

Идентификация параметров моделей нейронов ФитцХью-Нагумо на основе метода скоростного градиента и фильтрации

Рыбалко Александра Валерьевна

Научный руководитель:
проф., д.т.н. Фрадков Александр Львович

Институт проблем машиноведения РАН
Кафедра теоретической кибернетики СПбГУ

Нейронауки — междисциплинарная область знания, занимающаяся изучением нейронных процессов.

Одна из главных задач, стоящих перед нейронауками, — это моделирование нервной системы, в частности, мозга человека.

- ▶ Искусственные нейронные сети: персептрон Розенблатта (1957)
- ▶ Математические модели нейронов (дифференциальные уравнения): модель Ходжкина-Хаксли (1952), модель ФитцХью-Наугмо (1961), модель Моррис-Лекара (1981), нейромассовые модели

Модель ФитцХью-Нагумо

Исследуются модели нейронов ФитцХью-Нагумо (ФХН)^{1,2}, каждая из которых имеет вид:

$$\begin{cases} u' = u - \frac{u^3}{3} - v + I_{ext}, \\ v' = \varepsilon(u - a - bv), \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ $u(t)$ — мембранный потенциал нейрона,
- ▶ $v(t)$ — совокупное действие всех медленных ионных токов, отвечающих за восстановление потенциала покоя,
- ▶ a и b — проводимостные характеристики ионных каналов,
- ▶ $\varepsilon > 0$ — скорость изменения медленных ионных токов,
- ▶ I_{ext} — внешний ток.

¹FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophysical Journal. — 1961.

²Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon // Proceedings of the IRE. — 1962.

Задача идентификации: $\theta(t) - \theta^* \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$,
где θ^* — вектор истинных значений параметров моделей ФХН,
а $\theta(t)$ — вектор оценок значений θ^* .

$$\dot{x} = F(x, \theta, t). \quad (2)$$

Цель:

$$Q_t \leq \Delta \quad \text{при} \quad t \geq t_*. \quad (3)$$

Локальный целевой функционал:

$$Q_t = Q(x(t), t). \quad (4)$$

Интегральный целевой функционал, явно зависящий от настраиваемых параметров:

$$Q_t = \int_0^t \omega(x(s), \theta(s), s) ds. \quad (5)$$

¹Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. — СПб. : Наука, 1990.

Метод скоростного градиента для интегрального целевого функционала

Скорость изменения (5): $\omega(x, \theta, t)$.

Алгоритм скоростного градиента:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t), \quad (6)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ - матрица коэффициентов усиления.

Важный частный случай: $\omega(x, \theta, t) = 0.5 \delta^2(x, \theta, t)$, где $\delta(x, \theta, t) = \theta(t)^T z(x, t) - \theta^{*T} z(x, t)$ — невязка между некоторой выходной переменной и её желаемым значением.

Условия применимости метода скоростного градиента для интегрального целевого функционала

Теорема 1¹. Пусть выполнены следующие условия:

1. *Условие гладкости.* Функции $F(x, \theta, t)$, $\nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t)$ непрерывны по x, θ , кусочно-непрерывны по t и локально ограничены равномерно по $t \geq 0$, то есть для любого $\beta > 0$ существует C такое, что при $\|x\| \leq \beta, \|\theta\| \leq \beta, t \geq 0$:

$$\|F(x, \theta, t)\| + \|\nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t)\| \leq C \quad (7)$$

2. *Условие выпуклости.* Функция $\omega(x, \theta, t)$ выпукла по $\theta \in R^m$.

3. *Условие слабой достижимости.* Существует вектор $\theta' \in R^m$ такой, что $\omega(x(t), \theta', t) \leq \mu(t)$, где $x(t)$ – решение (2), $\mu(t)$ – скалярная функция, такая, что

$$\int_0^{\infty} \mu(t) dt < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0. \quad (8)$$

Тогда в системе (2), (6) достигается цель (3) при (5) и

$$\Delta = 0.5 \|\theta_0 - \theta^*\|_{\Gamma-1}^2 + \int_0^{\infty} \mu(t) dt, \quad \text{а также} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(x(t), \theta(t), t) = 0.$$

¹Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. — СПб. : Наука, 1990.

Функция Ляпунова: $V_t = Q_t + 0.5\|\theta - \theta^*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + \int_0^{\infty} \mu(t) dt.$

$\dot{V}_t = \omega(x, \theta, t) + (\theta - \theta^*)^T \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) - \mu(t) \leq$
 $\leq \omega(x, \theta^*, t) - \mu(t) \leq 0.$ Откуда:

$Q_t \leq V_t \leq V_0 = 0.5\|\theta_0 - \theta^*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + \int_0^{\infty} \mu(t) dt.$ Тогда:

$\int_0^{\infty} \omega(x(s), \theta(s), s) ds < \infty.$

По лемме Барбалата получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(x(t), \theta(t), t) = 0.$

Идентифицирующие свойства метода скоростного градиента для интегрального целевого функционала

Теорема 2¹. Пусть для системы (2) с алгоритмом настройки $\theta(t)$:

$$\dot{\theta} = -\delta(x, \theta, t) \Gamma z(x, t), \quad (9)$$

где $z(x, t)$ – вектор наблюдаемых величин, а алгоритм (9) получен методом скоростного градиента для интегрального целевого функционала (5) с $\omega(x, \theta, t) = 0.5 \delta^2(x, \theta, t)$, где $\delta(x, \theta, t) = \theta(t)^T z(x, t) - \theta^{*T} z(x, t)$ – невязка между некоторой скалярной выходной переменной и её желаемым значением, выполнены условия теоремы 1, а так же выполнено условие *постоянного возбуждения*:

$z(x, t)$ ограничена при $t \geq 0$ и существуют положительные числа L, α, t_0 такие, что для любого $t > t_0$

$$\int_t^{t+L} z(x(s), s)^T z(x(s), s) ds \geq \alpha I_m. \quad (10)$$

Тогда в системе (2), (9) достигается цель идентификации: $\delta(x, \theta, t) \rightarrow 0$ и $\theta(t) - \theta^* \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

¹А. Rybalko, А. Fradkov. Identification of two-neuron FitzHugh–Nagumo model based on the speed-gradient and filtering // Chaos, 2023; 33 (8): p. 083126

$\delta(x, \theta, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ получаем по теореме 1.

Лемма¹. Рассмотрим гладкую вектор-функцию $w(t) \in R^m$ и постоянно возбужденную функцию $z(t) \in R^m$, определённую на $[0, \infty)$. Если $\dot{w}(t) \rightarrow 0$ и $w(t)^T z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0.$$

$$w(t) = (\theta_1 - \theta_1^* \quad \theta_2 - \theta_2^* \quad \theta_3 - \theta_3^* \quad \theta_4 - \theta_4^* \quad \theta_5 - \theta_5^*)^T.$$

$$\dot{w}(t) = \dot{\theta} = -\delta(x, \theta, t) \Gamma z(x, t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty;$$

$$w(t)^T z(t) = \theta^T z(x, t) - \theta^{*T} z(x, t) = \delta(x, \theta, t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Условия леммы выполняются, следовательно, $\theta(t) - \theta^* \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

¹Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб. : Наука, 2000. — 549 с.

- ▶ $y(t) = cu(t)$, где c — некоторая константа.
- ▶ $y'' = \theta_1^* y' + \theta_2^* (y^3)' + \theta_3^* y + \theta_4^* y^3 + \theta_5^*$, где
 $\theta^* = (1 - \varepsilon b \quad -\frac{1}{3c^2} \quad \varepsilon(b-1) \quad -\frac{\varepsilon b}{3c^2} \quad c\varepsilon(a + bl_{ext}))^T$.
- ▶ Дифференциатор второго порядка:

$$x'' \approx \frac{p^2}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)} x, \text{ где } \tau_i > 0 \quad i = 1, 2, \quad p = d/dt.$$

$$x_1(t) = \frac{p^2}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)} y(t),$$

$$x_2(t) = \frac{p}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)} y(t), \quad x_3(t) = \frac{p}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)} y^3(t),$$

$$x_4(t) = \frac{1}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)} y(t), \quad x_5(t) = \frac{1}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)} y^3(t).$$

$$x_1 = \theta_1^* x_2 + \theta_2^* x_3 + \theta_3^* x_4 + \theta_4^* x_5 + \theta_5^* + \tilde{\Delta}.$$

$$x_1 = \theta_1^* x_2 + \theta_2^* x_3 + \theta_3^* x_4 + \theta_4^* x_5 + \theta_5^*. \quad (11)$$

Цель идентификации: построить адаптивную систему с $\hat{x}_1(t)$ в качестве выходной переменной и $\theta_i(t)$ $i \in 1 : 5$ в качестве параметров:

1) $\hat{x}_1(t) - x_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$,

2) $\theta(t) - \theta^* \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$,

где $\theta(t) = (\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \theta_3(t) \ \theta_4(t) \ \theta_5(t))^T$.

$$\hat{x}_1 = \theta_1 x_2 + \theta_2 x_3 + \theta_3 x_4 + \theta_4 x_5 + \theta_5. \quad (12)$$

$$Q_t = \int_0^t \frac{1}{2} (\hat{x}_1(x(s), \theta(s), s) - x_1(x(s), s))^2 ds. \quad (13)$$

Система идентификации для модели нейрона ФХН

$$\begin{cases} u' = u - \frac{u^3}{3} - v + I_{ext}, \\ v' = \varepsilon(u - a - bv). \end{cases} \quad \begin{cases} y' = \tilde{y}, \\ \tilde{y}' = \theta_1^* \tilde{y} + 3\theta_2^* y^2 \tilde{y} + \theta_3^* y + \theta_4^* y^3 + \theta_5^*, \\ x_2' = -Ax_2 - Bx_4 + By, \\ x_3' = -Ax_3 - Bx_5 + By^3, \\ x_4' = x_2, \\ x_5' = x_3, \\ \theta_1' = -\gamma_1 \delta x_2, \\ \theta_2' = -\gamma_2 \delta x_3, \\ \theta_3' = -\gamma_3 \delta x_4, \\ \theta_4' = -\gamma_4 \delta x_5, \\ \theta_5' = -\gamma_5 \delta. \end{cases} \quad (14)$$

где $A = (\tau_1 + \tau_2)/(\tau_1\tau_2)$, $B = 1/(\tau_1\tau_2)$,

$\delta(x, \theta, t) = \hat{x}_1 - x_1 = \theta_1 x_2 + \theta_2 x_3 + \theta_3 x_4 + \theta_4 x_5 + \theta_5 + Ax_2 + Bx_4 - By$,

γ_i $i \in 1 : 5$ — положительные коэффициенты усиления.

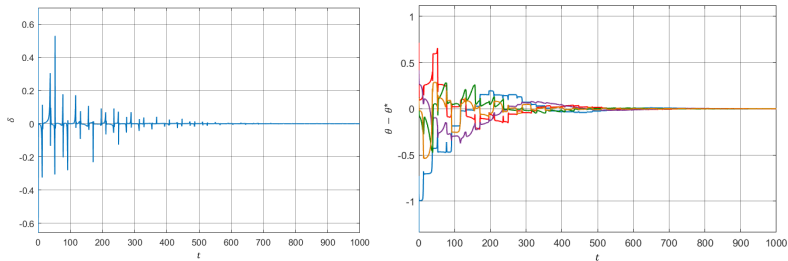


Рис. 1: График разности значений выходных переменных x_1 и \hat{x}_1 и графики разностей значений оценок θ_i и самих параметров θ_i^* , $i \in 1 : 5$, полученные при численном решении системы (14) с начальными данными: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $\theta_1(0) = -0.5$, $\theta_2(0) = -0.33$, $\theta_3(0) = 0.4$, $\theta_4(0) = 0.1$, $\theta_5(0) = 0.05$, и параметрами: $\tau_1 = \tau_2 = 0.01$, $l_{ext} = 0.5$, $a = -0.7$, $b = 0.8$, $\varepsilon = \frac{1}{12.5}$, $c = 1$, $\gamma_i = 1$, $i \in 1 : 5$.

Система идентификации для модели двух нейронов ФХН

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1' = u_1 - \frac{u_1^3}{3} - v_1 + I_{ext}, \\ v_1' = \varepsilon(u_1 - a - bv_1), \\ u_2' = u_2 - \frac{u_2^3}{3} - v_2 + I_{ext}, \\ v_2' = \varepsilon(u_2 - a - bv_2). \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1' = \tilde{y}_1, \\ \tilde{y}_1' = \theta_1^* \tilde{y}_1 + 3\theta_2^* y_1^2 \tilde{y}_1 + \theta_3^* y_1 + \theta_4^* y_1^3 + \theta_5^*, \\ y_2' = \tilde{y}_2, \\ \tilde{y}_2' = \theta_1^* \tilde{y}_2 + 3\theta_2^* y_2^2 \tilde{y}_2 + \theta_3^* y_2 + \theta_4^* y_2^3 + \theta_5^*, \\ x_2' = -Ax_2 - Bx_4 + B(y_1 + y_2), \\ x_3' = -Ax_3 - Bx_5 + B(y_1^3 + y_2^3), \\ x_4' = x_2, \\ x_5' = x_3, \\ \theta_1' = -\gamma_1 \delta x_2, \\ \theta_2' = -\gamma_2 \delta x_3, \\ \theta_3' = -\gamma_3 \delta x_4, \\ \theta_4' = -\gamma_4 \delta x_5, \\ \theta_5' = -\gamma_5 \delta, \end{array} \right. \quad (15)$$

где $\theta^* = (1 - \varepsilon b - \frac{1}{3c^2} \varepsilon(b - 1) - \frac{\varepsilon b}{3c^2} 2c\varepsilon(a + bI_{ext}))$.

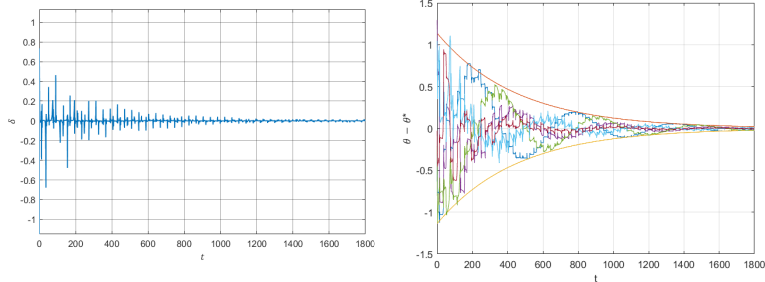


Рис. 2: График разности выходных переменных x_1 и \hat{x}_1 и графики разностей оценок θ_i и самих параметров θ_i^* , $i \in 1 : 5$, полученные при численном решении системы (15) с начальными данными: $y_1(0) = 0.1$, $\dot{y}_1(0) = 0.5$, $y_2(0) = 0.45$, $\dot{y}_2(0) = 0.2$, $\theta_1(0) = 0.3$, $\theta_2(0) = 0.9$, $\theta_3(0) = -0.25$, $\theta_4(0) = 1$, $\theta_5(0) = -0.1$ и параметрами: $\tau_1 = \tau_2 = 0.01$, $I_{ext} = 0.5$, $a = -0.7$, $b = 0.8$, $\varepsilon = 12.5^{-1}$, $c = 1$, $\gamma_i = 1$, $i \in 1 : 5$; с огибающими $\approx \pm 1.44e^{-0.0022t}$.

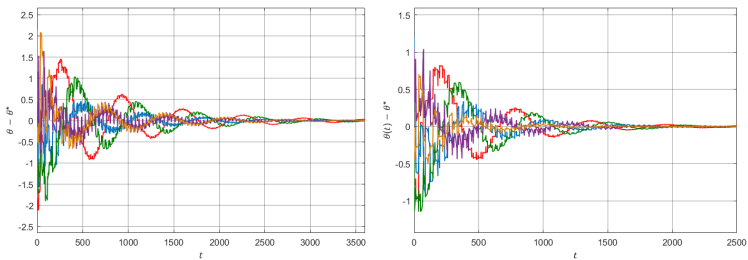


Рис. 3: Графики разностей оценок θ_i и их истинных значений θ_i^* , $i \in 1 : 5$ полученные для а) тех же параметров и начальных данных, отличающихся в два раза по сравнению с предыдущим набором; б) тех же начальных данных и параметров, отличающихся на 20% по сравнению с предыдущим набором.

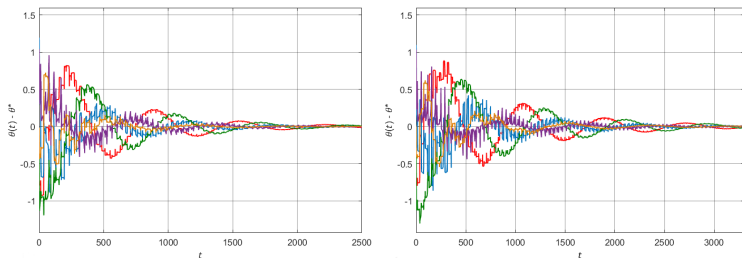


Рис. 4: Графики разностей оценок θ_i и их истинных значений θ_i^* , $i \in 1 : 5$ полученные для тех же начальных данных и параметров с ошибкой измерения мембранного потенциала а) 20% б) 60%.

Система идентификации для модели N нейронов ФХН

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u'_k = u_k - \frac{u_k^3}{3} - v_k + I_{ext} + \\
 \sigma \sum_{j=1}^N A_{kj} [B_{uu}(u_j - u_k) + B_{uv}(v_j - v_k)], \\
 v'_k = \varepsilon(u_k - a - bv_k) + \\
 \sigma \sum_{j=1}^N A_{kj} [B_{vu}(u_j - u_k) + B_{vv}(v_j - v_k)],
 \end{array} \right.
 \left\{ \begin{array}{l}
 y'_1 = \tilde{y}_1, \\
 y'_2 = \tilde{y}_2, \\
 \dots \\
 y'_N = \tilde{y}_N, \\
 \tilde{y}'_1 = \theta_1^* \tilde{y}_1 + 3\theta_2^* y_1^2 \tilde{y}_1 + \theta_3^* y_1 + \theta_4^* y_1^3 + \theta_5^*, \\
 \tilde{y}'_2 = \theta_1^* \tilde{y}_2 + 3\theta_2^* y_2^2 \tilde{y}_2 + \theta_3^* y_2 + \theta_4^* y_2^3 + \theta_5^*, \\
 \dots \\
 \tilde{y}'_N = \theta_1^* \tilde{y}_N + 3\theta_2^* y_N^2 \tilde{y}_N + \theta_3^* y_N + \theta_4^* y_N^3 + \theta_5^*, \\
 x'_2 = -Ax_2 - Bx_4 + B(y_1 + y_2 + \dots + y_N), \\
 x'_3 = -Ax_3 - Bx_5 + B(y_1^3 + y_2^3 + \dots + y_N^3), \\
 x'_4 = x_2, \\
 x'_5 = x_3, \\
 \theta'_1 = -\gamma_1 \delta x_2, \\
 \theta'_2 = -\gamma_2 \delta x_3, \\
 \theta'_3 = -\gamma_3 \delta x_4, \\
 \theta'_4 = -\gamma_4 \delta x_5, \\
 \theta'_5 = -\gamma_5 \delta.
 \end{array} \right. \quad (16)$$

где $k \in 1 : N$, σ — коэффициент силы связи, A_{kj} — элементы матрицы смежности (предполагаем, что связи ненаправленные), B_{uu} , B_{uv} , B_{vu} , B_{vv} — некоторые масштабирующие множители,

$$\theta^* = (1 - \varepsilon b - \frac{1}{3c^2} \varepsilon(b - 1) - \frac{\varepsilon b}{3c^2} Nc\varepsilon(a + bI_{ext})).$$

Теорема 3¹. Пусть для вектор-функции $z(x(t), t) = (x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ 1)^T$ из системы идентификации модели сети из N нейронов ФХН выполняется условие постоянного возбуждения (10). Тогда в этой системе достигается цель идентификации при интегральном целевом функционале

$$Q_t = \int_0^t \frac{1}{2} (\hat{x}_1(s) - x_1(s))^2 ds,$$

то есть $\hat{x}_1(t) - x_1(t) \rightarrow 0$ и $\theta(t) - \theta^* \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Проверка первых трёх условий теоремы 2 для системы (16).

¹A. Rybalko, A. Fradkov. Identification of Group of FitzHugh-Nagumo Neuron Models Based on the Speed-Gradient and Filtering // DCNA, 2023; pp. 233-236.

Численная проверка условия постоянного возбуждения

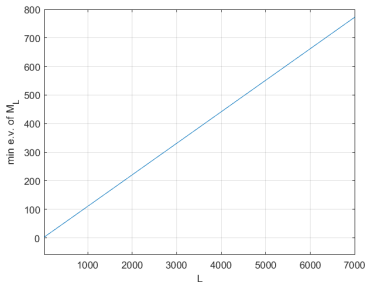
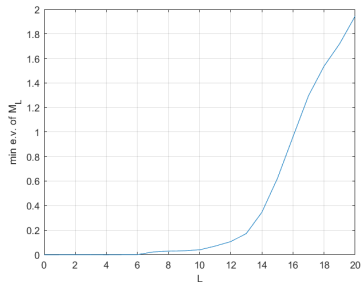


Рис. 5: Графики зависимости между длиной промежутка интегрирования L и наименьшим собственным числом матрицы из левой части условия ПВ (10) на а) $[0, 20]$, б) $[0, 7000]$.

- ▶ Предложен и теоретически обоснован подход к идентификации моделей нейронов ФХН в случае группы несвязанных моделей и в случае сети.
- ▶ Результат получен в естественных предположениях о недоступности к измерению переменной совокупного действия медленных ионных токов и производных обеих переменных.
- ▶ Решение учитывает погрешность, возникающую при измерении переменной мембранного потенциала.
- ▶ Сформулирована и доказана теорема об идентифицирующих свойствах метода скоростного градиента для интегрального целевого функционала.

Спасибо за внимание!