in \mathbb{R}^m, \bar{\theta} \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$.

A4. (Достижимость цели) Существуют вектор $\theta_* \in \mathbb{R}^m$ и непрерывная функция $\rho(Q)$ такая, что из $\rho(Q) = 0$ следует, что $Q = 0$ и для всех $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ верно $w(x, \theta_*, t) \leq -\rho(Q(x, t))$.

4 Метод скоростного градиента. Результат

Теорема 1. При выполнении A1-A4 все решения $(x(t), \theta(t))$ системы (1) (3) ограничены и цель

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0 \quad (5)$$

достигается для всех $x(0) \in \mathbb{R}^n, \theta(0) \in \mathbb{R}^m$.

Пример. Пусть ОУ имеет вид $dx/dt = (a + \theta)x$, ЦУ - стабилизация ОУ. Зададим $Q(x, t) = x^2$. Тогда

$$\dot{Q} = 2x\dot{x} = 2ax^2 + \theta x^2, \quad \nabla \dot{Q} = x^2, \quad \dot{\theta} = -\gamma x^2$$

Условия A1-A4 выполнены (A4: $\theta_* = -a - 1$).

5 Метод скоростного градиента. Доказательство.

Доказательство Теоремы 1. Из A1 следует существование решения системы (1), (3) на некотором временном интервале. Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V(x, \theta, t) = Q(x, t) + (\theta - \theta_*)^T \Gamma^{-1} (\theta - \theta_*) / 2. \quad (6)$$

Вычислим ее производную в силу системы (1), (3)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \theta, t) &= w(x, \theta, t) - (\theta - \theta_*)^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \leq w(x, \theta_*, t) + \\ &(\theta - \theta_*)^T \nabla_{\theta} w(x, \theta, t) - (\theta - \theta_*)^T \nabla_{\theta} w(x, \theta, t) \leq -\rho(Q(x, t)) \leq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Последнее неравенство означает, что $V(x(t), \theta(t), t)$ – невозрастающая функция времени. След-но, $V(x(t), \theta(t), t)$ ограничена, а значит, и $Q(x(t), t)$ ограничена. В силу радиальной неограниченности (условие A2) $x(t)$ ограничена. Далее из ограниченности $V(x(t), \theta(t), t)$ следует ограниченность $\theta(t)$. Следовательно, все решения системы (1), (3) ограничены, т. е. продолжимы на всю полуось $[0, \infty)$. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы заметим, что из доказанного неравенства (7) следует $\int_0^t \rho(Q(x(\tau), \tau)) d\tau < \infty$. Перепишывая (1) в интегральной форме $x(t) - x(\zeta) = \int_\zeta^t F(x(\tau), \theta(\tau), \tau) d\tau$ и учитывая ограниченность $x(t)$, $\theta(t)$, а также ограниченность $F(x, \theta, t)$ на любом компакте (условие A1), мы получаем, что вектор-функция $x(t)$ равномерно непрерывна по t . Далее, так как $\rho(Q)$ непрерывна по Q , а $x(t)$ равномерно непрерывна по t , функция $\rho(Q(x(t), t))$ равномерно непрерывна по t . Утверждение теоремы вытекает из леммы Барбалата.

Замечание 1. Доказательство сходимости конечного СГ-алгоритма аналогично, в качестве функции Ляпунова берется сама целевая функция $(Q(x, t))$.

Замечание 2. В ряде задач полезен конечно-дифференциальный СГ-алгоритм

$$\frac{d(\theta + \Phi(x, \theta, t))}{dt} = -\Gamma \nabla_{\theta} w(x, \theta, t) \quad (8)$$

где $\Gamma > 0$ – положительно-определенная матрица усиления, а вектор $\Phi(x, \theta, t)$ составляет при каждом $t \geq 0$ острый угол с СГ $\nabla_{\theta} w(x, \theta, t)$.

6 Робастность СГ-алгоритмов. Пример

Пример 2. Пусть ОУ имеет вид $dx/dt = (a + \theta)x + f(t)$,
ЦУ - стабилизация ОУ. Зададим $Q(x, t) = x^2$. Тогда

$$\dot{Q} = 2x\dot{x} = 2ax^2 + \theta x^2 + 2xf(t), \quad \nabla \dot{Q} = x^2, \quad \dot{\theta} = -\gamma x^2$$

Условие А4 не выполнено.

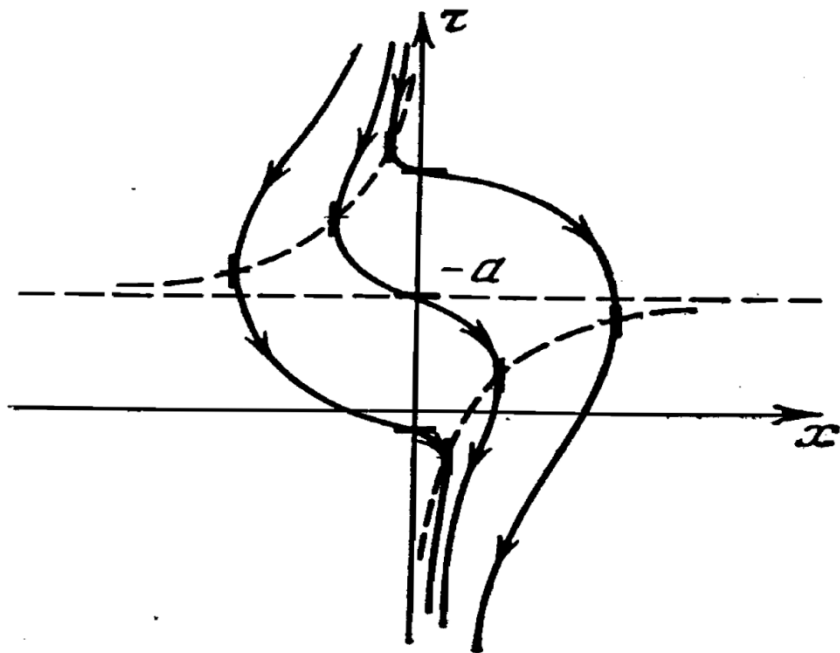


Рис. 2.3.

В. Н. ФОМИН, А. Л. ФРАДКОВ, В. А. ЯКУБОВИЧ

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

6 Робастность СГ-алгоритмов

Рассмотрим объект управления, находящийся под действием возмущений

$$\dot{x}(t) = F(x(t), \theta(t), t) + f(t), \quad (9)$$

где $f(t)$ удовлетворяет условию $\|f(t)\| \leq \Delta_f$. В этом случае цель (2) не может быть достигнута и ставится задача достижения ослабленной цели

$$Q(x(t), t) \leq \Delta, \quad (10)$$

для всех $t > \bar{t}$, превышающих некоторый порог \bar{t} и для заданного уровня погрешности $\Delta > 0$. Регуляризованные СГ-алгоритмы:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla_{\theta} w(x, \theta, t) - \alpha(\theta - \bar{\theta}), \quad (11)$$

где $\alpha > 0$ - коэффициент регуляризации, а $\bar{\theta}$ - априорная оценка вектора θ_* .

Теорема 2. Пусть $Q(x, t)$ - неотрицательная радиально неограниченная функция

Тогда в системе (9),(11) траектории ограничены и достигается цель управления (10) при

$$\Delta = 2(\Delta_f^2/\rho + \alpha\|\theta_* - \bar{\theta}\|^2)/\rho$$

Доказательство. Вычисляем производную функции $V(x, \theta, t)$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \theta, t) &\leq -\rho Q(x, t) + \nabla Q^T f(t) + (\theta - \theta_*)^T (-\alpha(\theta_* - \bar{\theta})) \leq \\ &-\rho Q(x, t)/2 + \Delta_f^2/(2\rho) - \alpha\|\theta_* - \theta\|^2 - \alpha\|\theta - \theta_*\| \|\theta_* - \bar{\theta}\| \leq \\ &-\rho Q(x, t)/2 - \alpha\|\theta_* - \theta\|^2/2 + d, \end{aligned} \quad (12)$$

где $d = \Delta_f^2/(2\rho) + \alpha\|\theta_* - \bar{\theta}\|^2/2$. Это конец доказательства, поскольку все решения замкнутой системы должны покинуть множество, где $\dot{V} > 0$ которое содержит точки x, θ где $Q(x, t) > 2d/\rho$.

Замечание. Случай, когда в качестве возмущений выступает нестационарность параметров может быть сведен к случаю аддитивных возмущений. При соответствующих предположениях так можно рассмотреть нестационарные задачи.



7. Управление энергией

7.1. Управление энергией консервативных систем

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad H = H_0(q, p) + H_1(q, p)u$$

$H_0(q, p)$ – энергия свободной системы,

$H_1(q, p)$ – гамильтониан взаимодействий,

$u=u(t)$ – управление (силы, поля, параметры).

Цель управления (ЦУ): $H_0(q(t), p(t)) \rightarrow H_* \quad (t \rightarrow \infty)$.

Задача: Найти алгоритм управления $u=U(q,p)$, обеспечивающий достижение ЦУ для $x(0) \in \Omega$, $x = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$.

Трудности: 1. Слабость управления $|u(t)| \leq \varepsilon$, ε – мало

2. Нелокальность задачи (несводимость к стабилизации по части переменных)

Алгоритмы управления энергией

$$\text{ЦФ: } Q(x) = \frac{1}{2} (H(x) - H_*)^2, \quad x = [q, p] \quad \dot{Q} = (H - H_*) \dot{H}$$

$$u = -\gamma \{H_0, H_1\} (H - H_*), \quad \{H_0, H_1\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \frac{\partial H_1}{\partial p_i} - \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \frac{\partial H_1}{\partial q_i} \right)$$

Теорема 3.

1. Пусть $\{H_0, H_1\} \neq 0$ при $x \in \Omega = \{x : Q(x) \leq Q_0\}$.

Тогда $H(x(t)) \rightarrow H_*$ для всех $x_0 \in \Omega$.

2. Пусть $\{H_0, H_1\} = 0$ на счетном множестве.

Тогда либо $H(x(t)) \rightarrow H_*$ либо $x(t) \rightarrow \bar{x}$, где

$\bar{x} \in \Omega$ – равновесие свободной системы

8. Обобщение: Стабилизация инвариантов движения

$$\text{ОУ: } \dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x), \quad y \in R^l, \quad (1)$$

$$\text{ЦУ: } Q(x(t)) \rightarrow 0, \quad Q(x) = \frac{1}{2} \|h(x)\|^2 \quad (2)$$

$$\text{АСГ: } u = -\gamma g(x)^T \nabla h(x) y \quad (3a)$$

$$u = -\gamma \text{sign} \left[g(x)^T \nabla h(x) y \right] \quad (3b)$$

Пример.

Управляемая гамильтонова система $H = H_0 + \bar{H}^T u$,

ЦУ: $G(x(t)) \rightarrow G_*$, G – набор инвариантов: $\{H_0, G\} = 0$.

$$u = -\gamma \left\{ \bar{H}, G \right\} (G - G_*).$$

Теорема (Shiriaev, Fradkov, 2000)

Пусть $f, g, \nabla h$ и их 1-е и 2-е производные непрерывны и ограничены на $\Omega = \{x : Q(x) \leq Q_0\}$.

Пусть $l = m$, $Z(x) = \nabla h(x)^T g(x)$.

A1. $\dot{Q}(x, u) \leq 0$ при $u = 0$ (пассивность)

$\dot{Q}(x, u) = 0$ при $Z(x) = 0$, $x \in \Omega$

A2 $\dim S(x) = l$ при $x \in \Omega$, $Q(x) = 0$,

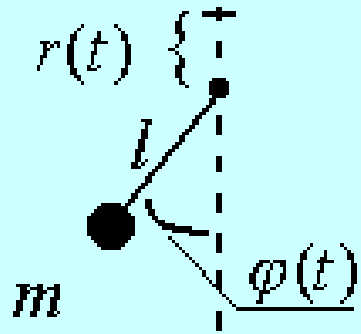
где $S(x) = \text{span} \{Z(x), L_f Z(x), L_f^2 Z(x), \dots\}$, $L_f Z = f^T \nabla Z$

A3. $\exists \varepsilon > 0 : \forall$ связный компонент D_ε ограничен,

где $D_\varepsilon = \Omega \cap \{x : |\det Z(x)^T Z(x)| < \varepsilon\}$

Тогда ЦУ $Q(x(t)) \rightarrow 0$ достигается $\forall x(0) \in \Omega$.

Пример 9.1. Маятник Капицы с обратной связью



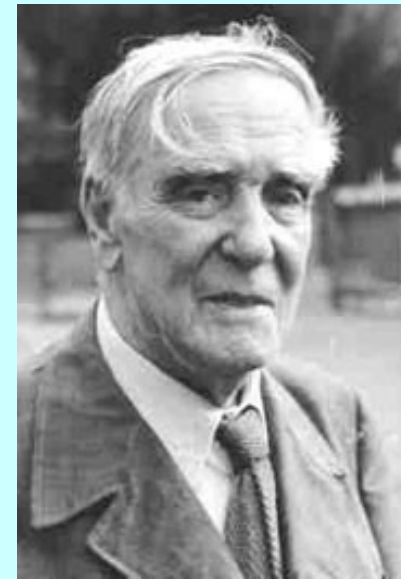
$$\ddot{\varphi} + \rho \dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = u \sin \varphi,$$

$$H = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \omega_0^2 (1 - \cos \varphi).$$

$m=1,$
 $l=1$

а) Классический маятник Капицы:

$$r(t) = A \sin \omega t \Rightarrow u(t) = -A \omega^2 \sin \omega t$$



**П.Л.Капица
(1894-1984)**

Верхнее положение маятника устойчиво

при $A^2 \omega^2 > 2 \omega_0^2$

Блехман И.И.

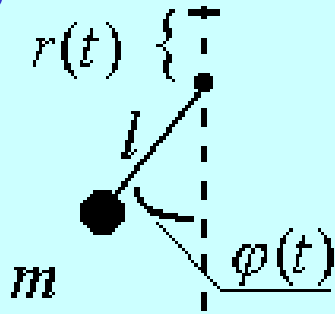
Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.

Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.



Блехман И.И.(1928-2021)

Пример 9. 1. Маятник Капицы с обратной СВЯЗЬЮ



$$\ddot{\varphi} + \rho \dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = u \sin \varphi,$$

$$H = 0.5 \dot{\varphi}^2 + \omega_0^2 (1 - \cos \varphi).$$

б) Управление с обратной связью

Цель: $H(t) \rightarrow H_*$, $H_* = 2mgl$. $Q(x) = (H - H_*)^2$

Алгоритм скоростного градиента:

$$u(t) = -\gamma \text{sign}[(H(t) - H_*) \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t)]$$

$$\rho = 0 \Rightarrow H(t) \rightarrow H_*, \quad \varphi(t) \rightarrow \pm\pi \quad \forall \gamma > 0.$$

(Shiriaev A.S., O. Egeland, H. Ludvigsen, A.L. Fradkov,
Systems & Control Letters 44 (1) (2001) pp. 45-56.)

$$\rho > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) \sim (\gamma / \rho)^2, \quad \gamma \sim \rho \sqrt{H_*}.$$

(Фрадков, 2003)

Пример 9. 2. Управление диссоциацией 2-атомной молекулы

Классический осциллятор Морзе:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) + \mu(q)E(t), \quad V(q) = D \left[1 - e^{-\gamma(q-q_0)} \right]^2$$

Квантовый осциллятор Морзе:

$$H = \left[-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) + \mu(q)E(t) \right], \quad \mu(q) = d q.$$



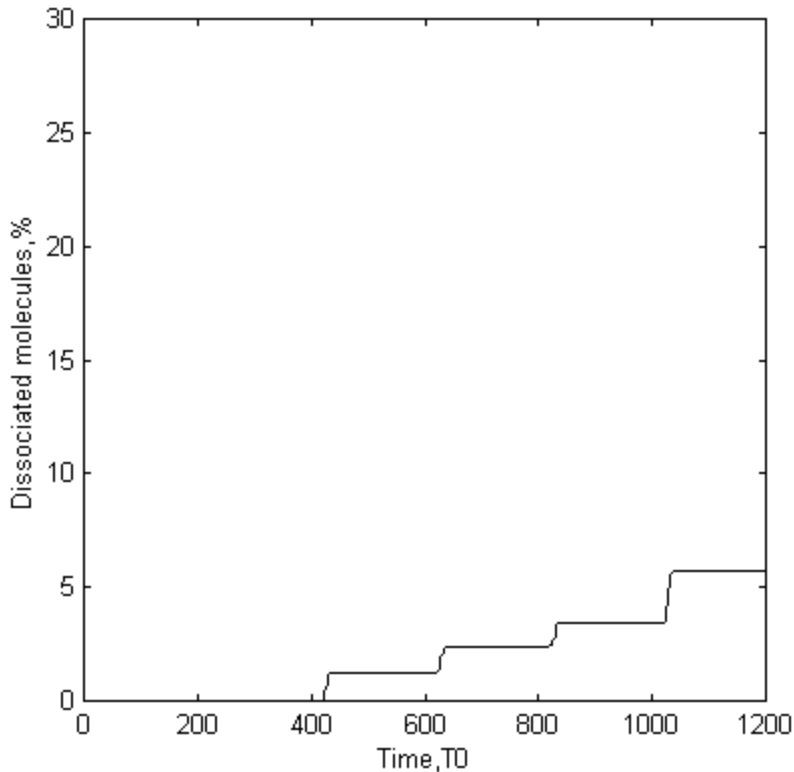
ЦУ: $H(q(t), p(t)) \rightarrow H_*$, H_* – энергия диссоциации

Пример: фтороводород (HF)

$$d = 0.7876 \frac{D}{a_0}, \quad D = 6.125 \text{ eV} = 0.25 \text{ а.е.}$$

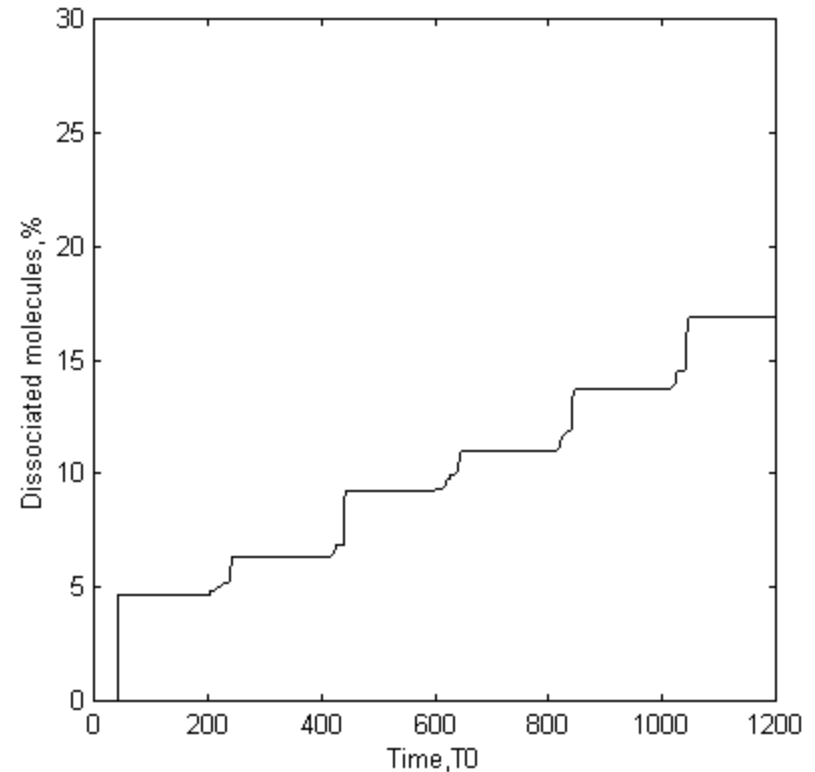
$$\gamma = 1.1741 a_0^{-1}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} - \text{а.е. длины}$$

Управление диссоциацией двухатомной молекулы



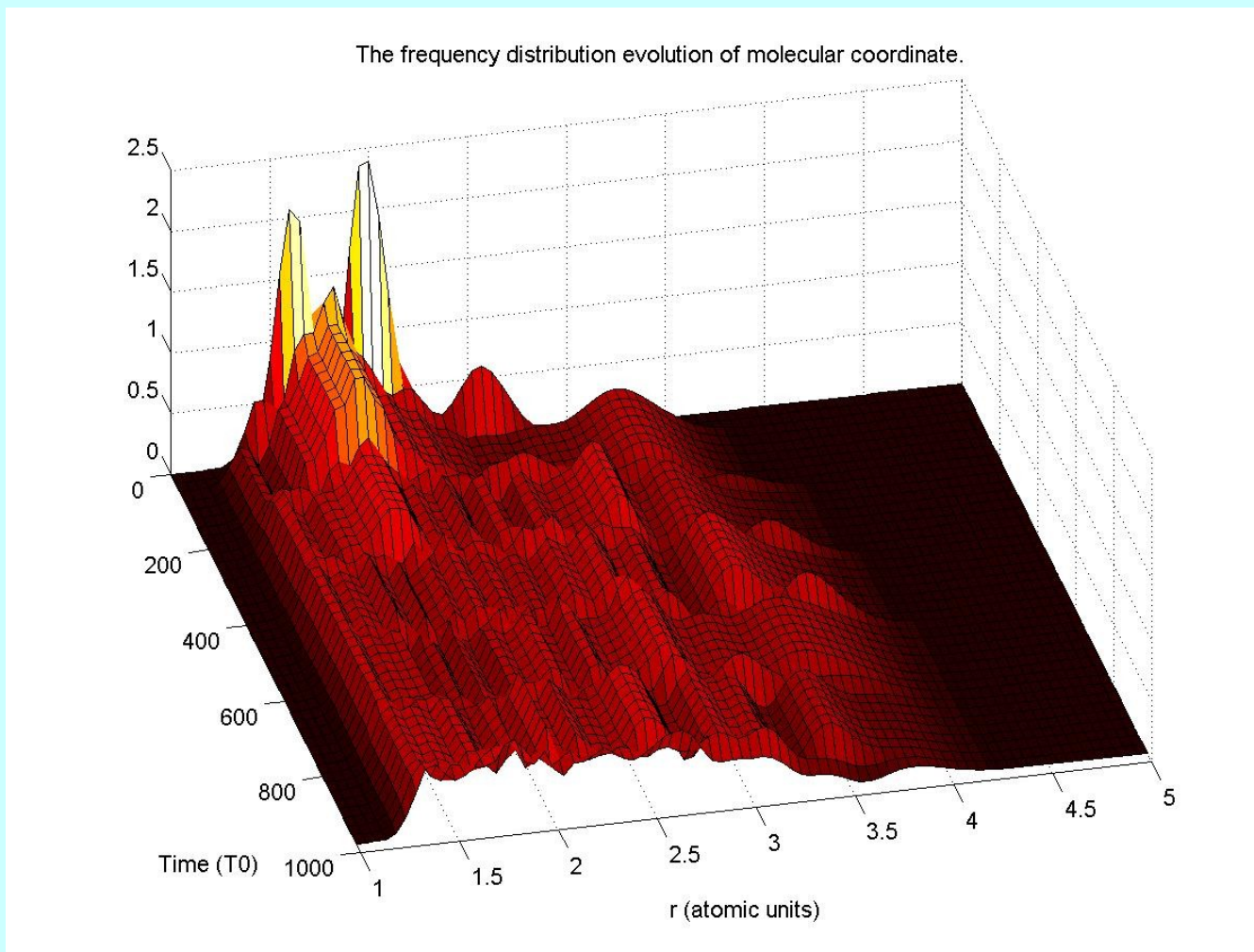
Линейный чирпинг:

$$E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t - \beta t^2)$$



Скоростной градиент:

$$E(t) = E_0 \text{sign } p(t)$$



(Ananyevskiy M., Fradkov A., Efimov A., Krivtsov A., PhysCon'03)

Пример 9.3. Управление синхронизацией. Модель связанных маятников

Andrievsky B.R., Fradkov A.L. Feedback resonance in single and coupled 1-DOF oscillators // Intern. J of Bifurcation and Chaos, 1999, N 10, pp.2047-2058.

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1(t) + \rho\dot{\varphi}_1(t) + \omega_0^2 \sin \varphi_1(t) + k(\varphi_1 - \varphi_2) = u(t) + f_1(t), \\ \ddot{\varphi}_2(t) + \rho\dot{\varphi}_2(t) + \omega_0^2 \sin \varphi_2(t) + k(\varphi_2 - \varphi_1) = f_2(t) \end{cases}$$

- $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2$) – углы отклонения маятников;
- $u(t)$ – управляющий момент;
- f_1, f_2 – возмущения;
- k – коэффициент связи (жесткость пружины);



Синтез алгоритма синхронизации

$$H(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \omega^2 (1 - \cos \varphi_1) + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_2^2 + \omega^2 (1 - \cos \varphi_2) + \frac{k}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

Целевая функция: $Q(x) = \alpha Q_\varphi(x) + (1 - \alpha) Q_H(x)$

где $Q_\varphi(x) = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2$, $Q_H(x) = \frac{1}{2} (H(x) - H_*)^2$,

$0 < \alpha < 1$ – весовой коэффициент

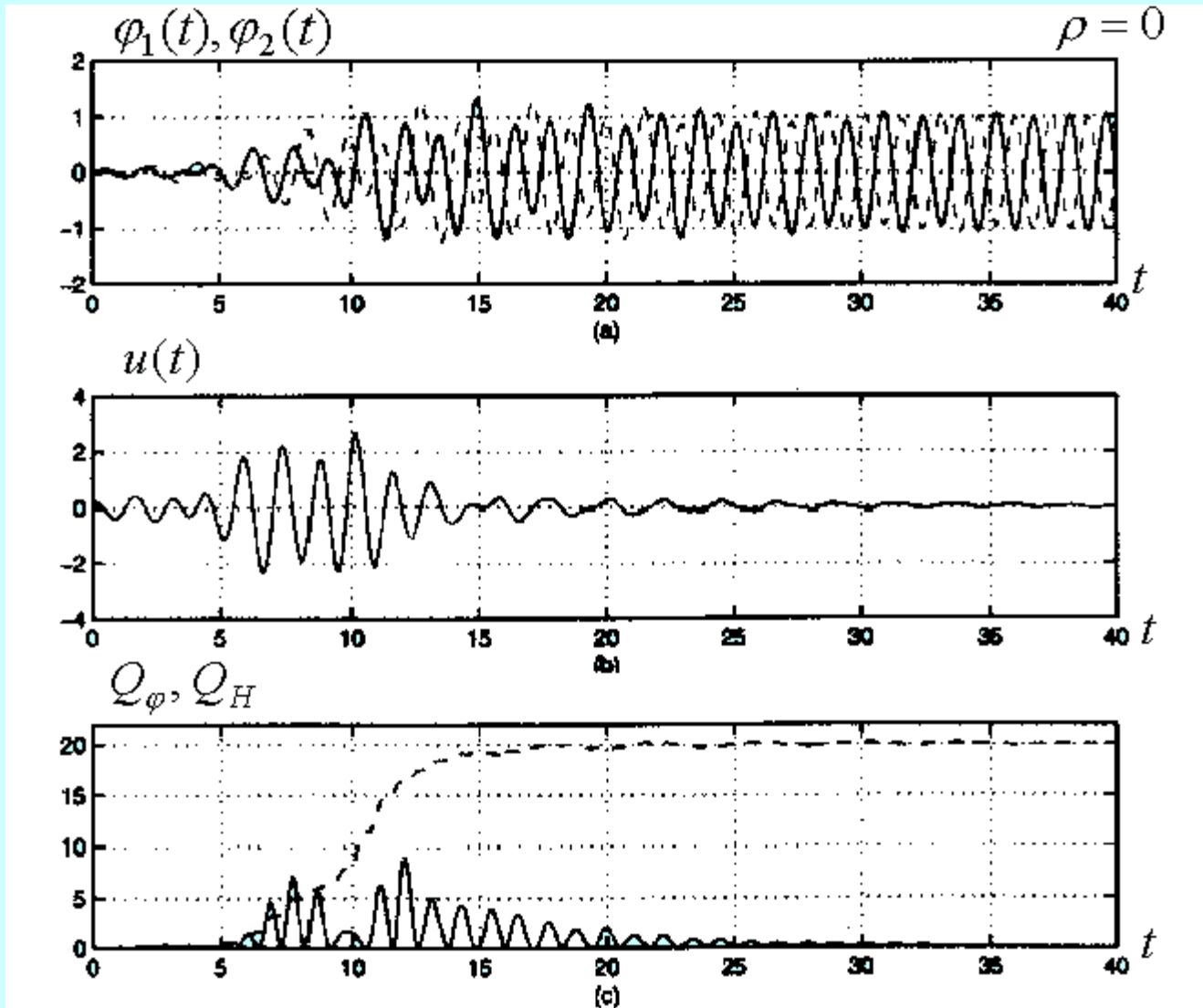
СГ-алгоритм синхронизации:

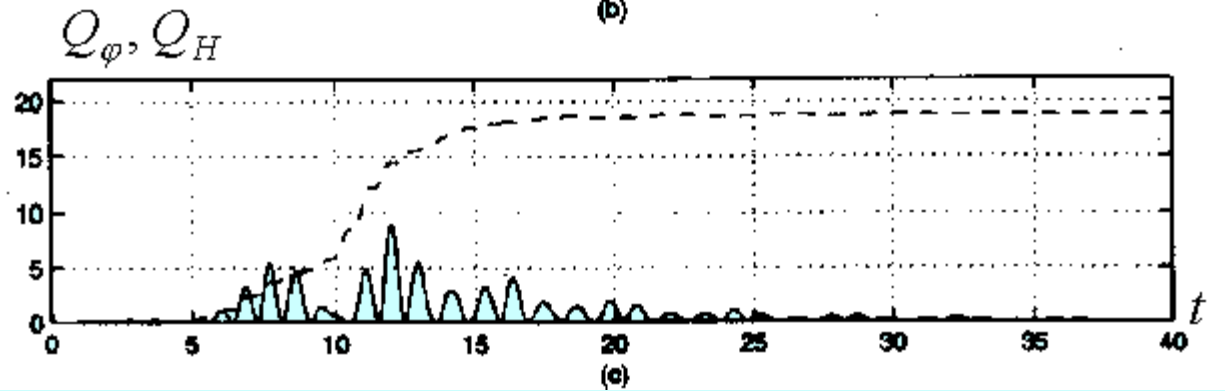
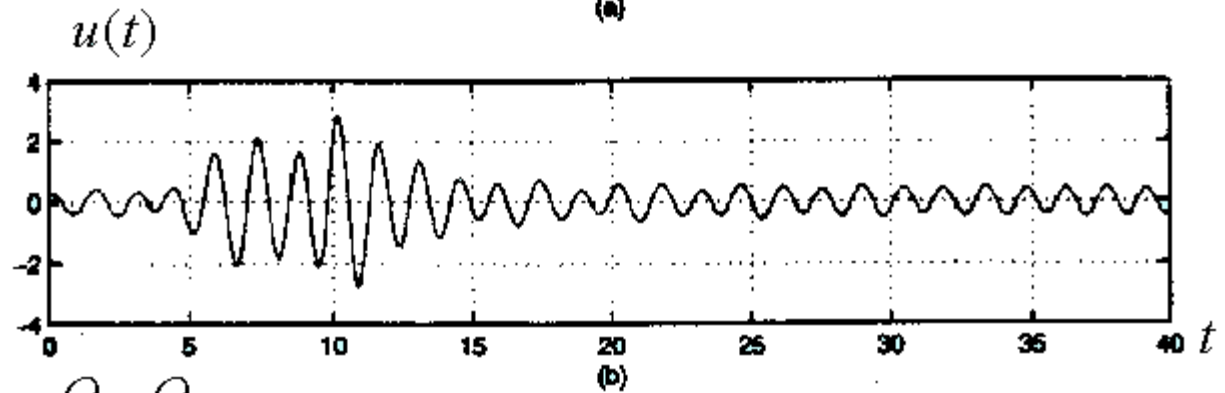
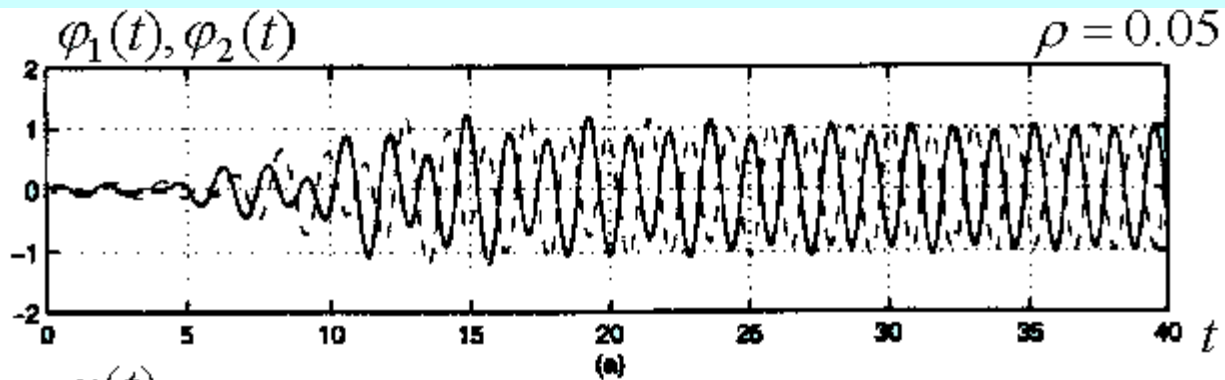
$$u(t) = -\gamma [\alpha \delta_\varphi(t) + (1 - \alpha) \delta_H(t)] \dot{\varphi}_1(t),$$

$$\delta_\varphi = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2, \quad \delta_H = H - H_*,$$

$\gamma > 0$ – коэффициент усиления

Результаты моделирования





$$u_\infty \sim \rho \sqrt{H^*}$$



ПОЛНАЯ ЭНЕРГИЯ

$$H(x) = \sum_{i=1}^N H_i(x), \quad \text{where}$$

$$\begin{cases} H_i(x) = 0.5\dot{\varphi}_i^2 + \omega_0^2(1 - \cos \varphi_i) + 0.5k(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2, \\ \quad \quad \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \\ H_N(x) = 0.5\dot{\varphi}_N^2 + \omega_0^2(1 - \cos \varphi_N). \end{cases}$$

$$x = [\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \dots, \varphi_N, \dot{\varphi}_N]^T \in R^{2N}$$



СИНТЕЗ АЛГОРИТМА СКОРОСТНОГО ГРАДИЕНТА

Вспомогательные целевые функции:

$$Q_{\varphi}(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2} \delta_{\varphi}^2, \quad Q_H(x) = \frac{1}{2} \left(H(x) - H^* \right)^2,$$

where $\delta_{\varphi} = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$, $H(x)$ - полная энергия,

H^* - желаемая полная энергия

Полная целевая функция:

$$Q(x) = \alpha Q_{\varphi}(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) + (1 - \alpha) Q_H(x),$$

α – весовой коэффициент, $0 \leq \alpha \leq 1$

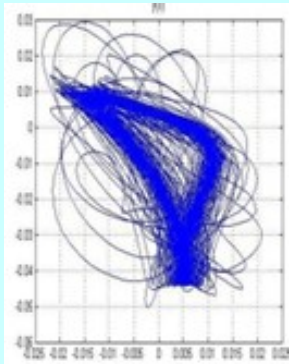
Управление кратной синхронизацией роторов

I.I. Blekhman, A.L.Fradkov, O.P.Tomchina, D.E.Bogdanov. Self-Synchronization and Controlled Synchronization: General Definition and Example Design. Mathematics and Computers in Simulation, 2002, V.58, Issue 4-6, pp.367-384.

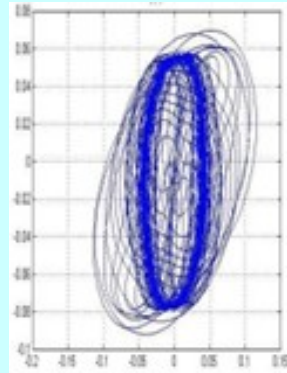
О.П.Томчина, И.М.Кудрявцева, В.А.Галицкая. Алгоритмы управления кратной синхронизацией для двухроторных вибрационных установок. В кн.: **Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления. Вибрационная механика/Под ред. В. В.Белецкого, Д. А.Индейцева, А. Л.Фрадкова. СПб.: Наука, 2009**

ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ:

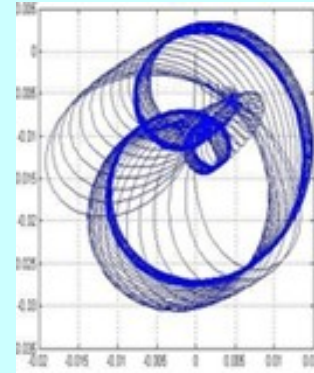
$$Q(z) = 0.5 \left[(1 - \alpha)(H - H^*)^2 + \alpha(n_1 \dot{\phi}_1^2 + n_2 \dot{\phi}_2^2) \right]$$



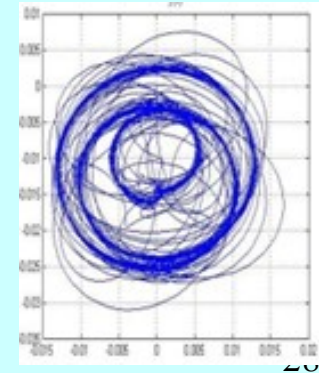
Кратность 1:2



Кратность 1:3



Кратность 2:3

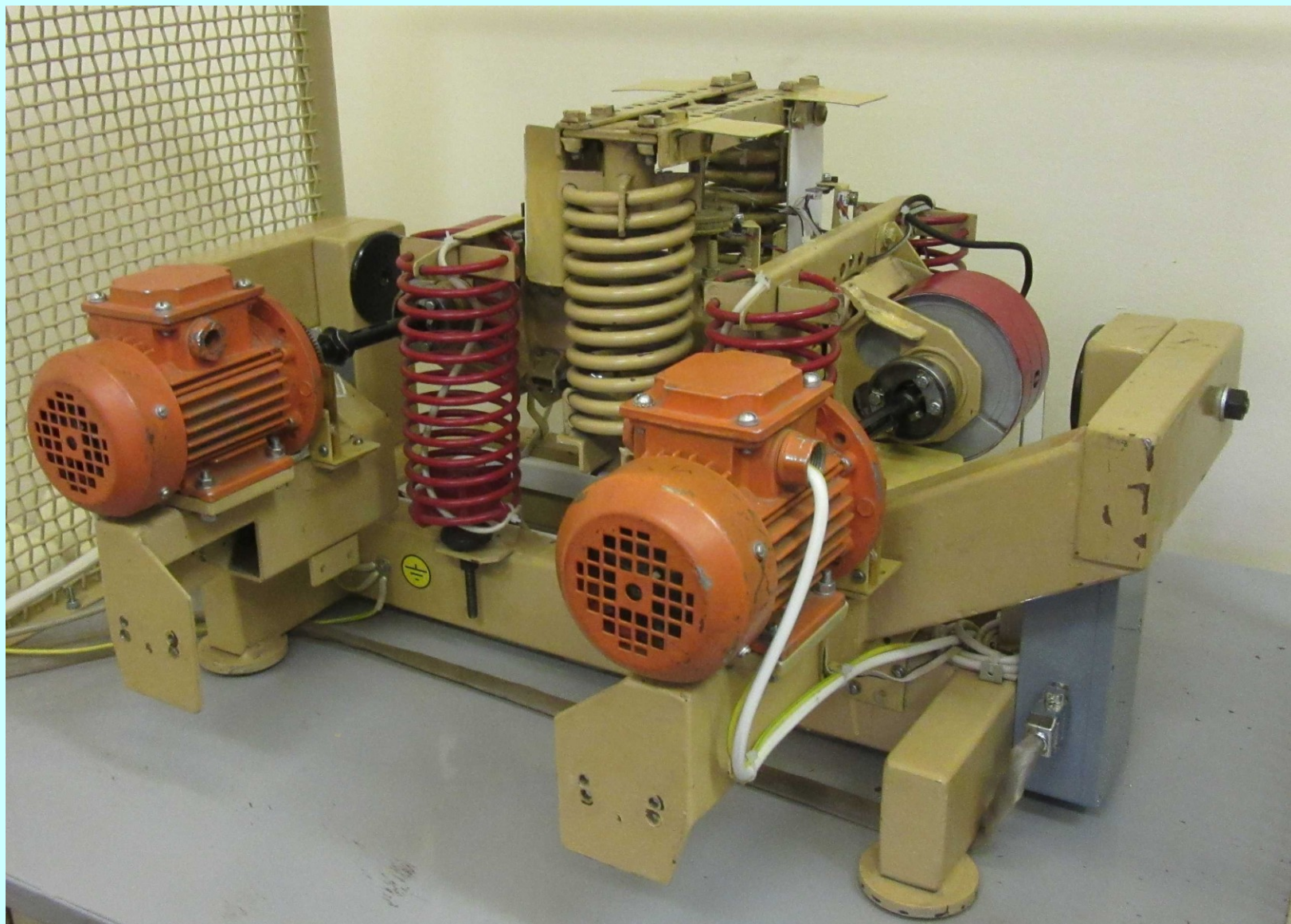


Кратность 3:4

Двухроторный учебно-исследовательский мехатронный вибрационный комплекс ИПМаш РАН



Двухроторный учебно-исследовательский мехатронный вибрационный стенд



10. СГ-модели физических систем

Пусть $x(t) \in \mathcal{R}$ – состояние системы.

Ищем закон движения в виде

$$dx/dt = u$$

Принцип скоростного градиента: среди всех возможных движений в системе реализуются лишь те, для которых входные переменные изменяются пропорционально скоростному градиенту от некоторого «целевого» функционала Q_t .

$u(t)$ – скоростной градиент от $Q(x)$.

А.Л.Фрадков. Кибернетическая физика.

СПб. Наука, 2003.

10. СГ-модели физических систем

Пример 8.1. Движение материальной точки в потенциальном поле. В качестве первого примера рассмотрим задачу описания движения материальной точки в потенциальном поле. Переменными состояния здесь являются координаты точки, т. е. $x = \text{col}\{x_1, x_2, x_3\}$. Выберем в качестве целевой функции потенциал поля $Q(x)$ и выведем скоростно-градиентный закон движения в дифференциальной форме. Вычислим скоростной градиент:

$$\dot{Q} = [\nabla_x Q(x)]^T u, \quad \nabla_u \dot{Q} = \nabla_x Q(x).$$

Выбирая диагональную положительно-определенную матрицу Γ в виде $\Gamma = m^{-1}I_3$, где $m > 0$ — параметр, I_3 — единичная 3×3 матрица, приходим к классическому закону динамики Ньютона: $\dot{u} = -m^{-1}\nabla_x Q(x)$, или

$$m\ddot{x} = -\nabla_x Q(x). \quad (8.5)$$

При этом параметр m интерпретируется как масса точки. \square

10. СГ-модели физических систем

Пример 10.2. Волновое уравнение и уравнение теплопроводности.

$$Q_t(x) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla_r x(r, t)|^2 dr,$$

Пример 10.3. Динамика вязкой жидкости

$$Q_t = \int_{\Omega} p(r, t) dr + \nu_0 \int_{\Omega} |\nabla_r v(r, t)|^2 dr,$$



11. Управление энтропией

2-й закон термодинамики и принцип максимума энтропии (MaxEnt)

Edwin Jaynes, (Phys.Rev. 1957):

**Entropy of any physical system tends to increase
until it achieves its maximum value under
constraints imposed by other physical laws.**

**2-й Закон и MaxEnt говорят,
КУДА и КАК ДАЛЕКО идет эволюция.**

Вопрос: КАК идет эволюция?

Предложение: «энтропийный принцип скоростного градиента»:

**Система эволюционирует в направлении
скоростного градиента энтропии при
соблюдении ограничений, наложенных
другими физическими законами**

**A.L. Fradkov. Speed-gradient Entropy Principle for
Nonstationary Processes. Entropy, 2008, 10(4), 757-764.**

Fradkov A.L., Shalymov D.S.

**Speed Gradient and MaxEnt Principles for Shannon and
Tsallis Entropies. Entropy 2015, 17(3), 1090-1102⁵**

11.1. Динамика MaxEnt систем N частиц: Сохранение массы

Система: N идентичных частиц, лежащих в m ячейках; N_i – число частиц в i -й ячейке

Закон сохранения массы:
$$\sum_{i=1}^m N_i = N$$

Энтропия: $S = \sum_{i=1}^m N_i \ln N_i$, **MaxEnt:** $N_i^* = N / m$

Динамика: $\frac{d}{dt} N_i = u(t)$; $u(t) = ?$

Целевая функция: $Q(x) = -S$

Speed: $\dot{S} = \sum_{i=1}^m [\dot{N}_i \ln N_i + N_i (\dot{N}_i / N_i)] = \sum_{i=1}^m u_i (\ln N_i + 1)$

Ограничения: $\sum_{i=1}^m \dot{N}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m u_i = 0$

Алгоритм управления: $u_i = \gamma (-\ln N_i + \lambda)$

Динамика системы: $\dot{N}_i = \frac{\gamma}{m} \sum_{i=1}^m \ln N_i - \gamma \ln N_i$

Теорема: $\lim N_i(t) = N / m, \lim S(x(t)) = S_{MaxEnt}$

11.2 Динамика MaxEnt систем N частиц: Сохранение массы и энергии

System: N identical particles distributed over m cells

N_i - number of particles in i th cell, $\mathbf{x} = [N_1, \dots, N_m]^T$

Закон сохранения массы :
$$\sum_{i=1}^m N_i = N$$

Закон сохранения энергии:
$$\sum_{i=1}^m N_i E_i = E_*$$

MaxEnt – Распределение Гиббса:

$$N_i^* = NZ^{-1} \exp(-\lambda_1 E_i), \quad Z = \sum_{i=1}^m \exp(-\lambda_1 E_i)$$

Динамика:
$$\frac{d}{dt} N_i = u(t); \quad u(t) = ?$$

Ограничения:
$$\sum_{i=1}^m u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m u_i E_i = 0.$$

Алг-м управления:
$$u_i = \gamma(-\ln N_i + \lambda_1 E_i + \lambda_2), \quad \gamma > 0$$

Множители:
$$\lambda_1 = \frac{m(\sum_{i=1}^m E_i \ln N_i) - (\sum_{i=1}^m E_i)(\sum_{i=1}^m \ln N_i)}{m \sum_{i=1}^m E_i^2 - (\sum_{i=1}^m E_i)^2},$$

$$\lambda_2 = \sum_{i=1}^m \ln N_i - \lambda_1 \sum_{i=1}^m E_i$$

$$\frac{d}{dt} N(t) = \gamma P_L \ln N(t), \quad L = \{N : \sum_{i=1}^m N_i = 0, \sum_{i=1}^m E_i N_i = 0\}$$

Теорема:
$$\lim N_i(t) = N_i^*, \quad \lim \mathcal{S}(x(t)) = \mathcal{S}_{MaxEnt}$$

12. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

Негладкие задачи:

М. V. Dolgopolik, A. L. Fradkov. Finite-Differential Nonsmooth Speed-Gradient Control: Stability, Passivity, Robustness.

SIAM J. Control & Optimization, 2021, 59(2).

Распределенные системы:

Andrievsky B., Orlov Y., Fradkov A.L.

On robustness of the speed-gradient sampled-data energy control for the sine-Gordon equation:

The simpler the better. Comm. Nonlinear Science and Numerical Simulation (CNSNS), V.117, 2, 2023.