БЛИЖАЙШИЕ К НАЧАЛУ КООРДИНАТ ТОЧКИ ЛИНЕЙНОГО МНОГООБРАЗИЯ*

В.И. Зоркальцев
vizork@mail.ru

30 марта 2023 г.

Аннотация. Представлены результаты исследований свойств и взаимосвязей ближайших к началу координат точек линейного многообразия в конечномерном линейном пространстве при различных определениях понятия близости. Исследуются три типа возможных конкретизаций этой общей геометрической проблемы: 1) поиск векторов линейного многообразия с максимальным (не расширяемым) набором номеров нулевых компонент; 2) поиск векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент; 3) минимизация штрафных за отклонение от нулевого вектора функций. Аксиоматически определяется семейство возможных дифференцируемых штрафных функций, в которое входят гельдеровские и, как их частный случай, евклидовы нормы. Одна из целей представленных в статье исследований состояла в изучении свойств множеств гельдеровских, евклидовых (метод наименьших квадратов), октаэдральных (метод наименьших модулей) и чебышевских проекций начала координат на линейное многообразие при варьировании положительных весовых коэффициентов в соответствующих нормах.

Ключевые слова: проекции точки на линейное многообразие, метод наименьших квадратов, метод наименьших модулей, Чебышевские аппроксимации, Парето-оптимальные решения, векторы с минимальным носителем.

---

* Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» http://oml.cmlaboratory.com/

1. Введение

В прикладной математике (в математическом моделировании, в методах вычислений) часто используется задача поиска ближайшей к началу координат точки линейного многообразия. Нередко эта задача может быть сформулирована в существенно различающихся вариантах, выбор между которыми является произволом, проявлением субъективных предпочтений, пристрастий разработчика. Часто нет абсолютно надежных, неоспоримых аргументов, чтобы пользоваться именно такой, а не другой из известных конкретных формулировок задачи поиска ближайшей к началу координат точки линейного многообразия. В этой связи возникают вопросы: на сколько различаются решения, получаемые при разных конкурирующих постановках, какими свойствами, достоинствами, недостатками они обладают? В данной статье представлены результаты исследований этих вопросов. Формулируемые и обсуждаемые факты являются обобщением и развитием результатов в опубликованных ранее на эту тему брошюры [1], ряда статей [2-5], и монографии [6].

В следующем разделе обсуждается на примерах происхождение исследований представленных в данной статье. При этом вводятся варианты определений линейного многообразия Y, параллельного и ортогонального ему линейных подпространств S и $S^{\perp}$. Раздел имеет цель показать, что содержательно очень разные задачи прикладной математики (в моделировании и вычислительных методах) представляются в виде одной и той же геометрической проблемы – поиска ближайших к нулевому вектору точек линейного многообразия. А также показать, что эта общая проблема имеет разные варианты конкретных постановок (формализаций), исследование свойств и взаимосвязей которых целесообразно. Конечно, подготовленный по этим вопросам читатель может пропустить чтение этого раздела (как и других фрагментов данной статьи на его усмотрение).

2. Некоторые приложения

Используемые обозначения. Обозначим R^n конечномерное линейное вещественное пространство, где n-заданное натуральное число, размерность пространства. Исходным объектом будет линейное многообразие Y из R^n . Под линейным многообразием понимается множество векторов в R^n замкнутое относительно операции аффинной комбинации векторов (линейной комбинации с весами в сумме равными единице): если векторы x^1и x^2находятся в Y, то в Y находится и вектор λx^1+(1- λ) x^2 при любом вещественном λ.

Приведем две часто используемые алгебраические формы задания линейного многообразия, удовлетворяющие приведенному общему геометрическому определению.

1. Сдвиг на вектор d из R^n образа матрицы G размера $n \times r$ при некотором натуральном r:

$$Y = \{y = d - Gx: x \in R^r\}. \tag{1}$$

2. Множество решений системы линейных уравнений:

$$Y = \{y \in R^n: Ay = b\}, \tag{2}$$

где заданы $b \in R^k$, матрица A размера $k \times n$ при некотором натуральном k.

Можно отметить, что приведенные алгебраические формы определения линейного многообразия задают одно и то же множество в том и только в том случае, если

$$Ad = b,\ AG = 0,\ rankA + rankG = n. \tag{3}$$

Здесь 0 – матрица размера $k \times r$ состоящая из нулевых коэффициентов. Символ $rank$ обозначает максимальное число линейно независимых векторов столбцов (и векторов строк), стоящей после этого символа матрицы.

Линейное подпространство параллельное многообразию Y обозначим S. Напомним, что линейным подпространством является множество векторов в R^n замкнутое относительно операции взятия линейных комбинаций: если векторы x^1и x^2находятся в S, то в S находится и вектор $\lambda^1 x^1$+$\lambda^2\ x^2$ при любых вещественных λ^1 и λ^2. Линейное подпространство параллельное рассматриваемому линейному многообразию можно определить, как сдвиг этого линейного многообразия на вектор $-y$ при любом $y \in Y$:

$$S = Y - y. \tag{4}$$

Для алгебраической формы (1) задания линейного многообразия параллельное линейное подпространство является образом матрицы G :

$$S = \{s = Gz:\ z \in R^r\}. \tag{5}$$

Для алгебраической формы (2) параллельное линейное подпространство определяется как ядро, называемое также нуль пространство матрицы A. Этими терминами обозначается множество решений однородной системы линейных уравнений, порождаемой исходной системой линейных уравнений:

$$S = \{s \in R^n: As = 0\}. \tag{6}$$

Здесь 0 нулевой вектор, все компоненты которого нулевые. Отметим, что линейное многообразие будет линейным подпространством в том и только в том случае, если $0 \in Y$.

Ортогональное дополнение (дополняющее S подпространство) обозначим $S^{\perp}$. Это линейное подпространство состоит из векторов R^n ортогональных всем векторам из S:

$$S^{\perp} = \{z \in R^n : \sum_1^n s_j z_j = 0 \text{, для всех } s \in S\}. \tag{7}$$

Для алгебраических форм (5), (6) задания линейного подпространства ортогональное подпространство определяется как нуль пространство транспонированной матрицы G и как образ транспонированной матрицы A:

$$S^{\perp} = \{z \in R^n : G^T z = 0\}, \tag{8}$$

$$S^{\perp} = \{z = A^T u : u \in R^k\}. \tag{9}$$

Размерность линейного многообразия определяется как размерность линейного подпространства ему параллельного. Считаем, что размерность линейного многообразия Y равна некоторому натуральному m :

$$m = rank\, Y = rank\, S = n - rank\, S^{\perp}. \tag{10}$$

Для произвольного множества векторов $D \subseteq R^n$ его выпуклую оболочку будем обозначать $co\, D$. Замыкание множества D обозначим $cl\, D$. Подмножество относительно внутренних точек множества $D \subseteq R^n$ будем обозначать $ri\, D$. Относительно внутренними называются векторы множества внутренние в нем относительно минимального линейного многообразия, содержащего данное множество. Минимальное линейное многообразие содержащее D определяется как пересечение линейных многообразий содержащих это множество. Это минимальное линейное многообразие можно также определить как аффинную оболочку векторов из D . Выпуклое не пустое множество всегда имеет относительную внутренность [7].

Приведем два примера задач, сводящихся к обсуждаемой геометрической проблеме.

1. **Линейная аппроксимация**. Рассматривается представление линейного многообразия в виде (1). Пусть $j = 1, \dots, n$ номера наблюдений, d – вектор значений результирующего показателя в наблюдениях, коэффициент $\boldsymbol{g_{ji}}$ матрицы G соответствует полученному (в результате наблюдений или экспериментов) значению фактора $i = 1, \dots, r$ в наблюдении $j = 1, \dots, n$. Требуется определить значения коэффициентов линейной аппроксимации, составляющих вектор x, при которых минимальны абсолютные значения всех компонент вектора невязок y. В качестве конкретизаций этой общей постановки можно рассматривать минимизацию взвешенной суммы модулей отклонений (метод наименьших модулей), минимизацию взвешенной суммы квадратов отклонений (метод наименьших квадратов), минимизацию взвешенных максимальных по абсолютной величине отклонений (чебышевская аппроксимация):

$$\sum_1^n h_j|y_j| \to min, \qquad y\in Y;$$

$$\sum_1^n (h_j y_j)^2 \quad \to min, \qquad y\in Y;$$

$$max\, h_j\left|y_j\right| \to min, \qquad y\in Y.$$

Здесь h_j заданные положительные весовые коэффициенты. Весовые коэффициенты h_j могут иметь различный смысл. Часто их интерпретируют как показатели точности наблюдений. Весовые коэффициенты могут также служить в качестве управляемых параметров для достижения желательных результатов, для целей соизмерения показателей разной природы, для учета разной информативности наблюдений.

Во многих работах исследуются задачи аппроксимации в более сложных в т.ч. нелинейных постановках, для которых приведенная здесь постановка является важной теоретической и вычислительной основой. Как известно, первой крупной прикладной математической проблемой в истории человечества была задача оценки параметров движения планет по располагаемым астрономическим наблюдениям. Первая известная строгая формулировка этой проблемы сделана независимо хорватским физиком Босковичем и французским ученым Лапласом. Они сформулировали эту проблему в виде минимизации суммы абсолютных отклонений наблюдаемых значений параметров орбит от расчетных значений [8]. Аппроксимация в виде задачи минимизации суммы модулей отклонений ныне активно используется и исследуется во многих работах, например, в [9-12].

Метод наименьших квадратов был изобретен независимо Лежандром и Гауссом [13]. В своей статье посвященной, по названию, методу наименьших квадратов в задаче оценки параметров орбит планет Гаусс ввел поныне используемые способы обоснования метода наименьших квадратов статистическими критериями. Во второй своей статье, посвященной (также по названию) методу наименьших квадратов в задаче триангуляции, Гаусс подверг критики данные им же ранее подходы в обосновании метода наименьших квадратов (из-за того, что эти подходы предполагали наличие больших объемов статистически однородных реализаций). И предложил интерпретировать метод наименьших квадратов только как использование одной из возможных штрафных функций за отклонение от нуля погрешностей аппроксимаций. Как он писал, можно было использовать четвертую, восьмую и т.д. степени от погрешностей аппроксимации, но вторая удобна в вычислительном отношении.

Линейная аппроксимация методом наименьших квадратов сводится к относительно простой вычислительной задаче поиска решения системы линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей:

$$(G^T H G)x = G^T H d,$$

где

$$H = diag\ h$$

- диагональная матрица, составленная из весовых коэффициентов. Вычислив вектор x, затем из определения (1) можем определить вектор y.

Метод наименьших квадратов активно используется в различных прикладных задачах. По этому методу имеется большой объем научной и учебной литературы. Особенно много публикаций посвящено исследованиям свойств этого метода с позиций математической статистики, методам вычислений этим методом (например, [14-17]). Вместе с тем нельзя считать, что этот метод исчерпывающе изучен. В частности, мало исследовано влияние на получаемые решения весовых коэффициентов при квадратах отклонений.

Чебышевской аппроксимации также уделено большое внимание в научной литературе. Можно отметить монографии [18-20]. Поиск чебышевской аппроксимации, так же, как и задача минимизация суммы модулей сводятся к не трудной для нынешнего времени задаче линейного программирования. Сложности порождает, особенно для чебышевской аппроксимации, возможная не единственность решения у задач линейного программирования. Причем, у чебышевской аппроксимации среди этих неединственных решений могут оказаться явно неудовлетворительные в содержательном отношении. В качестве противодействия этому используется так называемое условие Хаара [21], согласно которому чебышевская аппроксимация должна применяться только в случае, если эта задача имеет единственное решение. Это не всегда можно легко проверить и не ясно, что делать, если такое условие не гарантируется.

В связи с рассмотренными тремя способами линейной аппроксимации возникают вопросы. Как соотносятся между собой решения получаемые методом наименьших модулей, наименьших квадратов, чебышевская аппроксимация? Как влияет выбор вектора весовых коэффициентов h на получаемые решения? Что означает неоднозначность решения задач аппроксимации методом наименьших модулей и чебышевской аппроксимации? Как выбирать среди множества решений, когда решение неединственное? Как взаимосвязаны решения, получаемые при иных, в том числе более общих постановках (минимизация штрафных функций, Парето – оптимизация)?

2. Поиск решения системы линейных уравнений максимально приближенного к заданному недопустимому решению. Рассматривается представление линейного многообразия в виде (2).

Пусть требуется найти вектор показателей $z \in R^n$, удовлетворяющий системе линейных уравнений

$$Az = g,$$

где заданными являются матрица A размера $k \times n$ и вектор $g \in R^k$. Имеется набор значений переменных виде компонент вектора $s \in R^n$, которые являются желательными, но не удовлетворяющими приведенной здесь системе линейных уравнений. Требуется найти векторy, удовлетворяющий этой системе, компоненты которого расходились бы минимально по абсолютной величине с соответствующими компонентами вектора s.

Используем замену переменных. Введем вектор расхождения желаемых и достигаемых значений переменных исходной задачи -

$$y = z - s.$$

Тогда при

$$b = g - As$$

проблема сводится к поиску ближайшего к началу координат вектора линейного многообразия, заданного условием (2).

В частности, в виде системы линейных уравнений представляется модель межотраслевого баланса (МОБ). Обсуждаемая здесь задача поиска допустимых решений, максимально приближенная к заданному недопустимому решению, имеет место как при составлении отчетного МОБ, так и при составлении прогнозного МОБ. При формировании отчетного (за прошлые годы) МОБ в результате сбора, обработки, агрегировании исходных данных по разным, в том числе вполне объективным причинам, получается набор показателей, неудовлетворяющий точно условиям модели МОБ.

Требуется их, по возможности, минимальная корректировка, чтобы были выполнены все условия модели МОБ. В [22] представлена программная разработка осуществляющая решение такой задачи путем минимизации чебышевской нормы вектора отклонений.

При прогнозировании и планировании развития экономики разноплановые, независимо вырабатываемые разными специалистами прогнозы и пожелания должны увязываться в единую систему допустимых вариантов. Для этого требуется решение задачи определения минимальных корректировок несбалансированных прогнозных показателей, что бы они после этого стали удовлетворять условиям МОБ. В конце 80-х годов очень часто менялись приоритеты в предстоящем развитии советской экономики, что отражалось в виде частых изменений желаемых на перспективу значениях показателей межотраслевого баланса. Для ускорения процесса корректировок перспективного МОБ России был разработан для Института экономики при Госплане РСФСР вычислительный комплекс [23], осуществляющий поиск требуемых сбалансированных решений МОБ максимально приближенных к заданным несбалансированным решениям на основе метода наименьших квадратов.

При решении задачи поиска ближайшей к началу координат точки линейного многообразия в виде (2) методом наименьших квадратов также можно базироваться на решении системы линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей. В данном случае требуется решить систему линейных уравнений относительно вектора $v \in R^k$, состоящего из множителей Лагранжа ограничений задачи:

$$(AHA^t)v = b.$$

Вычислив вектор v, затем можем определить значения искомого вектора оптимальных невязок

$$y = A^T v.$$

Задачи минимальных корректировок показателей балансовых экономических моделей неизбежно возникает при решении задач перехода от моделей одной детализации (например, 200 отраслевых) к моделям другой детализации (например, к 30 отраслевым). Нет [24] и не может быть [25] корректных во всех отношениях процедур для таких переходов. Поэтому неизбежно использование процедур корректировки показателей типа приведенной выше.

Процедуры поиска минимальных корректировок в балансовых моделях могут быть полезны для разного рода содержательных экономических разработок. В [26] изложена балансовая модель (сформированная на базе МОБ) формирования структуры цен в экономике в виде задачи минимизации расхождения желаемых и сбалансированных ценовых значений, финансовых потоков. В этой модели минимизация расхождений желаемых и сбалансированных показателей также решалась на базе метода наименьших квадратов. По моим оценкам, совпавшим с оценками некоторых зарубежных экономистов, в конце 80-х годов возможные рентные доходы от добычи угля, нефти и газа в СССР составляли 165 млрд. рублей. В это время госбюджет СССР был равен примерно 155 млрд. рбл, а консолидированный бюджет СССР и всех союзных республик составлял примерно 600 млрд рбл. (естественно в рублях тех лет). Потенциальные рентные доходы использовались в те годы на поддержание на низком уровне цен энергоресурсов в нашей стране и поставках их странам «союзникам», а также на разного рода помощь странам «третьего мира», на закупку за рубежом оборудования и товаров

При обсуждении идеи наполнения госбюджета за счет рентных доходов с природных ресурсов часто высказывалось замечание, что это приведет к росту цен на энергоресурсы в стране, что негативно скажется на всей экономике. Цель разработки [26] - показать, что введение полномасштабных рентных платежей за природные ресурсы может и должно сопровождаться масштабным сокращением налогов. И это может приводить не к росту всех цен, а к изменению структуры, соотношений цен, даст экономические преимущества перерабатывающим, высокотехнологичным отраслям.

3. Векторы линейного многообразия с минимальным носителем

Рассматриваемая в данном разделе формализация общей проблемы определения ближайшей к началу координат точки линейного многообразия редко используемая, но имеет важное, ключевое значение для понимания и описания свойств решений при других обсуждаемых далее формализаций.

Определения и обозначения. Для вектора $x \in R^n$ множества номеров его компонент с нулевыми, положительными, отрицательными и ненулевыми значениями обозначим

$$J_0(x) = \{j: x_j = 0\}, \quad J_+(x) = \{j: x_j > 0\},$$

$$J_-(x) = \{j: x_j < 0\}, \quad J(x) = \{j: x_j \neq 0\}. \tag{11}$$

Набор номеров $J(x)$ принято [7] называть *носителем вектора* x.

Ситуации не строгого включения (включено и возможно совпадают) *и строгого включения* (включено и не может совпадать) одного множества в другое *будем различать использованием символов* $\subseteq$ *и* $\subset$.

Если для векторов q и y из R^n выполняется соотношение

$$J(q) \subset J(y), \tag{12}$$

то, будем говорить, что *вектор q имеет суженный относительно вектора y носитель, а вектор y имеет расширенный относительно вектора q носитель*. Если в дополнение к (12) выполняются соотношения

$$J_+(q) \subseteq J_+(y), \quad J_-(q) \subseteq J_-(y), \tag{13}$$

то, будем говорить, что *вектор q имеет суженные относительно вектора y наборы ненулевых компонент, вектор y имеет расширенные относительно вектора q наборы ненулевых компонент.*

Совпадение или несовпадение множеств $J(q)$ и $J(y)$ означает, *что векторы q и y имеют одинаковые или, соответственно, разные носители.* Выполнение обоих равенств

$$J_+(q) = J_+(y), \quad J_-(q) = J_-(y), \tag{14}$$

означает, что *векторы q и y имеют одинаковые наборы ненулевых компонент.* Иначе, если не выполняется хотя бы одного из равенств (14), то считаем, что *векторы q и y имеют разные наборы ненулевых компонент*.

Пусть L множество векторов в R^n. *Вектор y из L будем называть вектором с минимальным или с не сужаемым носителем в рамках L, если не существует вектора q в L, при которых справедливо (12). Вектор y из L будем называть вектором с минимальными (с не сужаемыми) наборами номеров нулевых компонент в рамках L, если не существует вектора q в L при которых справедливы (12), (13).*

Вектор q из L будем назвать вектором с максимальным (с не расширяемым) носителем в множестве L, если в этом множестве не существует вектора y, при котором справедливо (12). Вектор q из L будем назвать вектором с максимальными (с не расширяемыми) наборами ненулевых компонент в множестве L, если не существует вектора y в L при которых выполняются соотношения (12), (13).

Векторы линейного многообразия Y с минимальным носителем (в рамках этого линейного многообразия) будем называть особыми векторами данного линейного многообразия. Множество особых векторов линейного многообразия Y обозначим B. Стандартно доказываются следующие три факта.

1. Множество B состоит из векторов линейного многообразия с минимальными наборами ненулевых компонент в рамках многообразия Y. «Векторы линейного многообразия с минимальными наборами в

рамках этого многообразия ненулевых компонент» можно считать вторым, равносильным определением особых векторов.
2. Любые два вектора из B имеют различающиеся носители.
3. Число номеров в носителе любого вектора из B не больше размерности линейного многообразия, т.е. не больше числа m .

Из последних двух утверждений следует

Теорема 1. *Число особых векторов линейного многообразия Y конечно, не более чем*

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \quad (15)$$

Замечание. Особые векторы линейного многообразия имеют, в дополнение к приведенным выше двум, еще одно равносильное определение. Это векторы линейного многообразия с максимальными (нерасширяемым в рамках данного многообразия) наборами нулевых компонент.

4. Векторы линейного многообразия с Парето минимальными абсолютными значениями компонент

В данном разделе рассматривается самая общая формализация обсуждаемой в рамках данной статьи проблемы определения ближайших к началу координат точек линейного многообразия. Приведем, сначала, некоторые используемые далее понятия и обозначения.

Для произвольного множества векторов $D \subseteq R^n$ его выпуклую оболочку будем обозначать $co\, D$. Замыкание множества D обозначим $cl\, D$. Подмножество относительно внутренних точек множества $D \subseteq R^n$ будем обозначать $ri\, D$. Относительно внутренними называются векторы множества внутренние в нем относительно минимального линейного многообразия, содержащего данное множество. Минимальное линейное многообразие содержащее D определяется как пересечение линейных многообразий содержащих это множество. Это минимальное линейное многообразие можно также определить как аффинную оболочку векторов из D . Выпуклое не пустое множество всегда имеет относительную внутренность [7].

Рассматриваемую геометрическую проблему в самом общем виде можно сформулировать как поиск решения многокритериальной задачи минимизации абсолютных значений всех компонент вектора линейного многообразия. Только в случае, когда это многообразие является линейным подпространством, содержит нулевой вектор эти критерии не будут противоречивыми. Нулевой вектор будет решением такой задачи по всем критериям оптимизации.

В общем случае в качестве непротиворечивой формулировки многокритериальной задачи следует искать оптимальные по Парето решения, которые нельзя улучшить по любому из критериев, не ухудшив по какому-то другому критерию. Введем множество векторов линейного многообразия с Парето минимальными абсолютными значениями всех компонент:

$$Q = \{q \in Y : \nexists\ q \in Y,\ |y_j| \leq \left|q_j\right|,\ \mathrm{j} = 1, \dots n,\ \sum |y_j| < \sum q_j\}. \tag{16}$$

Из приведенного определения Q вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Вектор* $x \in Y$ *не находится в множестве* Q *в том и только в том случае, если существует вектор* $s \in S$ *,такой что*

$$s \neq 0,\ J_+(s) \subseteq J_-(x),\ \ J_-(s) \subseteq J_+(x). \tag{17}$$

Данная лемма, как и исходное определение (16), может быть полезна в качестве критерия для выявления векторов не принадлежащих Q. Из леммы 1 и теоремы Гордона об альтернативных системах линейных неравенств [27] получаем утверждение, которое может служить в качестве конструктивного критерия для выявления векторов находящихся в Q.

Лемма 2. Вектор $q \in Y$ *находится в можестве* Q *в том и только в том случае, если существует вектор* $s \in S^{\perp}$ *, такой что*

$$J_+(q) \subseteq J_+(s),\ \ J_-(q) \subseteq J_-(s). \tag{18}$$

Методом от обратного на основе леммы 1 доказывается, что любой особый вектор линейного многообразия является вектором линейного многообразия с Парето минимальными абсолютными значениями компонент. Справедлива

Теорема 2. $B \subseteq Q$.

Важно, что любой вектор из Q можно представить в виде выпуклой комбинации векторов из B. В [2] доказано следующее утверждение.

Теорема 3. $Q \subseteq coB$.

Из приведенных последних двух теорем непосредственно следует, что выпуклые оболочки множеств Q и B совпадают.

Теорема 4. $co\ Q = co\ B$.

Эта теорема позволяет, в частности, оценивать диапазоны возможных вариаций компонент векторов линейного многообразия с Парето минимальными абсолютными значениями компонент на основе конечного набора особых векторов линейного многообразия.

Множество Q при n≥ 4 может быть (и обычно бывает) невыпуклым. Оно замкнутое, связное, является объединением конечного числа политопов. В множестве Q имеется конечно число векторов с нерасширяющимися и различающимися в этом множестве наборами номеров ненулевых компонент. Пусть $y^i, i = 1, \dots k$ максимальный (нерасширяемый) набор таких векторов. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. *У всех векторов линейного многообразия с нерасширяющимися в рамках этого многообразия наборами номеров ненулевых компонент и различающимися* y^i, $i = 1, \dots, k$ *одинаковый носитель.*

Следствие. *Одинаковые носители будут у введенных выше векторов линейного многообразия с нерасширяющимися и различающимися наборами ненулевых компонент* y^i, $i = 1, \dots, k$.

Лемма 4. *Любой вектор из* Y*с одинаковым или суженным набором номеров относительно одного из векторов* y^i, $i = 1, \dots, k$ *находится в множестве* Q.

Лемма 5. *Любой вектор из* Q *является вектором с суженым или одинаковым набором номеров ненулевых компонент относительно одного из векторов* $y^i, i = 1, \dots, k$.

Из приведенных лемм следует, что у каждого из векторов $y^i, i = 1, \dots, k$

имеется набор особых векторов B^i , выпуклая оболочка которых $Q^i = co\ B^i$ состоит из векторов множества Q с одинаковыми и суженными относительно y^i наборами номеров ненулевых компонент. Отсюда следует

Теорема 5. $Q = \{\cup\ Q^i\colon\ i = 1, \dots, k\}$.

Теорема 6. $ri\ Q \supseteq \{\cup\ ri\ Q^i\colon\ i = 1, \dots, k\}$.

Множество Q^i является политопом, вершинами которого являются векторы из B^i. Один и тот же вектор из B может быть вершиной у нескольких политопов Q^i. Отметим также что множество $ri\ Q$ может быть не связным в отличии от множества Q. И такие примеры имеются.

Пример. Пусть $n = 2$, линейное многообразие является прямой, удовлетворяющей уравнению

$$x_1 + x_2 = 1.$$

У этого линейного многообразия два особых вектора с компонентами:

$$x_1^1 = 1, x_2^1 = 0; \qquad x_1^2 = 0,\ x_2^2 = 1.$$

Линейное подпространство параллельное линейному многообразию состоит из векторов $s \in R^2$, удовлетворяющих уравнению

$$s_1 + s_2 = 0.$$

Ортогональное линейное подпространство состоит из векторов $s \in R^2$ с компонентами, удовлетворяющими условию:

$$s_1 = s_2.$$

В $S^{\perp}$ находится вектор с обоими компонентами равными единице. А у любого вектора q находящемуся в интервал $[x^1, x^2]$ обе компоненты неотрицательные. Поэтому будут выполнятся соотношения (19). Согласно лемме 2 точки из указанного интервала образуют Q, что подтверждает приведенные выше три теоремы.

В рассматриваемом примере у множества Q не может быть двух различающихся векторов с разными нерасширяемыми наборами номеров ненулевых компонент. Вектором из Q с нерасширяемыми наборами номеров ненулевых компонент будет, в частности, вектор с компонентами

$$x_1 = x_2 = 0.5.$$

Множество Q состоит в данном случае из одного политопа, которым является указанный выше интервал.

5. Минимизация дифференцируемых штрафных функций

Пусть f некоторая штрафная функция от вектора $x \in R^n$, возрастающая при удалении этого вектора от начала координат. Точку минимума этой функции на рассматриваемом линейном многообразии обозначим

$$y(f) = \arg\min\{f(y) : y \in Y\}. \quad (19)$$

Обозначим F множество дифференцируемых штрафных функций f от вектора $x \in R^n$ которые:

1) могут быть преобразованы в результате дифференцируемого возрастающего преобразования в строго выпуклые функции;
2) для всех $x \in R^n$

$$\text{sign}\, \nabla_j f(x) = \text{sign}\, x_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (20)$$

Здесь функция $sign\,\alpha$ от вещественного числа α принимает значения -1, 0, +1, если $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ и, соответственно, $\alpha > 0$.

Стандартно доказывается следующее утверждение.

Теорема 7. *При любой функции $f \in F$ существует и единственное решение задачи (19).*

Введем множество решений задачи (19) при различных штрафных функциях из рассматриваемого множества. Пусть

$$PF = \{ y(f) : f \in F\}. \quad (21)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. $ri\, Q \subseteq PF \subseteq Q$. (22)

Отметим, что замыканием множества $ri\, Q$ является множество Q. ИЗ теоремы 8 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. $cl\, ri\, Q = cl\, PF = Q$. (23)

Согласно этой теореме любой вектор из множества векторов линейного многообразия с минимальными по Парето абсолютными значениями компонент могут быть получены с любой требуемой точностью как результат минимизации на линейном многообразии функции из F.

6. Проекции начала координат на линейное многообразие

Гельдеровские проекции. Множеству F принадлежит любая гельдеровская норма

$$\rho_p^h(y) = \left(\sum_1^n |h_j y_j|^p\right)^{1/p}. \quad (24)$$

Здесь p - заданный степенной коэффициент нормы, $p > 1$, h - заданный вектор положительных весовых коэффициентов, $h \in R_+^n$, где R_+^n – подмножество векторов R^n с положительными всеми компонентами. Эта функция удовлетворяет условию (20), является выпуклой, но не строго выпуклой. В результате возрастающего дифференцируемого преобразования (возведения в степень p) получим строго выпуклую функцию

$$f_p^h(y)=\sum_1^n |h_j y_j|^p. \qquad (25)$$

Задача минимизации функции (25) на линейном многообразии дает такое же решение, как и поиск гельдеровской проекции на линейное многообразие начала координат, т. е. такое же решение, как и задача минимизации на Y функции (24).

Введем множество гельдеровских проекций, получаемых в результате варьирования положительных весовых коэффициентов с фиксированным степенным коэффициентом $p > 1$ в гельдеровских нормах

$$P_p = \{ y\left(f_p^h\right): h \in R_+^n \}, \qquad (26)$$

и множество всех гельдеровских проекций начала координат на линейное многообразие

$$P = \{\cup P_p:\ p > 1\}. \qquad (27)$$

Поскольку множество гельдеровских норм с фиксированным степенным коэффициентом является подмножеством всех гельдеровских норм, а множество гельдеровских норм является подмножеством множества штрафных функций F, то при любом $p > 1$

$$P_p \subseteq P \subseteq\ PF. \qquad (28)$$

Как доказано в [2] справедливы и обратные включения. Получаем следующее утверждение.

Теорема 11. $P_p = P =\ PF$ при любом $p > 1$. (29)

Евклидовы проекции, метод наименьших квадратов. При $p = 2$ гельдеровская норма является евклидовой нормой. Вектор $y\left(f_2^h\right)$ при любом $h \in R_+^n$ будет одной из евклидовых проекций начала координат на линейное многообразие Y . Иными словами, задача поиска ближайшего к нулевому вектору линейного многообразия решается методом наименьших квадратов. Этот метод обладает рядом достоинств.

1. Метод наименьших квадратом удобен в вычислительном отношении. При его использовании задача поиска ближайшего к началу координат

вектора линейного многообразия сводится к решению систем линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей.

2. Любое из рассмотренных в данной статье решений можно получить с любой точностью методом наименьших квадратов за счет варьирования весовых коэффициентов:

$$P_2 = P = PF, \;\; cl\, P_2 = Q, \;\; B \subseteq cl\, P_2. \tag{30}$$

3. На основе соотношения $co\, cl\, P_2 = co\, B$ можно оценивать диапазоны вариации евклидовых проекций при варьировании весовых коэффициентов.

4. Соотношение $P_2 \subseteq coB$ означает ограниченность евклидовых проекций, что оказалось очень полезным для теоретического обоснования алгоритмов внутренних точек в оптимизации [6]. Поиск направления улучшения решения на каждой итерации в этих алгоритмах представляется в виде задачи минимизации на линейном многообразии евклидовой нормы с итеративно изменяющимися весовыми коэффициентами в норме.

5. Евклидова проекция $y\left(f_2^h\right)$ является непрерывным отображением вектора весовых коэффициентов $h \in R_+^n$.

Октаэдральные проекции, метод наименьших модулей. Известный факт: гельдеровские нормы при степенном коэффициенте сходящимся к единице и сходящимся к бесконечности переходят в не дифференцируемые функции – в октаэдральную и чебышевскую нормы. Для $h \in R_+^n,\; x \in R^n$:

$$\rho_p^h(x) \to \rho_1^h(x), \;\; \text{при}\, p \to 1;$$

$$\rho_p^h(x) \to \rho_\infty^h(x), \;\; \text{при}\, p \to \infty.$$

Здесь

$$\rho_1^h(x) = \sum_1^n h_j \left|x_j\right|,$$

$$\rho_\infty^h(x) = max\{h_j \left|y_j\right| : j = 1, \dots, n\}.$$

Октаэдральной проекцией начала координат на линейное многообразие будем называть решение задачи поиска вектора линейного многообразия с минимальной октаэдральной нормой. Множество решений этой задачи при данном векторе весовых коэффициентов $h \in R_+^n$ обозначим

$$Y^h = Arg\min\{\; \rho_1^h(y) : \; y \in Y\}.$$

Справедливы следующие утверждения

Теорема 12. $Q = \{\cup\, Y^h : \; h \in R_+^n\}$.

Теорема 13. Если $y \in Y^h$, при некотором $h \in R_+^n$, то любой вектор q из Y с одинаковым или суженным набором номеров ненулевых компонент также находится в Y^h.

Теорема 14. $Y^h \cap B \neq \emptyset$ при любом $h \in R_+^n$.

Согласно последней теореме октаэдральные проекции начала координат на линейное многообразие всегда содержат вектора линейного многообразия с минимальным носителем. Этот факт отмечался в [1, 28]. С этим связано приписываемое октаэдральным проекциям свойство робастности. Приведенные теоремы означают, что множество октаэдральных проекций для данного вектора весовых коэффициентов состоит из единственного вектора в том и только в том случае, если это вектор линейного многообразия с минимальным носителем. Другие вектора из Q, не являющиеся особыми векторами линейного многообразия, будут октаэдральными проекциями только в том случае, если при данных весовых коэффициентах множество октаэдральных проекций состоит не из одного вектора.

Чебышевские проекции. Задача линейного программирования, к которой сводится проблема поиска точек линейного многообразия с минимальной чебышевской нормой, также может иметь неединственное решение. Причем среди решений могут оказаться не находящиеся в множестве векторов линейного многообразия с Парето минимальными абсолютными значениями компонент. В целях борьбы с негативными последствиями от неоднозначности было введено условие Хаара [21], согласно которому задачу поиска чебышевской проекции на линейное многообразие следует рассматривать только для случая, когда эта задача имеет единственное решение. Далеко не всегда выполнение этого условия легко можно проверить. И что делать, если оно не выполняется или не известно выполняется или нет?

Пример. Условие Хаара не выполняется для линейного многообразия в двухмерном пространстве, заданном условием

$$x_2 = 1.$$

Все рассмотренные ранее в данной статье формулировки задачи определения ближайшей к началу координат точки линейного многообразия дадут в качестве решения единственный вектор с компонентами

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Только из этого вектора будет состоять множество векторов данного линейного многообразия с Парето минимальными абсолютными значениями компонент.

А вот поиск чебышевской проекции даст интервал решений содержащий внутри эту точку. В частности, при одинаковых весовых коэффициентах получим интервал $[x^1, x^2]$, где:

$$x_1^1 = -1, x_2^1 = 1; \quad x_1^2 = 1, x_2^2 = 1.$$

Алгоритм поиска однозначной чебышевской проекции. Вместо использования условия Хаара, было предложено [29] использовать алгоритм последовательного поиска относительно внутренних точек оптимальных решений конечного числа лексикографически упорядоченных задач линейного программирования. Описание этого алгоритма и его свойств имеется в [29-32]. Свойством вырабатывать именно относительно внутренние точки оптимальных решений (другими словами, оптимальных решений с минимальным, не сужаемым набором активных ограничений) обладает метод внутренних точек, о которых запланирован мой доклад на этом семинаре 18 мая этого года. Постараюсь в качестве иллюстрации такого особого свойства метода внутренних точек более подробно рассказать об алгоритме [29] поиска однозначной чебышевской проекции.

Получаемое по алгоритму [29] однозначную чебышевскую проекцию начала координат на линейное многообразие обозначим $y(\rho_\infty^h)$. Множество таких чебышевских проекций при различных векторах весовых коэффициентов $h \in R_+^n$ обозначим P_∞. Справедлива

Теорема 15. $P_2 = P_\infty$.

Эта теорема подтверждает правомочность введенного алгоритма поиска однозначной чебышевской проекции. Согласно этой теоремы евклидову проекцию при любом векторе весовых коэффициентов из R_+^n можно получить в виде чебышевской проекции при некотором векторе весовых коэффициентов из R_+^n. Причем имеется простое в вычислительном отношении правило определения вектора весовых коэффициентов для чебышевской проекции при располагаемой евклидовой проекции с каким-то набором весовых коэффициентов в евклидовой норме. Согласно теореме 15 справедливо и обратное. Для любой чебышевской проекции с любым вектором положительных весовых коэффициентов в чебышевской норме существует вектор положительных весовых коэффициентов, использование которого в евклидовой норме даст евклидову проекцию, совпадающую с исходной чебышевской проекцией. Во второй части доказывается (на базе теорем об альтернативных системах линейных неравенств) утверждение только в виде факта существования, без указания на конкретное правило перехода от одних весовых коэффициентов к другим.

Приводимая далее теорема является еще одним подтверждением того, что предлагаемая чебышевская проекция является вполне оправданным способом избавления от условия Хаара.

Теорема 16. *Для любого вектора весовых коэффициентов* $h \in R_+^n$ *гельдеровские проекции* $y\left(f_p^h\right)$ *сходятся при* $p \to \infty$ *к чебышевской проекции* $y(\rho_\infty^h)$ *с тем же вектором весовых коэффициентов.*

Этот факт может служить также основой для конструирования новых алгоритмов итеративного расчета рассматриваемых здесь чебышевских проекций – путем итеративного приближения к гельдеровской проекции одновременно с увеличением в гельдеровской норме степенного коэффициента. Один из возможных способов организации такого типа вычислительного процесса обсуждается в книге Ремеза [20]. Выражаю свою признательность В. Н. Малоземову за то, что он обратил внимание на это и на фундаментальную по проблемам чебышевской аппроксимации книгу[20].

Необходимо отметить, что обсуждаемые здесь октаэдральная и чебышевская проекции начала координат на линейное многообразие являются частными случаями рассматривавшейся на данном семинаре 23 марта в докладе В.Н. Малоземова проблемы поиска ближайших к началу координат точек множеств при определении расстояния через полиэдральные нормы [33]. Некоторые результаты исследований, в т.ч. октаэдральные и чебышевские проекции не были изложены здесь в полном объеме. В частности, не представлены полученные к настоящему времени обобщения изложенных здесь результатов для ситуации, когда рассматриваются ближайшие к началу координат точки полиэдра, а не линейного многообразия. Надеюсь в дальнейшем это сделать.

Литература

1. Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов и его конкуренты. Иркутск: СЭИ СО РАН, 1993. 30 с.
2. Зоркальцев В.И. Наименее удаленные от начала координат точки линейного многообразия. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1995, Том 35, с. 635 – 641.
3. Зоркальцев В.И. Гёльдеровские и октаэдрические проекции точки на линейное многообразие // Международный научный журнал Спектральные и эволюционные задачи (Труды международной конференции «Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2012). – Симферополь, 2012. – Т.22. – С.81 – 94.

4. Zorkal’tsev V. I. Octahedral and Euclidean Projections of a Point to a Linear Manifold , Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2014, Vol. 284, Suppl. 1, pp. S1–S13.
5. Zorkal’tsev V. I. Convergence of Hölder Projections to Chebyshev Projections// Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2020, Vol. 60, No. 11, pp. 1810–1822.
6. Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. – Новосибирск: Наука, 1995. – 270 с.
7. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
8. Багратуни Г.В. Предисловие к книге Гаусс К.Ф. Избранные геофизические сочинения. – М: Геодезист, 1967.
9. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь, 1983. 304 с.
10. Панюков, А.В. Взаимосвязь взвешенного и обобщённого вариантов метода наименьших модулей / А.В. Панюков, А.Н. Тырсин // Известия Челябинского научного центра. 2007. – №1(35). – С. 6–11.
11. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния: Пер. с англ. / Ф. Хампель, Э. Рончетти, П. Рауссеу, В. Штаэль – М.: Мир, 1989. – 512 с.
12. Азарян А. А. Быстрые алгоритмы моделирования многомерных линейных регрессионных зависимостей на основе метода наименьших модулей// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Екатеринбург, 2018. – 148 с.
13. Гаусс К.Ф. Избранные геофизические сочинения. - М.: Гедезиздат, 1967.
14. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1962.
15. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986.
16. Чеботарев А.С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятности.-М.: Геодезиздат, 1968.
17. Колмогоров А.И. К обоснованию метода наименьших квадратов// Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1986.
18. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
19. Коллатц А., Крабе В. Теория приближений. Чебышевские приближения. М: Наука, 1978. 272 с.
20. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближния. – Киев: Наукова думка, 1969. 624 с.
21. Haare A. Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen, 1917. V. 78. Is. 1–4. Pp. 294–311.

22. Черкассовский Б.В. Задачи балансировки матриц // Методы математического программирования и программное обеспечение. – Свердловск: УрО АН СССР, 1984. С. 216–217.
23. Батоева И.В., Беденков А.Р., Зоркальцев В.И., Садов С.Л. Согласование частных прогнозов в балансовых моделях. – Сыктывкар: Коми НЦ УрО АН СССР, 1990.
24. Журавель Н. М. Статистическое агрегирование в экономических системах. – Новосибирск: Наука, 1989. -153 с.
25. Zorkaltsev V. I. The Problems of Aggregation in Economics// We Keep the Traditions of Russian Statistics: 1. Open Russian Statistical Congress. – Novosibirsk, NSUEM, 2015. – Pp.276–277.
26. Зоркальцев В.И., Черникова Л.И. Рента, налоги и структура цен. Иркутск: СЭИ СО РАН, 1991. 22 с.
27. Зоркальцев В.И., Киселёва М.А. Системы линейных неравенств: учебное пособие. Иркутск: Издательство Иркутского Государственного Университета, 2007, 127 с.
28. Лакеев А.В., Носков С.И. Метод наименьших модулей для линейной регрессии: число нулевых ошибок аппроксимации // Методы оптимизации и их приложения: сб. тр. XV Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» Т.2 Математическое программирование. Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011, с.117 – 120.
29. Zorkaltsev V. I. Chebyshev and Others Projections of Point on Polyhedron // Abstracts of the International Conference dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov, СПб: ВВМ, 2017.
30. Зоркальцев В.И. Губий Е.В., Пержабинский С.М. Чебышевские и евклидовы проекции точки на линейное многообразие // Управление большими системами. - 2019. - Выпуск 80. - С.6-19.
31. Зоркальцев В.И. Чебышевские приближения могут обходиться без условия Хаара // Материалы Международного симпозиума, посвященного 100-летию математического образования в Восточной Сибири и 80-летию со дня рождения профессора О. В. Васильева. - Иркутск: ИГУ. - 2019. - С. 29-33.
32. Зоркальцев В.И., Губий Е. В. Чебышевская аппроксимация и метод наименьших квадратов // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математическая. – 2020 – т.33 – с. 3-19.
33. Малоземов В. Н. Оптимизация в полиэдральных нормах // Семинар «O&ML». Избранные доклады. 23 марта 2023 г. (http://oml.cmlaboratory.com/reps23.shtml#0323)