Функции Ляпунова-Брэгмана

в адаптивном управлении

А..Л.Фрадков
ИПМаш РАН, СПбГУ

Семинар В.Н.Малоземова, 4 мая 2023 г.

Цель доклада - продемонстрировать применение дивергенции Брэгмана к нелинейному адаптивному управлению. Использование дивергенции Брэгмана приводит к новому классу функций Ляпунова в адаптивном управлении, которые можно назвать функциями Ляпунова-Брэгмана. Предложена расширенная схема построения алгоритмов управления и исследованы свойства синтезированных систем управления при наличии возмущений и переменных во времени параметров.

2 Метод скоростного градиента. Постановка задачи.

Кратко опишем метод скоростного градиента, см.

Фрадков А.Л. Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. 1979. No 9. С.90–101.

Рассмотрим нелинейную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = F\big(x(t), \theta(t), t\big), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ вектор состояния системы; $\theta \in R^N$ вектор входов (управляющие или настраиваемые переменные).

Пусть цель управления задана следующим образом:

$$\lim_{t\to\infty} Q(x(t), t) = 0, \tag{2}$$

где $Q(x, t) \geq 0$ – – неотрицательная гладкая целевая функция.

Задача: построить алгоритм управления/адаптации

$$\dot{\theta}(t) =?,$$

обеспечивающий достижение цели (2).

3 Метод скоростного градиента. Синтез алгоритма управления/адаптации

1. Шаг 1. Вычислить скорость изменения целевой функции $Q(x,t)$ вдоль решений управляемой системы (1):

$$\dot{Q} = w(x,\theta,t) = \partial Q/\partial t + \nabla_x Q(x,t)^{\mathrm{T}} F\big(x(t),\theta(t),t\big)$$

.

2. Шаг 2. Вычислить градиент по θ функции $w(x,\theta,t)$: $\nabla_\theta w(x,\theta,t)$.
3. Шаг 3. Использовать дифференциальный СГ-алгоритм:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla_\theta w(x,\theta,t), \tag{3}$$

или конечно-дифференциальный СГ-алгоритм

$$\frac{d\big(\theta + \Phi(x,\theta,t)\big)}{dt} = -\Gamma \nabla_\theta w(x,\theta,t) \tag{4}$$

где $\Gamma > 0$ положительно-определенная матрица усиления, а вектор-функция $\Phi(x,\theta,t)$ составляет острый угол с СГ $\nabla_\theta w(x,\theta,t)$.

4 Метод скоростного градиента. Предположения

A1. (Регулярность) Функции F и ∇_w непрерывны по x, θ, кусочно непрерывны по t и локально ограничены равномерно по t, т. е. для любого $\beta > 0$ существует $C(\beta) > 0$ такое, что неравенство

$$|F(x,\theta,t)| + |\nabla_\theta w(x,\theta,t)| \leq C(\beta)$$

имеет место при $|x| \leq \beta$, $|\theta| \leq \beta$.

A2. Функция $Q(x,t)$ неотрицательна, равномерно непрерывна в множествах вида $\{(x,t) : |x| \leq \beta, t \geq 0\}$ и **радиально неограничена:**

$$\lim_{x\to\infty} \inf_{t\geq 0} Q(x,t) = +\infty$$

A3.(Выпуклость) Функция $w(x,\theta,t)$ выпукла по θ, т. е. неравенство

$$w(x,\theta,t) - w(x,\bar{\theta},t) \geq (\theta - \bar{\theta})^{\mathrm{T}} \nabla_\theta w(x,\theta,t)$$

выполнено для всех $\theta \in \mathbb{R}^m, \bar{\theta} \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$.

A4. (Достижимость цели) Существуют вектор $\theta_* \in \mathbb{R}^m$ и непрерывная функция $\rho(Q)$ такая, что из $\rho(Q) = 0$ следует, что $Q = 0$ и для всех $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ верно $w(x,\theta_*,t) \leq -\rho(Q(x,t))$.

5 Метод скоростного градиента. Результат

Теорема 1. При выполнении A1-A4 все решения $(x(t), \theta(t))$ системы (1) (3) ограничены и цель

$$\lim_{t \to \infty} Q(x(t), t) = 0 \tag{5}$$

достигается для всех $x(0) \in \mathbb{R}^n, \theta(0) \in \mathbb{R}^m$.

Пример. Пусть ОУ имеет вид $dx/dt = (a + \theta)x$, ЦУ - стабилизация ОУ. Зададим $Q(x, t) = x^2$. Тогда

$$\dot{Q} = 2x\dot{x} = 2ax^2 + \theta x^2,\ \nabla\dot{Q} = x^2,\ \dot{\theta} = -\gamma x^2$$

Условия A1-A4 выполнены (A4: $\theta_* = -a - 1$).

6 Метод скоростного градиента. Доказательство.

Доказательство Теоремы 1. Из A1 следует существование решения системы (1), (3) на некотором временно́м интервале. Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V(x,\theta,t) = Q(x,t) + (\theta-\theta_*)^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}(\theta-\theta_*)/2. \tag{6}$$

Вычислим ее производную в силу системы (1), (3)

$$\dot V(x,\theta,t) = w(x,\theta,t) - (\theta-\theta_*)^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\dot\theta \le w(x,\theta_*,t) +$$
$$(\theta-\theta_*)^{\mathrm{T}}\nabla_\theta w(x,\theta,t) - (\theta-\theta_*)^{\mathrm{T}}\nabla_\theta w(x,\theta,t) \le -\rho(Q(x,t)) \le 0. \tag{7}$$

Последнее неравенство означает, что $V(x(t),\theta(t),t)$ невозрастающая функция времени. След-но, $V(x(t),\theta(t),t)$ ограничена, а значит, и $Q(x(t),t)$ ограничена. В силу радиальной неограниченности (условие A2) $x(t)$ ограничена. Далее из ограниченности $V(x(t),\theta(t),t)$ следует ограниченность $\theta(t)$. Следовательно, все решения системы (1), (3) ограничены, т. е. продолжимы на всю полуось $[0,\infty)$. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы заметим, что из доказанного неравенства (7) следует $\int_0^t \rho(Q(x(\tau),\tau))d\tau < \infty$. Переписывая (1) в интегральной форме $x(t) - x(\zeta) = \int_\zeta^t F(x(\tau),\theta(\tau),\tau)d\tau$ и учитывая ограниченность $x(t)$, $\theta(t)$, а также ограниченность $F(x,\theta,t)$ на любом компакте (условие A1), мы получаем, что вектор-функция $x(t)$ равномерно непрерывна по t. Далее, так как $\rho(Q)$ непрерывна по Q, а $x(t)$ равномерно непрерывна по t, функция $\rho(Q(x(t),t))$ равномерно непрерывна по t. Утверждение теоремы вытекает из леммы Барбалата.

7 Дивергенция Брэгмана-1

В 1965 и 1966 гг аспирант Ленинградского госуниверситета Л.М.Брэгман опубликовал две статьи в Докладах АН СССР, где предложил и исследовал новый итеративный метод поиска общей точки выпуклых множеств. Статьи были представлены к публикации академиком Л.В.Канторовичем. В статье 1966 г Л.М.Брэгман ввел вспомогательную функцию, чтобы облегчить доказательство сходимости своего алгоритма нахождения общей точки набора выпуклых множеств, а последующей статье 1967 г. в ЖВМ МФ расширил и обобщил полученные результаты

(Брегман, Л. (1967). Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение к решению задач выпуклого программирования. Журнал вычислительной математики и математической физики, 7(3)).

Позднее эта функция была названа *дивергенцией Брэгмана* и использовалась во многих задачах оптимизации, машинного обучения, кластеризации и т. д. Статья Брегмана Л. (1967) имеет более 1600 ссылок в Scopus, количество статей со словом "Bregman"в названии превышает 900.

Покажем, как использовать дивергенцию Брэгмана для разработки новых алгоритмов нелинейного и адаптивного управления.

Применения метода Брэгмана в машинном обучении

A Bregman Learning Framework for Sparse Neural Networks (Journal of Machine Learning Research 23 (2022) 1-43)

Bregman learning for generative adversarial networks (2018 Chinese Control And Decision Conference (CCDC))

Neural Bregman Divergences For Distance Learning (ICLR 2023 Conference)

Bregman Neural Networks (Proceedings of Machine Learning Research, 2022)

Cost-Sensitive Learning Based on Bregman Divergences, (Joint European Conference on Machine Learning, 2009)

Convergence of Stochastic Vector Quantization and Learning Vector Quantization with Bregman Divergences (IFAC-PapersOnline, 2020)

8 Дивергенция Брэгмана-2

Пусть $x \in R^n$ и пусть $h(x)$ гладкая функция. Дивергенция Брэгмана $D_h(y|x)$ определяется для $x, y \in R^n$ следующим образом:

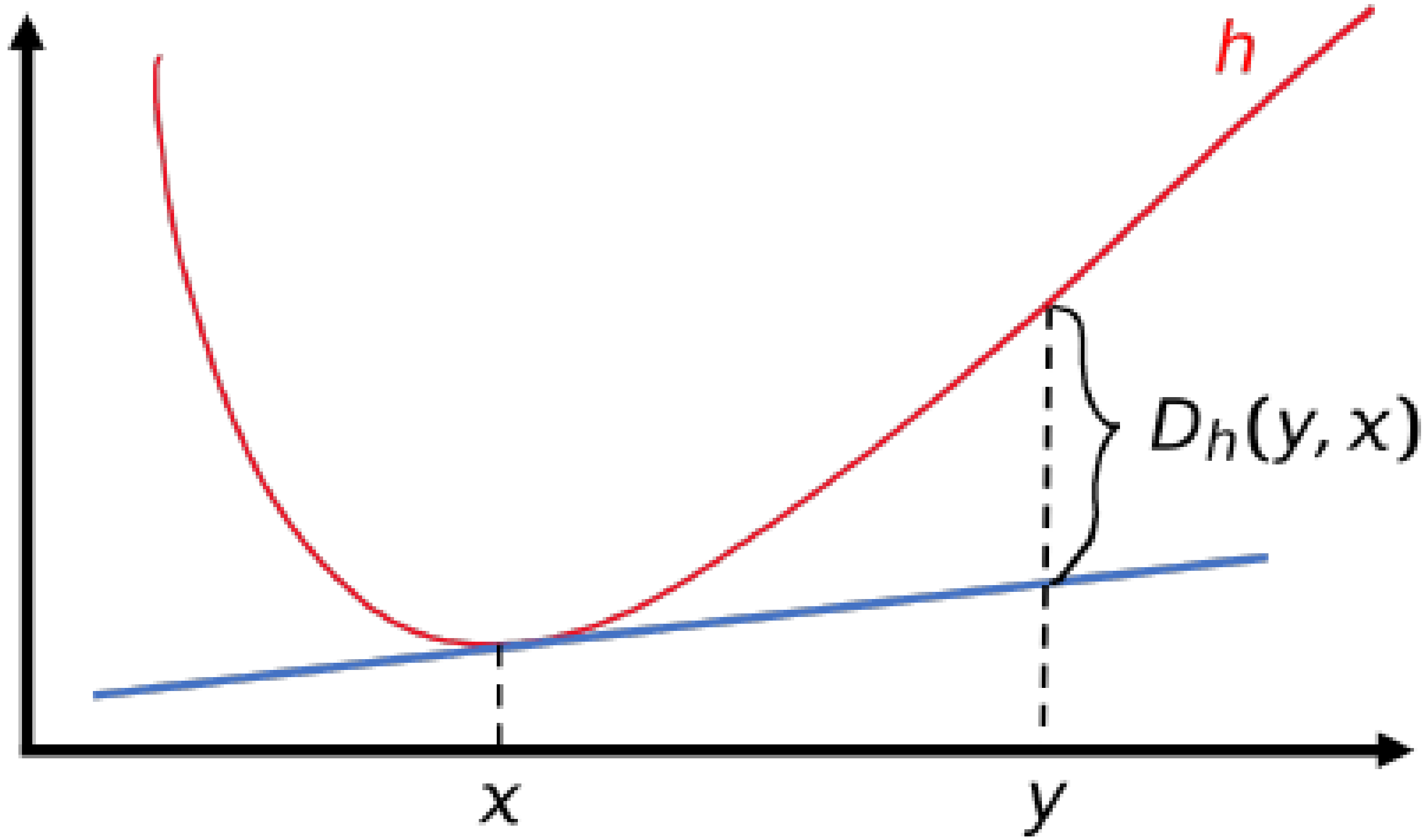
$$D_h(y|x) = h(y) - h(x) - (y - x)^{\mathrm{T}} \nabla h(x). \tag{8}$$

Легко видеть, что $D_h(y|x)$ выпукла по y, если $h(x)$ выпукла. $D_h(y|x)$ не является расстоянием между x и y, поскольку она несимметрична и не удовлетворяет неравенству треугольника.

Примеры. 1. Если $h(x) = x^{\mathrm{T}} R x$, где $R = R^{\mathrm{T}} > 0$ положительно определенная матрица, то $D_h(y|x) = (y - x)^{\mathrm{T}} R (y - x)$.

2. Если $h(x) = x \log x$ - энтропия, то $D_h(y|x) = x \log(x/y) - x + y$ - дивергенция Кульбака-Лейблера.

$$D_h(y|x) = h(y) - h(x) - (y-x)^{\mathrm{T}} \nabla h(x).$$



9 Управление по скоростному градиенту с помощью функций Ляпунова-Брэгмана

Теперь заменим квадратичную по параметрической ошибке функцию Ляпунова (6) следующей функцией

$$V(x, \theta, t) = Q\big(x, t\big) + D_h(\theta_* | \theta). \tag{9}$$

где $h(\theta)$ строго выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченным в любой ограниченной области обратным гессианом $\nabla^2 h(\theta)^{-1}$. Функцию (9) имеет смысл назвать **функцией Ляпунова-Брегмана**. Действуя как и при выводе алгоритма скоростного градиента, приходим к новому алгоритму адаптации.

$$\dot{\theta} = -\big(\nabla^2 h(\theta)\big)^{-1} \nabla_\theta w(x, \theta, t) \tag{10}$$

Теорема 2. Пусть $h(\theta)$ строго выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция и для любого $\beta > 0$ существует $C(\beta) > 0$, такая, что неравенство

$$|F(x,\theta,t)| + |\nabla^2 h(\theta)^{-1} \nabla_\theta w(x,\theta,t)| \leq C(\beta)$$

имеет место при $|x| \leq \beta$, $|\theta| \leq \beta$.

Пусть функция $D_h(\theta|\bar{\theta})$ радиально неограничена по θ при любом $\bar{\theta}$.

Пусть также выполнены условия A2 - A4 Теоремы 1.

Тогда в системе (1),(10) все траектории ограничены и цель управления (2) достигается.

Доказательство Теоремы 2. Вычислим скорость изменения функции (9) в силу системы $\dot{x} = F(x, \theta, t)$:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,\theta,t) &= \frac{\partial V}{\partial t} + w(x,\theta,t) + \dot{\theta}^{\mathrm{T}} \nabla h(\theta) - \dot{\theta}^{\mathrm{T}} \nabla h(\theta) + (\theta-\theta_*)^{\mathrm{T}} \nabla^2 h(\theta)\dot{\theta} \\ &+ (\theta-\theta_*)^{\mathrm{T}} \nabla_\theta w(x,\theta,t) \le w(x,\theta_*,t) \le -\rho(Q(x,t)) \le 0. \quad (11)\end{aligned}$$

Далее доказательство проходит так же, как и доказательство Теоремы 1. С использованием радиальной неогрпниченности функций $Q(x,t)$ и $D_h(\theta|\theta_*)$ устанавливается ограниченность траекторий системы, а достижение цели доказывается с использованием леммы Барбалата.

10 Конечно-дифференциальный обобщенный алгоритм скоростного градиента

В соответствии с общей методологией скоростного градиента в дополнение к дифференциальной и конечной формам вводится

конечно-дифференциальный обобщенный алгоритм скоростного градиента:

$$\frac{d\big(\theta + \Phi(x, \theta, t)\big)}{dt} = -\big(\nabla^2 h(\theta)\big)^{-1} \nabla_\theta w(x, \theta, t) \qquad (12)$$

где $\Phi(x, \theta, t)$ — – ограниченная вектор-функция, составляющая острый угол со скоростным градиентом: $\nabla_\theta \omega(x, \theta, t)$. Условия достижения цели управления для конечно-дифференциальых обобщенных СГ-алгоритмов устанавливаются аналогично случаю дифференциальных алгоритмов. При этом вместо функции Ляпунова-Брэгмана (9) используется следующая

$$V(x, \theta, t) = Q\big(x, t\big) + D_h(\theta + \Phi(x, \theta, t)|\theta_*). \qquad (13)$$

11 Робастность обобщенных СГ-алгоритмов

Рассмотрим объект управления, находящийся по действием везмущений

$$\dot{x}(t) = F\big(x(t), \theta(t), t\big) + f(t), \tag{14}$$

где $f(t)$ удовлетворяет условию $||f(t)|| \leq \Delta_f$. В традиционных системах на основе СГ-алгоритмов в этом случае цель (2) не может быть достигнута и ставится задача достижения ослабленной цели

$$Q(x(t), t) \leq \Delta, \tag{15}$$

для всех $t > \bar{t}$, превышающих некоторый порог $\bar{t}$ и для заданного уровня погрешности $\Delta > 0$. Регуляризованные обобщенные СГ-алгоритмы:

$$\dot{\theta} = -\big(\nabla^2 h(\theta)\big)^{-1} \nabla_\theta w(x, \theta, t) - \alpha(\theta - \bar{\theta}), \tag{16}$$

где $\alpha > 0$ -коэффициент регуляризации, а $\bar{\theta}$ is the *априорная оценка вектора* θ_*.

Теорема 3. Пусть $Q(x,t)$ и $h(\theta)$ - неотрицательные радиально неограниченные функции и выполнены условия теоремы 2.

Тогда в системе (14),(16) траектории ограничены и достигается цель управления (15) при

$$\Delta = 2(\Delta_f^2/\rho + \alpha||\theta_* - \bar{\theta}||^2)/\rho$$

.

Доказательство. Вычисляем производную функции $V(x,\theta,t)$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,\theta,t) \le -\rho Q(x,t) + \nabla Q^{\mathrm{T}} f(t) + (\theta - \theta_*)^{\mathrm{T}} \big(-\alpha(\theta_* - \bar{\theta})\big) \le \\ -\rho Q(x,t)/2 + \Delta_f^2/(2\rho) - \alpha||\theta_* - \theta||^2 - \alpha||\theta - \theta_*||\ ||\theta_* - \bar{\theta}|| \le \\ -\rho Q(x,t)/2 - \alpha||\theta_* - \theta||^2/2 + d, \end{aligned} \tag{17}$$

где $d = \Delta_f^2/(2\rho) + \alpha||\theta_* - \bar{\theta}||^2/2$. Это конец доказательства, поскольку все решения замкнутой системы должны покинуть множество, где $\dot{V} > 0$ которое содержит точки x, θ где $Q(x,t) > 2d/\rho$.

Замечание. Случай, когда в качестве возмущений выступает нестационарность параметров может быть сведен к случаю аддитивных возмущений. При соответствующих предположениях так можно рассмотреть нестационарные задачи.

Перспективы

- Использование обобщенных АСГ в прикладных задачах;

  - Обобщение теоретических результатов: для конечно-дифференциальных АСГ, АСГ с интегральным уелевым функционалом,
  - Задачи частичной устойчивости и управления колебаниями,
  - системы с запаздыванием, с частными производными, негладкие системы, стохастические системы.

И.В.Романовский и Л.М.Брэгман с женами. Беэр-Шева, 2010

Заключение

Основным результатом доклада является введение «неевклидовых» СГ-алгоритмов адаптации на основе функций Ляпунова-Брегмана. Можно сказать, что результирующий закон адаптации отражает скрытую риманову геометрию, где метрика задается Гессианом $\nabla^2 h(\theta)$. Такие «неевклидовы» алгоритмы могут оказаться удобны в нелинейно параметризованных задачах, что важно, например, для робототехнических систем.

Несмотря на стремительный рост интереса к машинному обучению и тенденции в области систем обучения, старое доброе адаптивное управление по-прежнему полезно на практике, и исследования в области адаптивного управления все еще продолжаются. Стоит отметить, что подобные алгоритмы часто используются как для адаптации, так и для обучения, т.е. между этими двумя областями существует сильное взаимодействие, см. напр. недавний обзор (Annaswamy, Fradkov, 2021). Поэтому вопросы адаптивного управления, обсуждаемые в данной статье, могут представлять интерес и для обучающихся систем.

Annaswamy A.M. and Fradkov A.L. A Historical Perspective of Adaptive Control and Learning. Annual Reviews in Control, 52 (2021) 18–41.