О КОМПАКТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОДИФФЕРЕНЦИАЛА НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОМАНОЙ ЗАДАННОЙ В ФОРМЕ БЕРНШТЕЙНА*

Г. Ш. Тамасян
grigoriytamasjan@mail.ru

9 ноября 2023 г.

1°. В работе [1, п. 4.2] было доказано утверждение, что непрерывная кусочно-аффинная функция представима в виде разности двух выпуклых кусочно-аффинных функций, см. также [2]. В [3], используя аппарат кодифференциального исчисления (см., например, [4]), предложены алгоритмы нахождения представления кусочно-аффинной функции в виде суммы максимума и минимума от конечного числа аффинных функций. В докладе [5] был предложен алгоритм, позволяющий представить непрерывную ломаную в виде разности двух максимумов от конечного числа прямых. В данном докладе показано, как для непрерывной ломаной в форме Бернштейна получить представление в виде разности двух максимумов, и обратно. И как кодифференциалы этих представлений для ломаной взаимосвязаны между собой.

2°. Рассмотрим непрерывную ломаную в форме Бернштейна

$$F(x) = a_0x - b_0 + L(x) - H(x) =$$
$$= a_0x - b_0 + \sum_{j=1}^{s} a_j\big|x - x_j\big| - \sum_{j=s+1}^{m} a_j\big|x - x_j\big|, \tag{1}$$

где $a_j > 0$, $j \in 1 : m$, $x_1, \ldots, x_m$ — узлы ломаной. Ясно, что $L(x)$ и $H(x)$ — выпуклые ломаные.

Напомним несколько свойств, связанных с функцией максимума, которыми далее будем активно пользоваться:

$$\big|g(x)\big| = \max\big\{ -g(x), g(x)\big\}, \tag{2}$$

$$h(x) + \max_{k\in 1:m} g_k(x) = \max_{k\in 1:m} \big\{h(x) + g_k(x)\big\}. \tag{3}$$

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» http://oml.cmlaboratory.com/

Из (2) и (3), в частности, следует представление через максимум суммы двух модулей:

$$\begin{aligned}&\big|g(x)\big| + \big|h(x)\big| = \\ &= \max\big\{-g(x) - h(x), g(x) - h(x), -g(x) + h(x), g(x) + h(x)\big\}.\end{aligned} \tag{4}$$

Применяя необходимое число раз равенство (4), каждую из ломаных $L(x)$ и $H(x)$ можно представить в виде максимума от 2^s и 2^{m-s} аффинных функций. В действительности, большинство функций под максимумами неактивные и их можно отбросить.

В связи с тем, что ломаные $L(x)$ и $H(x)$ имеют идентичные свойства, то ограничимся исследованием функции $L(x)$.

Задача 1. Найти представление выпуклой ломаной $L(x)$ в виде максимума от минимального количества аффинных функций.

Не умаляя общности, будем считать, что узлы ломаной различны и упорядочены по возрастанию, т. е. $x_1 < x_2 < \ldots < x_s$. Положим $b_j = a_j x_j$, $j \in 1 : s$. Тогда функция $L(x)$ примет вид

$$L(x) = \sum_{j=1}^{s} \big|\ell_j(x)\big| = \sum_{j=1}^{s} \big|a_j x - b_j\big|.$$

Отметим, что при каждом $j \in 1 : s$ справедлива система неравенств

$$-\ell_j(x) \leqslant \ell_j(x) \quad \text{при } x \geqslant x_j, \tag{5}$$

$$\ell_j(x) \leqslant -\ell_j(x) \quad \text{при } x \leqslant x_j. \tag{6}$$

Отсюда для любого подмножества $I \subset 1 : s$, имеем

$$-\sum_{j\in I} \ell_j(x) \leqslant \sum_{j\in I} \ell_j(x) \quad \text{при } x \geqslant \max_{j\in I} x_j, \tag{7}$$

$$\sum_{j\in I} \ell_j(x) \leqslant -\sum_{j\in I} \ell_j(x) \quad \text{при } x \leqslant \min_{j\in I} x_j. \tag{8}$$

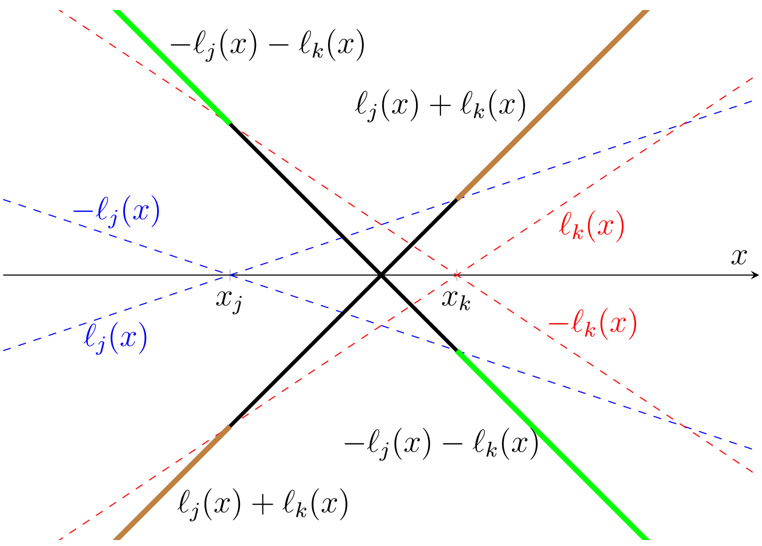

Рис. 1. Иллюстрация неравенств (5)–(8)

Решение задачи будем вести по индукции. При $s = 1$ искомое представление очевидно (см. равенство (2)):

$$L(x) = \max\big\{-\ell_1(x), \ell_1(x)\big\} =: \Phi_1(x).$$

Разберем подробно еще два случая s равное 2 и 3. При $s = 2$ (см. (4)) имеем

$$L(x) = \Phi_1(x) + \big|\ell_2(x)\big| =$$
$$= \max\big\{-\ell_1(x) - \ell_2(x), \ell_1(x) - \ell_2(x), \underline{-\ell_1(x) + \ell_2(x)}, \ell_1(x) + \ell_2(x)\big\}.$$

Покажем, что прямую $-\ell_1(x)+\ell_2(x)$ из этого представления можно исключить, т. к. она располагается не выше оставшихся прямых, а именно

$$-\ell_1(x) + \ell_2(x) \leqslant \ell_1(x) + \ell_2(x) \quad \text{при } x \geqslant x_1,$$
$$-\ell_1(x) + \ell_2(x) \leqslant -\ell_1(x) - \ell_2(x) \quad \text{при } x \leqslant x_2.$$

Действительно, первое неравенство получается, если к неравенству (5) при $j = 1$ прибавить функцию $\ell_2(x)$, а второе — если из неравенства (6) при $j = 2$ вычесть $\ell_1(x)$.

Положим

$$\Phi_2(x) := \max\big\{-\ell_1(x) - \ell_2(x), \ell_1(x) - \ell_2(x), \ell_1(x) + \ell_2(x)\big\}.$$

При $s = 3$ имеем

$$L(x) = \Phi_2(x) + \big|\ell_3(x)\big| =$$
$$= \max\big\{-\ell_1(x) - \ell_2(x) - \ell_3(x), \ell_1(x) - \ell_2(x) - \ell_3(x), \ell_1(x) + \ell_2(x) - \ell_3(x),$$
$$\underline{-\ell_1(x) - \ell_2(x) + \ell_3(x)}, \underline{\ell_1(x) - \ell_2(x) + \ell_3(x)}, \ell_1(x) + \ell_2(x) + \ell_3(x)\big\}.$$

Покажем, что две функции (подчеркнутые) можно исключить из этого представления, т. к.

$$\begin{cases} -\ell_1(x) - \ell_2(x) + \ell_3(x) \leqslant \ell_1(x) + \ell_2(x) + \ell_3(x) & \text{при } x \geqslant x_2, \\ -\ell_1(x) - \ell_2(x) + \ell_3(x) \leqslant -\ell_1(x) - \ell_2(x) - \ell_3(x) & \text{при } x \leqslant x_3, \end{cases} \tag{9}$$

и

$$\begin{cases} \ell_1(x) - \ell_2(x) + \ell_3(x) \leqslant \ell_1(x) + \ell_2(x) + \ell_3(x) & \text{при } x \geqslant x_2, \\ \ell_1(x) - \ell_2(x) + \ell_3(x) \leqslant \ell_1(x) - \ell_2(x) - \ell_3(x) & \text{при } x \leqslant x_3. \end{cases} \tag{10}$$

Первое неравенство в (9) получается, если к неравенству (7) при $I = 1 : 2$ прибавить функцию $\ell_3(x)$, а второе — если из неравенства (6) при $j = 3$ вычесть $\ell_1(x) + \ell_2(x)$.

Аналогично рассматривается система (10). Первое неравенство в (10) получается, если к неравенству (5) при $j = 2$ прибавить функцию $\ell_1(x) + \ell_3(x)$, а второе — если к неравенству (6) при $j = 3$ прибавить $\ell_1(x) - \ell_2(x)$.

Положим

$$\Phi_3(x) := \max\big\{ -\ell_1(x) - \ell_2(x) - \ell_3(x), \ell_1(x) - \ell_2(x) - \ell_3(x),$$
$$\ell_1(x) + \ell_2(x) - \ell_3(x), \ell_1(x) + \ell_2(x) + \ell_3(x)\big\}.$$

Пусть при $s = k$ имеем представление $L(x) = \Phi_k(x)$, где

$$\Phi_k(x) := \max\Big\{-\sum_{j=1}^{k}\ell_j(x), \ell_1(x) - \sum_{j=2}^{k}\ell_j(x), \dots,$$
$$\sum_{j=1}^{i}\ell_j(x) - \sum_{j=i+1}^{k}\ell_j(x), \dots, \sum_{j=1}^{k-1}\ell_j(x) - \ell_k(x), \sum_{j=1}^{k}\ell_j(x)\Big\}.$$

Докажем, что при $s = k + 1$ верно представление

$$L(x) = \max\Big\{-\sum_{j=1}^{k+1}\ell_j(x), \ell_1(x) - \sum_{j=2}^{k+1}\ell_j(x), \dots,$$
$$\sum_{j=1}^{i}\ell_j(x) - \sum_{j=i+1}^{k+1}\ell_j(x), \dots, \sum_{j=1}^{k}\ell_j(x) - \ell_{k+1}(x), \sum_{j=1}^{k+1}\ell_j(x)\Big\}.$$

Действительно, в силу индукционного предположения имеем

$$L(x) = \Phi_k(x) + \big|\ell_{k+1}(x)\big| = \max\{\Phi_k(x) - \ell_{k+1}, \Phi_k(x) + \ell_{k+1}\} =$$
$$= \max\Big\{-\sum_{j=1}^{k}\ell_j(x) - \ell_{k+1}, \ell_1(x) - \sum_{j=2}^{k}\ell_j(x) - \ell_{k+1}, \dots, \sum_{j=1}^{k}\ell_j(x) - \ell_{k+1}(x),$$
$$\underline{-\sum_{j=1}^{k}\ell_j(x) + \ell_{k+1}(x)}, \underline{\ell_1(x) - \sum_{j=2}^{k}\ell_j(x) + \ell_{k+1}(x)}, \dots,$$
$$\underline{\sum_{j=1}^{i}\ell_j(x) - \sum_{j=i+1}^{k}\ell_j(x) + \ell_{k+1}(x)}, \dots, \underline{\sum_{j=1}^{k-1}\ell_j(x) - \ell_k(x) + \ell_{k+1}(x)}, \sum_{j=1}^{k+1}\ell_j(x)\Big\}. \quad (11)$$

Для облегчения выкладок введём $\ell_0(x) = 0$. Тогда достаточно показать, что для каждого $i \in 0 : k - 1$ (см. подчеркнутые функции в (11)) справедливы неравенства:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{i}\ell_j(x) - \sum\limits_{j=i+1}^{k}\ell_j(x) + \ell_{k+1}(x) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k+1}\ell_j(x) & \text{при } x \geqslant x_k, \\ \sum\limits_{j=0}^{i}\ell_j(x) - \sum\limits_{j=i+1}^{k}\ell_j(x) + \ell_{k+1}(x) \leqslant \sum\limits_{j=0}^{i}\ell_j(x) - \sum\limits_{j=i+1}^{k+1}\ell_j(x) & \text{при } x \leqslant x_{k+1}. \end{cases} \quad (12)$$

Первое неравенство в (12) получается, если к неравенству (7) при $I = i + 1 : k$ прибавить функцию $\sum\limits_{j=0}^{i}\ell_j(x) + \ell_{k+1}(x)$, а второе — если к неравенству (6) при $j = k + 1$ прибавить $\sum\limits_{j=0}^{i}\ell_j(x) - \sum\limits_{j=i+1}^{k}\ell_j(x)$.

Итак, функция $L(x) = \sum\limits_{j=1}^{s} \bigl|\ell_j(x)\bigr|$ представима в виде

$$L(x) = \max\bigl\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{s+1}(x)\bigr\}, \tag{13}$$

где

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \\ \vdots \\ \varphi_s(x) \\ \varphi_{s+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(s+1)\times s} \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \ell_3(x) \\ \vdots \\ \ell_{s-1}(x) \\ \ell_s(x) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Аналогичный результат справедлив и для выпуклой ломаной $H(x)$ (см. (1)).

3°. Решим «обратную» задачу.

Задача 2. Пусть дана выпуклая ломаная в виде

$$\Phi(x) = \max\bigl\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{s+1}(x)\bigr\}, \tag{15}$$

где $\varphi_j(x)$ — аффинные функции. Найти её представление в виде

$$L(x) = \ell_0(x) + \sum_{j=1}^{s} \bigl|\ell_j(x)\bigr|.$$

Здесь $\ell_j(x)$, $j \in 0 : s$, — прямые.

Воспользуемся результатами предыдущего пункта. Рассмотрим систему (14). Обозначим матрицу системы через $\mathbf{M}$, вектор из левой части системы — φ, вектор из правой части — ℓ. Предположим, что

$$\varphi_1'(x) \leqslant \varphi_2'(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_{s+1}'(x). \tag{16}$$

Из равенств (3) и (15), имеем

$$\sum_{j=1}^{s} \bigl|\ell_j(x)\bigr| = \Phi(x) - \ell_0(x) = \max_{j \in 1:s+1} \bigl\{\varphi_j(x) - \ell_0(x)\bigr\}.$$

Тогда, в силу (13) и (14), получим систему

$$\mathbf{M}\ell = \varphi - \mathbf{e}\ell_0(x),$$

где $\mathbf{e}$ — вектор из $\mathbb{R}^{s+1}$, все компоненты которого равны единице.

Сгруппируем неизвестные в левой части и перепишем её в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно $(\ell_0(x), \ell_1(x), \ldots, \ell_s(x))$:

$$[\mathbf{e} \quad \mathbf{M}] \begin{pmatrix} \ell_0(x) \\ \boldsymbol{\ell} \end{pmatrix} = \varphi.$$

Несложно убедиться, что эта система имеет единственное решение:

$$\begin{pmatrix} \ell_0(x) \\ \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_{s-1}(x) \\ \ell_s(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{(s+1)\times(s+1)} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \\ \vdots \\ \varphi_s(x) \\ \varphi_{s+1}(x) \end{pmatrix},$$

или подробнее

$$\begin{gathered} \ell_0(x) = \tfrac{1}{2}\big(\varphi_1(x) + \varphi_{s+1}(x)\big),\ \ell_1(x) = \tfrac{1}{2}\big(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\big), \\ \ell_2(x) = \tfrac{1}{2}\big(\varphi_3(x) - \varphi_2(x)\big), \ldots, \ell_s(x) = \tfrac{1}{2}\big(\varphi_{s+1}(x) - \varphi_s(x)\big). \end{gathered} \tag{17}$$

З а м е ч а н и е. Условие (16) гарантирует неотрицательность угловых коэффициентов прямых ℓ_j, $j \in 1 : s$ (см. (17)). Так как искомые прямые ℓ_j находятся под модулем, то условие (16) можно ослабить, достаточно, чтобы выполнялось двойное неравенство:

$$\varphi_1'(x) \leqslant \varphi_j'(x) \leqslant \varphi_{s+1}'(x), \quad j \in 2 : s.$$

4°. Известно, что любая кусочно-аффинная функция кодифференцируемая (см. [3, 4, 6]), т. е. разложение функции $F(x) = \ell_0(x) + L(x) + H(x)$ имеет вид

$$F(x+h) = F(x) + \max_{(\alpha,\beta)\in \underline{d}F(x)} \big\{\alpha + \beta h\big\} + \min_{(\gamma,\eta)\in \overline{d}F(x)} \big\{\gamma + \eta h\big\},$$

где $L(x) = \sum\limits_{j=1}^{s} \big|\ell_j(x)\big|$, $H(x) = -\sum\limits_{j=s+1}^{m} \big|\ell_j(x)\big|$, $\ell_j(x) = a_j x - b_j$, $j \in 0 : m$. Здесь кодифференциал функции F складывается из кодифференциалов функций $\ell_0(x)$, $L(x)$ и $H(x)$, т. е.

$$DF(x) = [\underline{d}F(x), \overline{d}F(x)] = D\ell_0(x) + DL(x) + DH(x),$$

$$D\ell_0(x) = \left[\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \end{pmatrix}\right\}, \{\mathbf{0}_2\}\right], \quad DL(x) = [\underline{d}L(x), \{\mathbf{0}_2\}], \quad DH(x) = [\{\mathbf{0}_2\}, \overline{d}H(x)].$$

Таким образом, согласно кодифференциальному исчислению, получим

$$\underline{d}F(x) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \end{pmatrix}\right\} + \underline{d}L(x), \qquad \overline{d}F(x) = \overline{d}H(x).$$

Подробно опишем вычисление гиподифференциала функции $L(x)$. Гипердифференциал функции $H(x)$ вычисляется аналогично.

Для начала выпишем гиподифференциал функции $\bigl|\ell_j(x)\bigr|$:

$$\underline{d}\bigl|\ell_j(x)\bigr| = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} -\ell_j(x) - \bigl|\ell_j(x)\bigr| \\ -a_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ell_j(x) - \bigl|\ell_j(x)\bigr| \\ a_j \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда гиподифференциал выпуклой ломаной $L(x)$ равен сумме гиподифференциалов $\underline{d}\bigl|\ell_j(x)\bigr|$:

$$\underline{d}L(x) = \sum_{j=1}^{s} \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} -\ell_j(x) \\ -a_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ell_j(x) \\ a_j \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} L(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

З а м е ч а н и е. В (18) отрезки складываются по Минковскому, т. е. каждый элемент одного множества складывается со всеми элементами другого множества. В данном случае достаточно складывать только вершины отрезков. Отсюда и экспоненциальный рост количества элементов, участвующих в образовании гиподифференциала $\underline{d}L(x)$ до 2^s.

В разделе 2° мы показали, что выпуклая ломаная $L(x)$ может быть представлена в виде максимума от $s+1$ кусочно-аффинной функции (см. (13), (14)), т. е. $L(x) = \Phi(x)$, где

$$\Phi(x) = \max\bigl\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{s+1}(x)\bigr\}.$$

Ясно, что гиподифференциал функции $\Phi(x)$ будет равен выпуклой оболочке от $s+1$ вектора. В следующем утверждении проясняется взаимосвязь между гиподифференциалами функций $L(x)$ и $\Phi(x)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Пусть* $\Phi(x)$ *— представление выпуклой ломаной* $L(x)$ *в виде* (13). *Пусть гиподифференциал функции* $\Phi(x)$ *равен выпуклому многоугольнику* $\operatorname{conv}\{v_1, \dots, v_{s+1}\}$. *Тогда гиподифференциал функции* $L(x)$ *равен объединению гиподифференциала* $\underline{d}\Phi(x)$ *и его отражения относительно точки* $p = \begin{pmatrix} -\Phi(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, *т. е.*

$$\underline{d}L(x) = \underline{d}\Phi(x) \cup \operatorname{conv}\bigl\{2p - v_j \mid v_j \in \underline{d}\Phi(x)\bigr\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем явный вид гиподифференциала функции $\Phi(x)$:

$$\underline{d}\Phi(x) = \operatorname{conv}\left\{ v_k = \begin{pmatrix} \varphi_k(x) - \Phi(x) \\ \varphi_k'(x) \end{pmatrix},\ k \in 1 : s+1 \right\}. \tag{19}$$

Здесь функции $\varphi_k(x)$, $k \in 1 : s$, вычисляются по формуле (14).

Теперь найдем отражение множества $\underline{d}\Phi(x)$ относительно точки p. Получим многоугольник

$$\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} -\varphi_k(x)-\Phi(x) \\ -\varphi'_k(x) \end{pmatrix},\ k\in 1:s+1\right\}. \tag{20}$$

В силу того, что $\varphi_{s+1}(x) = -\varphi_1(x)$, у множеств (19) и (20) имеются две общие точки, а именно

$$v_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1(x)-\Phi(x) \\ \varphi'_1(x) \end{pmatrix}, \qquad v_{s+1} = \begin{pmatrix} \varphi_{s+1}(x)-\Phi(x) \\ \varphi'_{s+1}(x) \end{pmatrix}.$$

Следовательно объединение вершин множеств (19) и (20) будет состоять из $2s$ элементов.

Наконец, осталось заметить, что функция $L(x)$ может быть представлена в виде максимума от $2s$ функций (см. (11) при $k = s-1$):

$$L(x) = \Phi_{s-1}(x) + \big|\ell_s(x)\big| =$$
$$= \max\Big\{-\sum_{j=1}^{s}\ell_j(x),\dots,\sum_{j=1}^{i}\ell_j(x) - \sum_{j=i+1}^{s-1}\ell_j(x) - \ell_s(x),\dots,\sum_{j=1}^{s-1}\ell_j(x) - \ell_s(x),$$
$$-\sum_{j=1}^{s-1}\ell_j(x) + \ell_s(x),\dots,\sum_{j=1}^{i}\ell_j(x) - \sum_{j=i+1}^{s-1}\ell_j(x) + \ell_s(x),\dots,\sum_{j=1}^{s}\ell_j(x)\Big\},$$

для которой гиподифференциал равен объединению множеств (19) и (20). $\square$

ПРИМЕР. Для функции

$$L(x) = |x+2| + |x+1| + |x| + |x-0.5| + |x-2.5|$$

найдём представление $\Phi(x)$ в виде максимума от аффинных функций (см. (13)), а также гиподифференциалы функций $L(x)$ и $\Phi(x)$ в точке $x_0 = 1$. Здесь

$$\ell_1(x) = x+2,\ \ell_2(x) = x+1,\ \ell_3(x) = x,\ \ell_4(x) = x-0.5,\ \ell_5(x) = x-2.5.$$

По формуле (14) находим

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -5x, & \varphi_2(x) &= -3x+4, & \varphi_3(x) &= -x+6,\\ \varphi_4(x) &= x+6, & \varphi_5(x) &= 3x+5, & \varphi_6(x) &= 5x. \end{aligned}$$

Тогда $\Phi(x) = \max\big\{-5x, -3x+4, -x+6, x+6, 3x+5, 5x\big\}$.

Вычислим в точке $x_0 = 1$ гиподифференциалы функций $L(x)$ и $\Phi(x)$. Имеем

$$\underline{d}L(x_0) = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}-(x_0+2)-|x_0+2|\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(x_0+2)-|x_0+2|\\1\end{pmatrix}\right\} +$$
$$+\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}-(x_0+1)-|x_0+1|\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(x_0+1)-|x_0+1|\\1\end{pmatrix}\right\} +$$
$$+\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}-x_0-|x_0|\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_0-|x_0|\\1\end{pmatrix}\right\} +$$
$$+\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}-(x_0-0.5)-|x_0-0.5|\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(x_0-0.5)-|x_0-0.5|\\1\end{pmatrix}\right\} +$$
$$+\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}-(x_0-2.5)-|x_0-2.5|\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(x_0-2.5)-|x_0-2.5|\\1\end{pmatrix}\right\} =$$
$$= \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} + \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} + \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} +$$
$$+\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} + \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Складывая по Минковскому полученных пять отрезков получим набор из 32 точек, из которых только 10 являются крайними (см. рис. 2).

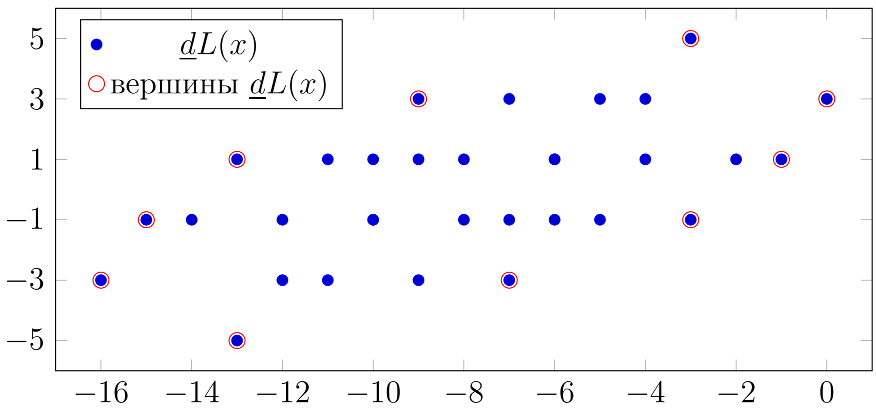

Рис. 2. Гиподифференциал функции $L(x)$ в точке $x_0 = 1$

Для функции $\Phi(x)$ получим (см. рис. 3)

$$\underline{d}\Phi(x_0) = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}\varphi_j(x_0)-\Phi(x_0)\\ \varphi_j'(x_0)\end{pmatrix}, j \in 1:6\right\} =$$
$$= \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}-13\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\right\}.$$

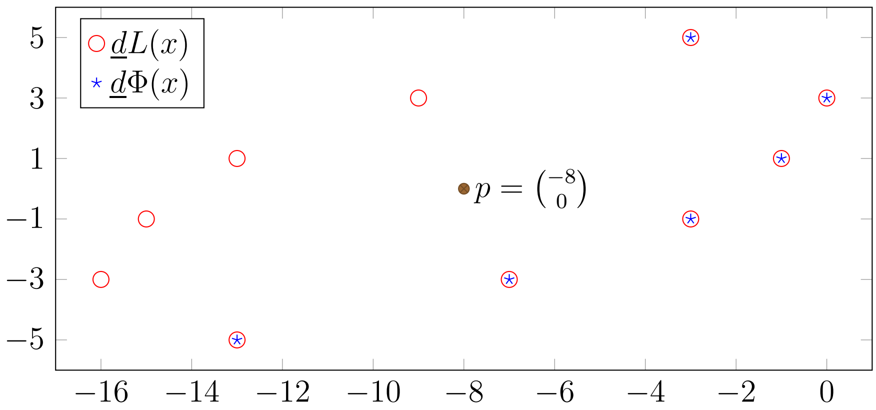

Рис. 3. Гиподифференциалы функций $L(x)$ и $\Phi(x)$ в точке $x_0 = 1$

Работа выполнена в Институте проблем машиноведения РАН при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-41-00060).

ЛИТЕРАТУРА

1. Залгаллер В. А. *О представлении функций нескольких переменных разностью выпуклых функций* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1997. Т. 246. С. 36–65.

2. Gorokhovik V. V., Zorko O. I. Piecewise affine functions and polyhedral sets // Optimization, vol. 31, 1994, pp. 209–221.

3. Ангелов Т. А. Представление кусочно-аффинных функций в виде разности полиэдральных // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Т. 12. № 1. С. 4–18.

4. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* М.: Наука, 1990. 432 с.

5. Малоземов В. Н., Тамасян Г. Ш. *Представление непрерывных кусочно-аффинных функций* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 10 сентября 2019 г. (`http://cnsa.cmlaboratory.com/reps19.shtml#0910`)

6. Долгополик М. В. *Метод кодифференциального спуска* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 28 февраля 2019 г. (`http://cnsa.cmlaboratory.com/reps19.shtml#0228`)