

*Байкальский государственный университет, Иркутск*

*проф, д.т.н. Зоркальцев Валерий Иванович*

# **Метод внутренних точек в оптимизации: история, особенности и перспективы**

Санкт-Петербург, семинар В. Н. Малоземова:  
«Оптимизация, машинное обучение, искусственный  
интеллект», доклад 18 мая 2023 г.

<https://www.zorkaltsev.com>

vizork@mail.ru

# Метод внутренних точек

Метод внутренних точек – семейство алгоритмов оптимизации, осуществляющих улучшение решений внутри области из векторов, удовлетворяющих ограничениям-неравенствам в строгой форме.

Используют специальные приемы для учета степени приближения к границе этой области при выборе направления улучшения решения:

- преобразования функций в ограничениях-неравенствах;
- стимулирование движения от границы области;
- **стимулирование движения вдоль границы области при приближении к ней.**

Для учета ограничений-равенств и особенностей целевой функции сочетаются с другими методами.

# Взаимно-двойственные задачи ЛП

$$c^T x \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (1)$$

$$b^T u \rightarrow \max, \quad u \in U, \quad (2)$$

где

$$X = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\},$$

$$U = \{u \in R^m : g(u) \equiv c - A^T u \geq 0\}$$

– множества допустимых решений,  $c \in R^n$ ,  $b \in R^m$ ,  $A$  – матрица  $m \times n$ .

Множества оптимальных решений задач (1), (2) обозначим  $\bar{X}$ ,  $\bar{U}$ .

Условие дополняющей нежесткости: для  $(x, u) \in X \times U$

$$(x, u) \in \bar{X} \times \bar{U} \Leftrightarrow x_j g_j(u) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

играет большую роль при интерпретации решений.

Если (1) – модель производства,  $b$  – вектор ресурсов,  $x$  – вектор интенсивности технологий, то (2) – модель ценообразования,  $u$  – вектор цен ресурсов,  $-g(u)$  – вектор эффективности технологий.

$$-g_j(u) < 0 \Rightarrow x_j = 0, \quad x_j > 0 \Rightarrow -g_j(u) = 0.$$

# Свойства двойственных задач линейного программирования

Введем множества рецессивных направлений задач (1), (2)

$$\tilde{X} = \{s \in R^n : As = 0, s \geq 0, c^T s < 0\},$$

$$\tilde{U} = \{u \in R^m : A^T u \leq 0, b^T u > 0\}$$

## Теорема

Для задач (1), (2) возможны только четыре ситуации:

1.  $X = \emptyset, U = \emptyset \leftrightarrow \tilde{X} \neq \emptyset, \tilde{U} \neq \emptyset \rightarrow \bar{X} = \emptyset, \bar{U} = \emptyset,$
2.  $X = \emptyset, U \neq \emptyset \leftrightarrow \tilde{X} = \emptyset, \tilde{U} \neq \emptyset \rightarrow \bar{X} = \emptyset, \bar{U} = \emptyset,$
3.  $X \neq \emptyset, U = \emptyset \leftrightarrow \tilde{X} \neq \emptyset, \tilde{U} \neq \emptyset \rightarrow \bar{X} = \emptyset, \bar{U} = \emptyset,$
4.  $X \neq \emptyset, U \neq \emptyset \leftrightarrow \tilde{X} = \emptyset, \tilde{U} = \emptyset \rightarrow \bar{X} \neq \emptyset, \bar{U} \neq \emptyset,$

$$\forall (x, u) \in \bar{X} \times \bar{U} \quad x_j g_j(u) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

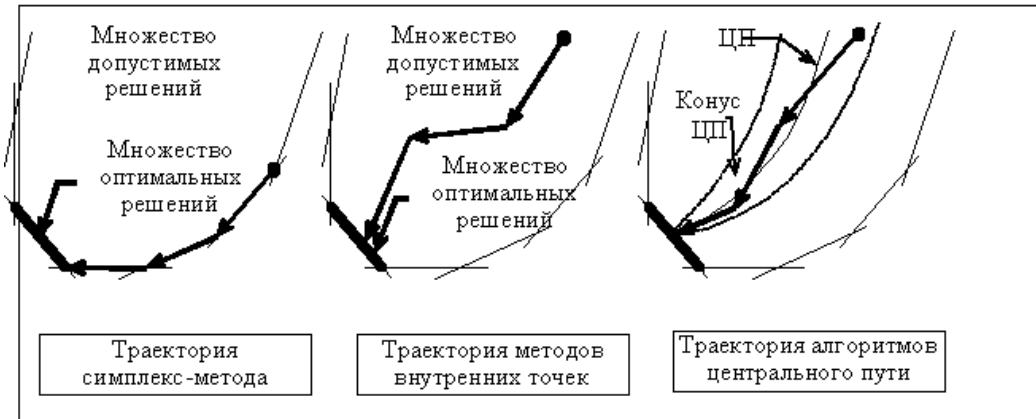
$$\exists (x, u) \in \bar{X} \times \bar{U} \quad (x_j + g_j(u)) > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

# Критерии для выявления случаев отсутствия решений у задач ЛП:

- Не пусто одно или оба множества рецессивных направлений, что проверяется на каждой итерации. Это означает, что будет пусто одно из двух или оба множества допустимых решений.
- Дело в том что альтернативны пары множеств  
 $X, \widetilde{U}; U, \widetilde{X}$ .
- Одно и только одно из множеств в этих парах пусто.

# Развитие, теоретическое обоснование, экспериментальные исследования алгоритмов внутренних точек, их приложения в моделях электроэнергетики

**Рис.** Процесс оптимизации разными алгоритмами



**Табл.** Количество итераций для решения или идентификации несовместности линейризованной задачи расчета режимов электроэнергетических систем и для поиска решения одной сложной тестовой задачи.

Алгоритмы	Совместные задачи $\approx (40 \times 80)$	Несовмест. задачи $\approx (40 \times 80)$	Тестовый пример $(201 \times 201)$
А (прямой)	9.5 (3-13)	1.6 (1-5)	19
В (двойственный.)	5.9 (3-8)	1 (все 1)	9
Центрального пути	8.0 (2-11)	1 (все 1)	11

# Методика Л.В. Канторовича, 1965 г.

Формирования цен при неоптимальном плане, исходя из минимизации отклонений в условиях дополняющей нежесткости.

Пусть  $\tilde{x} \in X$ ,  $\tilde{x} > 0$ , тогда

$$\tilde{u} = \arg \min_{u \in R^m} \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j (g_j(u))^2.$$

Естественное обобщение

$$\tilde{u} = \arg \min_{u \in R^m} \sum_{j=1}^n \sigma_j(\tilde{x}_j) (g_j(u))^2,$$

где

$\sigma_j$  – монотонно возрастающая функция,  $\sigma_j(0) = 0$ .

В частности,

$$\sigma_j(\alpha) = \alpha^2.$$

## Свойства цен:

Если  $-g_j(\tilde{u}) > 0$ , то целесообразно увеличивать  $\tilde{x}_j$ .

Если  $-g_j(\tilde{u}) < 0$ , то целесообразно уменьшать  $\tilde{x}_j$ .

# Алгоритм внутренних точек

## И.И. Дикина. 1967 г.

Пусть  $x^k \in X$ ,  $x_j^k > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Вычисляем

$$u^k = \arg \min \Phi_k(u), \text{ где } \Phi_k(u) = \sum (x_j^k)^2 (g_j(u))^2,$$

$$\lambda_k = \sqrt{\Phi_k(u^k)}, \quad s_j^k = - (x_j^k)^2 g_j(u^k), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

### Теорема Дикина

Если  $\bar{X} \neq \emptyset$ , задача (1) – невырожденная, то  $\exists \bar{x} \in ri\bar{X}$ ,  $\bar{u} \in ri\bar{U}$  такие, что при  $k \rightarrow \infty$

$$x^k \rightarrow \bar{x}, \quad u^k \rightarrow \bar{u}.$$

Скорость сходимости линейная.

$ri\bar{X}$  – множество относительно внутренних точек  $\bar{X}$ , т.е. множество оптимальных решений с максимальным набором неактивных ограничений.



# Геометрическая интерпретация метода Дикина

Получаемый в результате итеративного перехода вектор  $x^{k+1}$  можно представить как результат решения задачи минимизации линейной функции на выпуклой области:

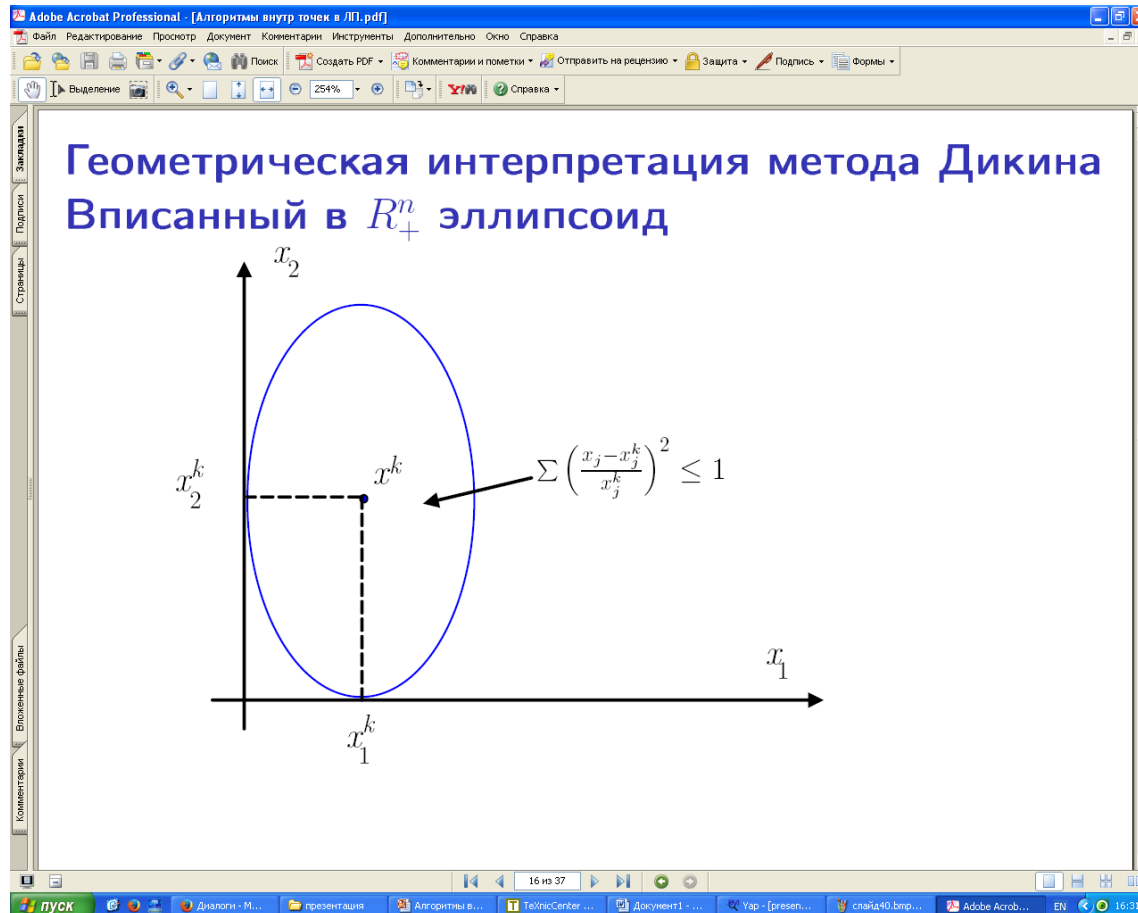
$$x^{k+1} = \operatorname{arg} \min c^T x$$

при условиях

$$\begin{aligned} A(x - x^k) &= 0, \\ \sum_{j=1}^n \left( \frac{x_j - x_j^k}{x_j^k} \right)^2 &\leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Ограничение (3) означает замену условия неотрицательности  $x \geq 0$  на условие принадлежности  $x$  эллипсоиду, вписанному в  $R_+^n$ .

# Геометрическая интерпретация метода Дикина



# К истории метода внутренних точек

1972 г. защита диссертации И.И. Дикина в Иркутском университете. Руководитель Л.В. Канторович, оппоненты В.Л.Макаров, ведущая организация институт Кибернетики, Н.З.Шор.

С 70-х годов алгоритмы внутренних точек этого типа активно развивались в России в СО АН СССР (Дикин, Анциз, Зоркальцев) и в Вычислительном центре АН СССР (Евтушенко, Жадан).

Применяются с 70-х годов в моделях:

1. Оптимизации режимов энергетических систем (ЭЭС);
2. Анализа надежности ЭЭС;
3. Расчета термодинамического равновесия и др.

***Большую популярность получил после выхода в 1984 известной статьи Н. Кармаркара, где была представлена ухудшенная модификация алгоритма И. Дикина.***

# Некоторые публикации и результаты

- 1. Дикин И.И. Итеративное решение задач линейного и квадратичного программирования// ДАН,1967, №4.
- *Сложность теоретического обоснования – нельзя использовать теорему Пифагора или неравенство треугольника. Принципиально новый факт – сходимость к относительно внутренней точке оптимальных решений!*
- 2. Публикации Дикина И.И., Евтушенко Ю.Г., Жадана В.Г. по непрерывным аналогам алгоритмов.
- **3. Дикин И.И., Зоркальцев В.И. Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внутренних точек. – Новосибирск: Наука, 1980.**
- Мои результаты - новые правила: выбора шага, задания весовых коэффициентов, ввода в область допустимых решений.

## Некоторые мои публикации по методу внутренних точек

- 4.Зоркальцев В.И. Относительно внутренняя точка оптимальных решений – Коми НЦ, 1984. *Впервые дано обоснование одного (исходного) алгоритма без условия невырожденности .*
- 5.Зоркальцев В.И. Семейство алгоритмов метода внутренних точек –Иркутск, 1985. *Двойственные алгоритмы, аксиоматический подход к представлению множества алгоритмов, их свойств.*
- 6.Зоркальцев В.И. Обоснование семейства проективных алгоритмов ч.1, ч2 – Иркутск 1995. *Обоснование без условия невырожденности для класса алгоритмов.*
- 7.Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов. – Новосибирск: Наука,1995.
- 8.Зоркальцев В.И., Киселева М,А. Системы линейных неравенства – Иркутск: ИГУ, 2007.

# Семейство алгоритмов внутренних точек

1. Стартовой точкой может служить любой вектор  $x^0 > 0$ , в т.ч. не удовлетворяющий ограничениям-равенствам  $Ax = b$ .
2. Предлагаемое правило выбора шага позволяет ускорить вычислительный процесс, достигнуть сверхлинейной скорости сходимости.
3. Аксиоматические условия на выбор весовых коэффициентов позволяют использовать широкий набор конкретных правил их задания, в т.ч. для ускорения вычислительного процесса и повышения его устойчивости. Вместо правила

$$d_j^k = \left(x_j^k\right)^2$$

вводится общее условие: существуют функции  $\underline{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}$  такие, что

$$\bar{\sigma}(\alpha) \geq \underline{\sigma}(\alpha) > 0, \quad \forall \alpha > 0,$$

при которых

$$\bar{\sigma}(x_j^k) \geq d_j^k \geq \underline{\sigma}(x_j^k), \quad j = 1, \dots, n.$$

# Система усиливающих требований к правилам выбора весовых коэффициентов

$$\exists \bar{\sigma}, \underline{\sigma} : \forall \alpha > 0 \bar{\sigma}(\alpha) \geq \underline{\sigma}(\alpha) > 0;$$

$$\bar{\sigma}(\alpha) \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0;$$

$$\bar{\sigma}(x_j^k) \geq d_j^k \geq \underline{\sigma}(x_j^k).$$

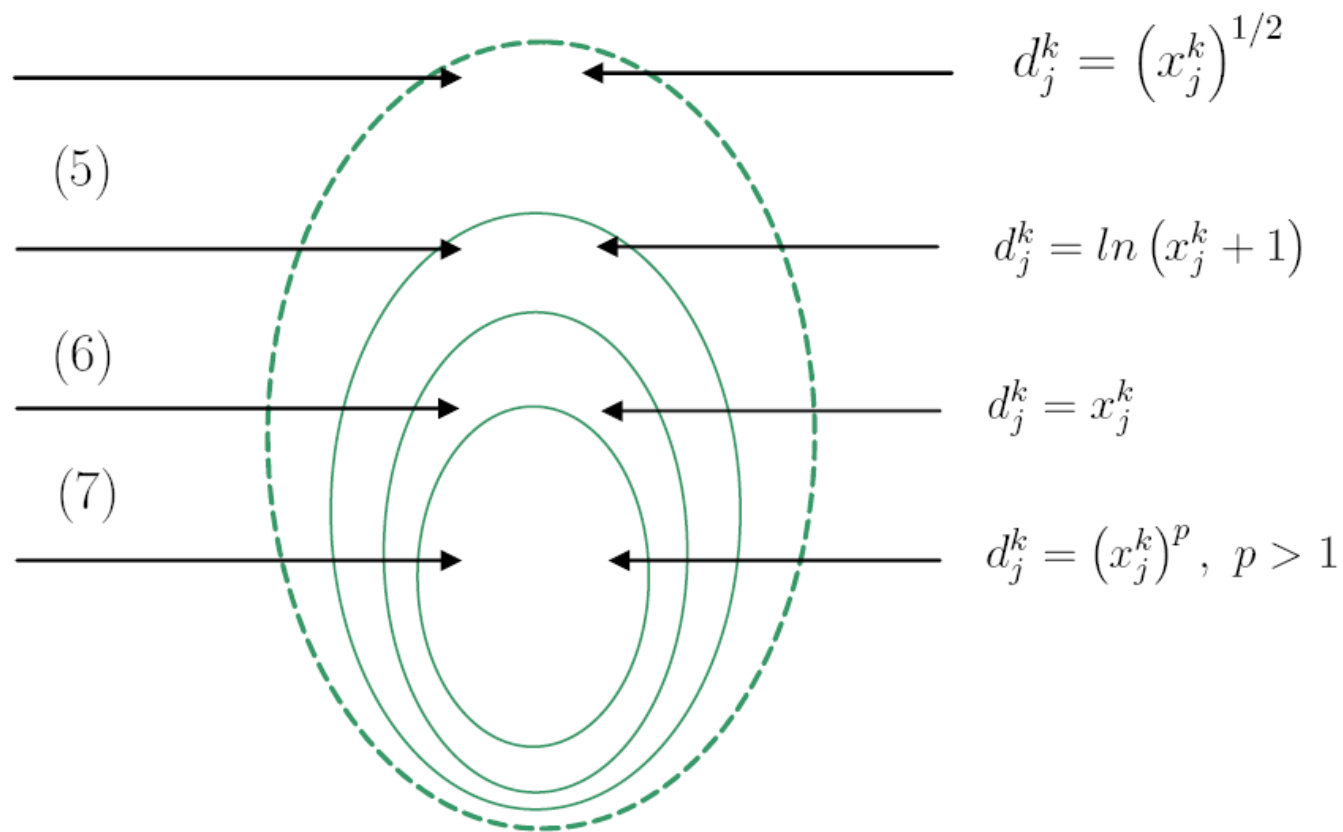
Усиливающиеся требования:

$$\bar{\sigma}(\alpha) = O(\alpha), \quad (5)$$

$$\frac{\bar{\sigma}(\alpha)}{\underline{\sigma}(\beta)} = O\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \quad (6)$$

$$\frac{\bar{\sigma}(\alpha)}{\underline{\sigma}(\beta)} = o\left(\frac{\alpha}{\beta}\right). \quad (7)$$

# Система требований к правилам выбора весовых коэффициентов, примеры правил





# Алгоритм сочетающий преимущества алгоритмов с

$$d_j^k = (x_j^k)^2 \quad \text{и} \quad d_j^k = x_j^k$$

Положим при некотором  $\epsilon > 0$

$$d_j^k = x_j^k / \max \left\{ \epsilon, \left| g_j(u^{k-1}) \right| \right\}.$$

В этом случае  $d_j^k$  не является функцией только от  $x_j^k$  (зависти и от  $u^{k-1}$ ), но существуют  $\underline{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}$ , при которых

$$\bar{\sigma} \left( x_j^k \right) \geq d_j^k \geq \underline{\sigma} \left( x_j^k \right).$$

Доказана для процесса оптимизации в допустимой области таких алгоритмов (при условии невырожденности) возможность сверхлинейной скорости сходимости при  $\gamma_k \rightarrow 1$ . При этом шаг  $\lambda_k$  будет ограниченным сверху. Эксперименты подтвердили хорошую скорость сходимости и устойчивость к погрешностям.

# Семейство комбинированных алгоритмов, ввод в область допустимых решений

Итерационный переход. Задан  $x^k \in R^n$ ,  $x^k > 0$ .

1. Вычисляем вектор невязок балансовых ограничений  $r^k = b - Ax^k$ .
2. Вспомогательная задача: вычисляем  $d^k \in R^n$ ,  $u^k \in R^n$  из условий

$$\bar{\sigma}(x_j^k) \geq d_j^k \geq \underline{\sigma}(x_j^k), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u^k = \arg \min_{u \in R^m} \Phi_k(u) - 2(r^k)^T u,$$

где

$$\Phi_k(u) = \sum d_j^k (g_j(u))^2, \quad g(u) = c - A^T u.$$

3. Находим направление улучшения

$$s_j^k = -d_j^k g_j^k, \quad j = 1, \dots, n.$$

# Семейство комбинированных алгоритмов

4. Вычисляем шаг: при  $\gamma \in (0, 1)$

$$\lambda_k = \gamma \cdot \max \left\{ \lambda : x^k + \lambda s^k \geq 0 \right\},$$

что равносильно

$$\lambda_k = \max \left\{ \lambda : x^k + \lambda s^k \geq (1 - \gamma)x^k \right\},$$

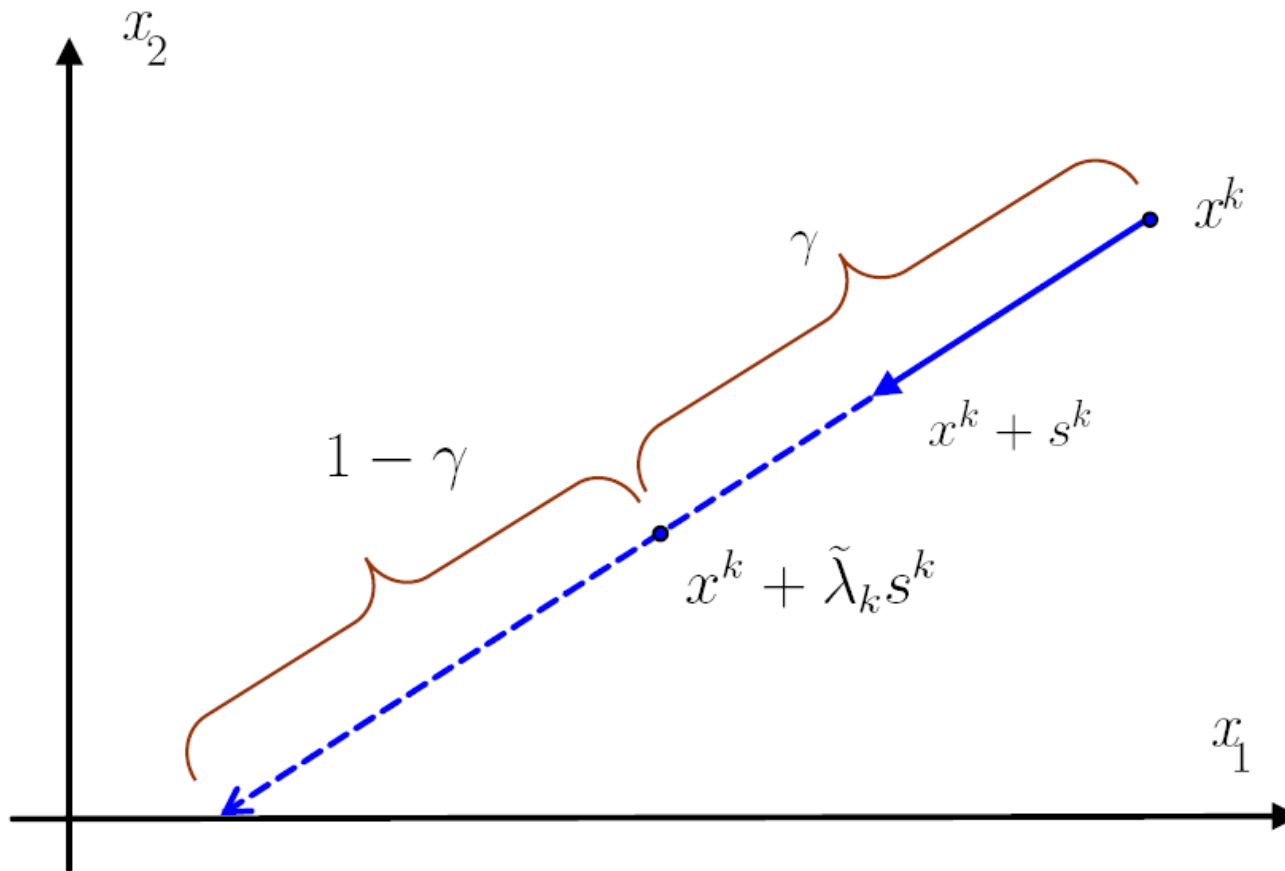
полагаем  $\lambda_k := \min \{1, \lambda_k\}$ , если  $r^k \neq 0$ .

5. Осуществляем итеративный переход

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k.$$

# Геометрическая иллюстрация алгоритма выбора шага

$$\tilde{\lambda}_k = \max \left\{ \lambda : x^k + \lambda s^k \geq (1 - \gamma)x^k \right\}$$



# О вспомогательной задаче поиска направления

При заданном векторе весовых коэффициентов  $d^k$

$$s^k = \arg \min \left\{ c^T s + \frac{1}{2} \sum (s_j)^2 / d_j^k : As = r^k \right\}.$$

Множители Лагранжа ограничений составляют вектор  $u^k$ .

Представление направления корректировки решения в виде двух составляющих:

$$s^k = \hat{s}^k + \check{s}^k,$$

где

$$\check{s}^k = \arg \min_{s \in R^n} \left\{ \frac{1}{2} \sum (s_j)^2 / d_j^k : As = r^k \right\}$$

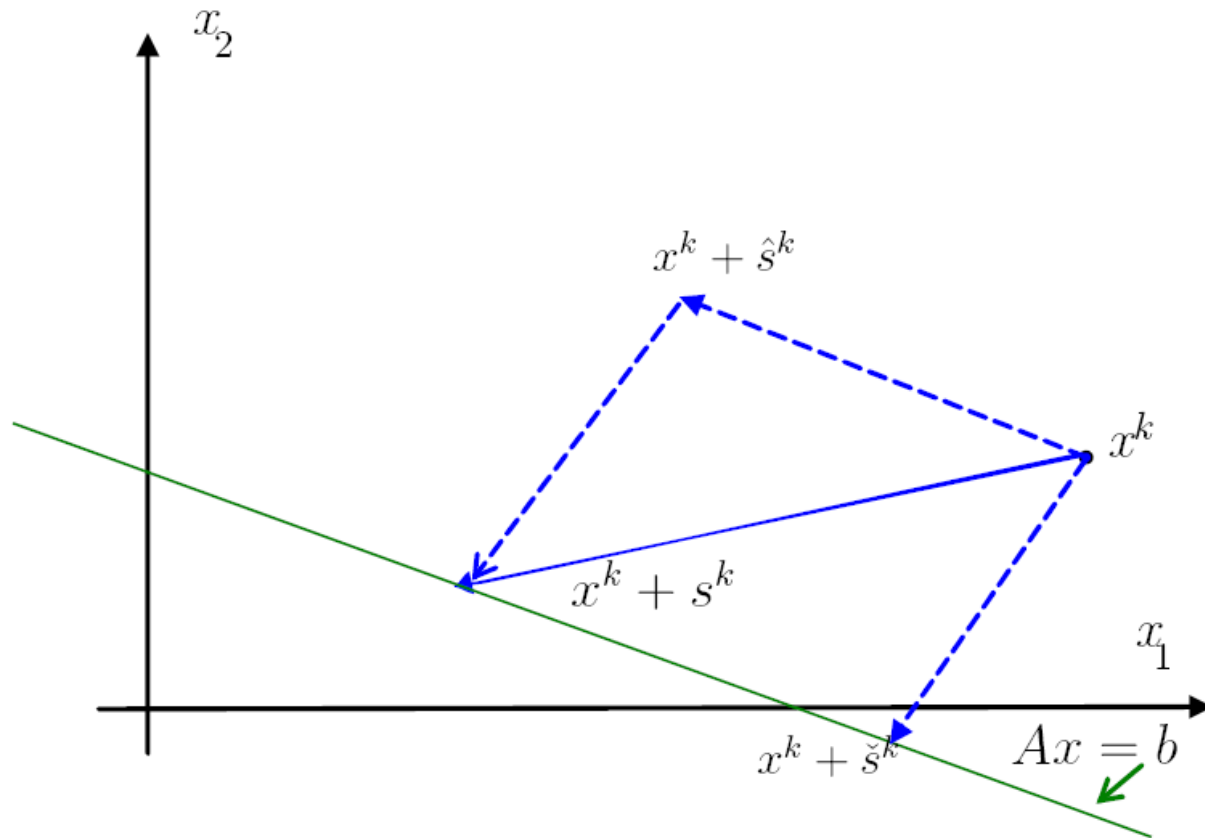
– направление ввода в область допустимых решений,

$$\hat{s}^k = \arg \min \left\{ c^T s + \frac{1}{2} \sum (s_j)^2 / d_j^k : As = 0 \right\}$$

– направление улучшения решений в области допустимых решений.

# Геометрическое представление направления корректировки

$\check{s}$  – направление ввода в область допустимых решений,  
 $\hat{s}$  – направление оптимизации.



# Изменение по итерациям невязок балансовых ограничений

Справедливо равенство

$$r^{k+1} = (1 - \lambda_k)r^k. \quad (4)$$

Действительно,

$$r^{k+1} = b - Ax^{k+1} = b - A(x^k + \lambda_k s^k) = (b - Ax^k) - \lambda_k As^k = r^k - \lambda_k r^k.$$

Равенство (4) объясняет почему  $\lambda_k \leq 1$  при  $r^k \neq 0$ . Выделяются два этапа вычислений:

1. Ввод в область допустимых решений

Если  $r^k \neq 0$ , то  $\|r^{k+1}\| < \|r^k\|$ .

2. Оптимизация

Если  $r^k = 0$ , то  $r^{k+1} = 0$ ,  $c^T x^{k+1} < c^T x^k$ .

Комбинированный алгоритм полезен также для противодействия накапливаемым погрешностям в решении вспомогательной задачи – для борьбы с „выпадением“ из области допустимых решений в процессе оптимизации в ней.

# Некоторые результаты при оптимизации в допустимой области, $\bar{X} \neq \emptyset$

**Теорема.** При условии невырожденности задачи:

1. Существуют  $\bar{x} \in \bar{X}$ ,  $\bar{u} \in ri\bar{U}$   
 $x^k \rightarrow \bar{x}$ ,  $u^k \rightarrow \bar{u}$  при  $k \rightarrow \infty$ ;
2. Если (6), то  $\bar{x} \in ri\bar{X}$ , сходимость линейная;
3. Если (7), то при  $k \rightarrow \infty$

$$\|u^{k+1} - \bar{u}\| / \|x^{k+1} - \bar{x}\| \rightarrow 0. \quad (D)$$

**Теорема.** Для  $d_j^k = (x_j^k)^p$ ,  $p \in [1, 3]$ ,  $0 < \gamma \leq 2/(1+p)$ :

1. Линейная сходимость  $x^k$  и  $u^k$  к некоторым

$$\bar{x} \in ri\bar{X}, \bar{u} \in ri\bar{U}.$$

2. При  $p > 0$  выполняется (D) и  $\|x^{k+1} - \bar{x}\| / \|x^k - \bar{x}\| \rightarrow (1-\gamma)$ .



## Перспективные направления развития алгоритмов, связанные с разработкой новых методов решения вспомогательной задачи, в т.ч. учитывающих:

- 1) возможность неточного решения на начальных итерациях;
- 2) наличие хорошего приближения на последующих;
- 3) интервальное определение коэффициентов.

К примеру, по одному из вариантов двойственных алгоритмов внутренних точек вспомогательная задача имеет вид: найти  $\vartheta \in R^n$ ,  $d \in R^n$ , удовлетворяющие условиям

$$(A^T A + D) \vartheta = f^k,$$

$$\bar{\sigma}(x^k) \geq d_j \geq \underline{\sigma}(x^k), \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$D = \text{diag}d.$$

Располагая решателем СЛАУ легко можем реализовать алгоритм внутренних точек под конкретную модель.

- *Полезно вникать в задачу. Это позволит*
- *повысить эффективность реализации.*
  
- *Преимущество обсуждаемых алгоритмов -*
- *возможность учета двух целей в*
- *едином итерационном процессе*
-

Для модели оценки дефицита мощности, используемой при анализе надежности электроэнергетических систем, дана новая постановка, позволяющая в едином итерационном процессе сочетать:

- ввод в область допустимых решений,
- минимизацию дефицита мощности,
- равномерное, пропорциональное нагрузкам распределение дефицита.

**Табл.** Число итераций метода внутренних точек для реализации двух постановок модели оценки дефицита мощности ЭЭС

	Номер схемы					
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
Число узлов	5	5	6	10	11	23
Число связей	5	4	6	9	13	39
Число итераций в исходной постановке	<b>11</b>	<b>35</b>	<b>40</b>	<b>44</b>	<b>45</b>	<b>43</b>
В том числе:						
ввод в область допустимых решений	1	2	2	1	1	2
минимизация дефицита	8	2	7	12	13	10
распределение дефицита по узлам	2	31*	31*	31*	31*	31*
Число итераций для реализуемой модели в новой постановке	<b>9</b>	<b>7</b>	<b>12</b>	<b>23</b>	<b>19</b>	<b>10</b>

\* В данных случаях окончание расчетов произошло не по критерию получения оптимального решения, а по заданному числу итераций.

# Комбинированный алгоритм оптимизации в области допустимых решений задачи ЛП

## Задача

$$f(x) \equiv (c, x) \rightarrow \min, \quad Ax = b, \quad x \geq 0.$$

## Алгоритм

$$Ax^k = b, \quad x^k > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k(\beta^k),$$

где вектор  $s^k(\beta)$  при заданном параметре  $\beta$  является решением задачи

$$(c, s) - \beta \sum \frac{s_j}{x_j^k} + \frac{1}{2} \sum \frac{(s_j)^2}{(x_j^k)^2} \rightarrow \min, \quad As = 0.$$

Отметим, что

$$s^k(\beta) = s^k(0) + \beta s^k(1).$$

# Экспериментальное исследование вариантов алгоритмов внутренних точек (А.Ю. Филатов)

**Таблица 1. Среднее значение и среднеквадратическое отклонение числа итераций, необходимое для решения задач**

Алгоритмы\ Размерность задач	$20 \times 40$	$40 \times 80$	$100 \times 200$	$200 \times 500$
Аффинно- масштабирующий	$it = 31,1$ $\sigma = 6,39$	$it = 33,0$ $\sigma = 6,42$	$it = 29,1$ $\sigma = 11,62$	$it = 28,6$ $\sigma = 2,76$
Комбинированный $\beta \in [0, 1]$	$it = 25,1$ $\sigma = 4,44$	$it = 24,1$ $\sigma = 4,97$	$it = 23,1$ $\sigma = 7,99$	$it = 22,6$ $\sigma = 0,66$
Комб. Расширенный $\beta \in [0, 2]$	$it = 23,6$ $\sigma = 5,28$	$it = 21,7$ $\sigma = 2,87$	$it = 23,6$ $\sigma = 8,49$	$it = 22,5$ $\sigma = 0,67$

# Comparison of variants of interior point methods for problems of permissible regimes of electric power systems

Algo- rithm	Number of iterations for problems				
	inconsistent		consistent		
	6*7	40*80	2*7	19*19	201*20 1
A	1	10	7	23	116
B	1	15	6	24	107
C	1	1	16	13	28
D	1	1	5	5	8
E	1	4	26	24	88

A, B – primal algorithms      E – primal-dual algorithm

C, D – dual algorithms

# Алгоритмы центрального пути

Задача минимизации логарифмической барьерной функции

$$c^T x - b^T u - \mu \sum_{j=1}^n \ln(x_j g_j(u)) \rightarrow \min_{x \in X, u \in U}$$

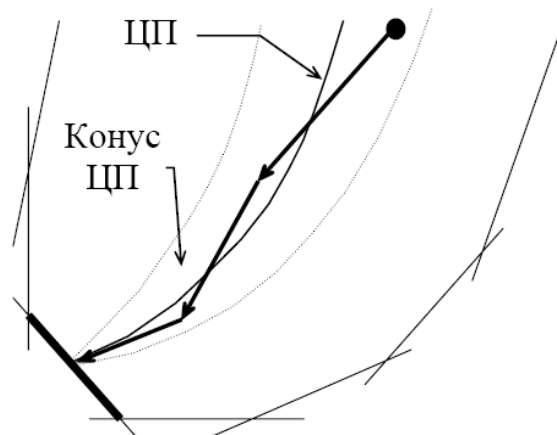
Точка центрального пути

$\forall \mu > 0$  существует и единственная пара векторов  $x(\mu), u(\mu)$ :

$$x(\mu) \in X, u(\mu) \in U, x_j(\mu) g_j(u(\mu)) = \mu, j = 1, \dots, n.$$

Конус центрального пути

$$x^k \in X, u^k \in U, \sum_{j=1}^n (\mu^k - x_j^k g_j(u^k))^2 \leq \theta (\mu^k)^2.$$



Траектория  
алгоритмов  
центрального  
пути

# Полиномиальные алгоритмы оптимизации в конусе центрального пути

Число итераций  $O(\sqrt{n}L)$

Вычислений на одной итерации

$$O(m^3), O(m^{2,5}), O(m^2 \ln m).$$

Правило пересчета

$$\mu_{k+1} = (1 - B / \sqrt{n}) \mu_k.$$

$B = 0,125$  Кожима, Мизуто, Иошис, 1989.

$B = 0,35$  Монтейро, Адлер, 1989.

$B = 0,5$  Зоркальцев 1995, причем очень! строгое неравенство

$$\mu_{k+1} < (1 - 0,5 / \sqrt{n}) \mu_k.$$



# Алгоритмы скошенного пути

## Точка скошенного пути

$\forall t > 0$  существует и единственная пара векторов  $x(t), u(t)$ :  
 $x(t) \in X, u(t) \in U, x_j(t)g_j(u(t)) = t_j, j = 1, \dots, n.$

Скошенный путь, инициируемый вектором  $t > 0$ , - множество пар векторов  $x(\mu t), u(\mu t)$  при всех  $\mu > 0$ .

## Коэффициент скошенности

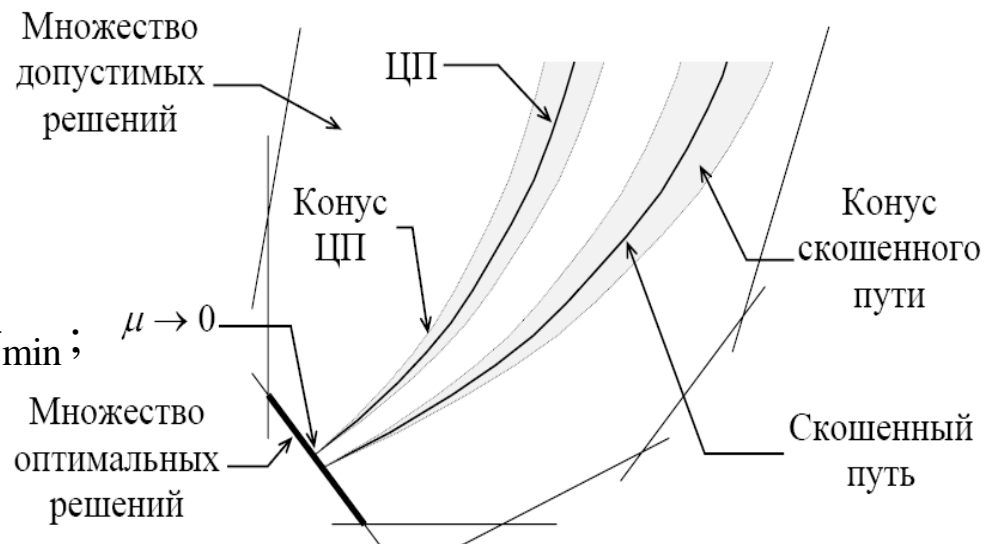
$$\gamma = \bar{t} / t_{\min}, \gamma \geq 1.$$

## Конус скошенного пути

$$\Phi_2(x, u, \mu) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu t_j} (\mu t_j - x_j g_j(u))^2;$$

$$x^k \in X, u^k \in U, \Phi_2(x^k, u^k, \mu^k) \leq \theta \mu^k t_{\min}; \quad \mu \rightarrow 0$$

$$\mu^{k+1} < \left(1 - \frac{0,5}{\sqrt{n\gamma}}\right) \mu^k.$$



# Экспериментальное исследование

( А.Ю. Филатов )

**Таблица 2.** Среднее число итераций, необходимое для решения случайно сгенерированных задач

<b>Алг./ размерности</b>	<b>20 × 40</b>	<b>50 × 100</b>	<b>100 × 200</b>	<b>300 × 1000</b>
<b>Центрального пути</b>	63.6	112.8		
<b>Скошенного пути</b>	64.6	84.0	98.8	194.0
Начальное. знач. $\mu$	688.591	4063.856	7256.781	14601.303
Знач. $\mu$ на 40-итер.	1.040	2.008	2.970	21.911

# Экспериментальное исследование

(А.Ю. Филатов)

**Таблица 3.** Среднее, минимальное и максимальное число итераций, необходимое для решения совместных и несовместных задач

<b>Алгоритмы \ задачи</b>	<b>Совмест.задачи (30×80)–(41×80)</b>	<b>Несовмест.задачи (30×80)–(41×80)</b>
<b>Аффинно-масштабир.</b>	9,5 (3–13)	1,6 (1–5)
<b>Комбинированный</b>	5,7 (1–8)	1 (все 1)

# Исследования нелинейной задачи управления режимами ЭЭС (А.Ю.Филатов).

**Таблица 4.** Число итераций, необходимое для решения исходной задачи поиска допустимых режимов ЭЭС

Алгоритмы \ схемы	Zmin	Ieee118f	Kuzbf	Zimkrasn
<b>Афф.-масштаб.</b>	11 (3глоб.)	54 (11глоб.)	39 (7глоб.)	74 (9глоб.)
<b>Комбинирован.</b>	4 (3глоб.)	50 (17глоб.)	33 (3глоб.)	55 (6глоб.)

## Сводная таблица преимуществ и недостатков различных классов алгоритмов внутренних точек

	прям. афф.- масш.	двой. афф.- масш.	цент. пути	скош. пути	комб.
Произвол. стартовая точка	+	+	-	±	+
Наличие полином. оценок	-	-	+	+	-
Наличие центрир. направл.	-	-	+	+	+
Численная устойчивость	4	5	2	1	3
Скорость сходимости	3	2	5	4	1

# Методика анализа надежности электроэнергетических систем **на основе метода Монте-Карло**

1. Вероятностный блок, в котором формируются случайным образом возможные состояния электроэнергетической системы (ЭЭС).
2. **Блок оценки дефицита мощности для сформированных случайных состояний (модель минимизации дефицита мощности ЭЭС).**
3. Блок вычисления показателей надежности ЭЭС.

# Модель оценки дефицита мощности

$$\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$x_i - y_i + \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_{ji} z_{ji}) z_{ji} - \sum_{j=1}^n z_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$0 \leq y_i \leq \bar{y}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$0 \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$$0 \leq z_{ij} \leq \bar{z}_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

# Результаты расчета тестовой схемы №2 (С.М. Пержабинский)

Метод	Число итераций		
	Минимальное	Максимальное	Среднее
Метод внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации	15	36	22,66
Метод внутренних точек, базирующийся на линеаризации	15	87	25,08
Метод внутренних точек с квадратичными аппроксимациями (балансовые ограничения в форме равенств)	10	23	14,38
Метод внутренних точек, базирующийся на линеаризации (балансовые ограничения в форме равенств)	15	55	38,40

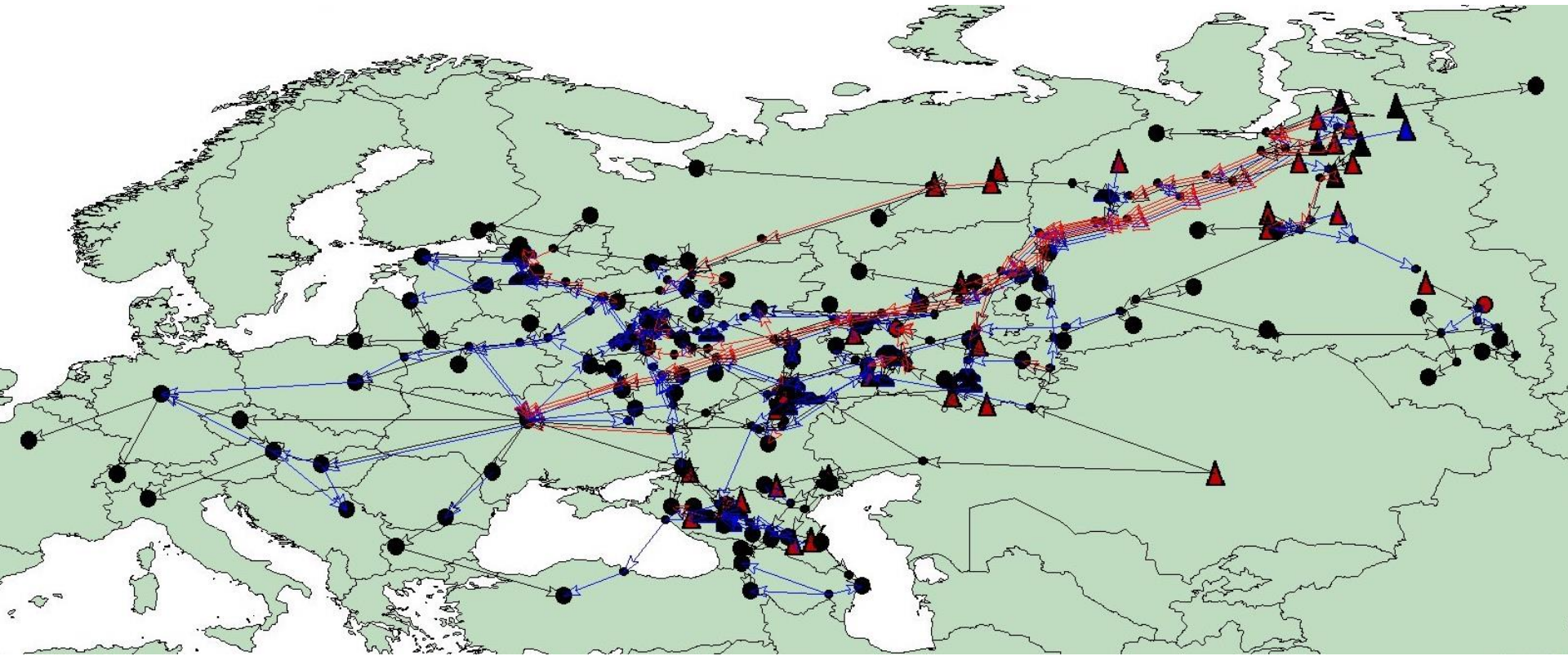
Исследования С.Л. Садова на тестовых (из Таллина) нехороших (невыпуклых, многоэкстремальных) задачах алгоритмами внутренних точек показали их высокую вычислительную эффективность за счет того, что вырабатываемые итеративно последовательности векторов «парят над локальными экстремумами».

*Зоркальцев В.И., Садов С.Л. Тестирование проективных алгоритмов//Методы оптимизации и их приложения –Иркутск: СЭИ СО АН СССР.1989.*

Была сделана попытка использования аналогов алгоритмов внутренних точек для задач оптимального управления.



# Подробная сеть для для системы доставки природного газа



Количество узлов: 337

Количество ветвей: 589

Количество итераций метода внутренних точек: 79

Время счета 15.625 сек

## Агрегированная сеть. Только нормальный режим разрешен



## Агрегированная сеть. Экстремальный режим разрешен



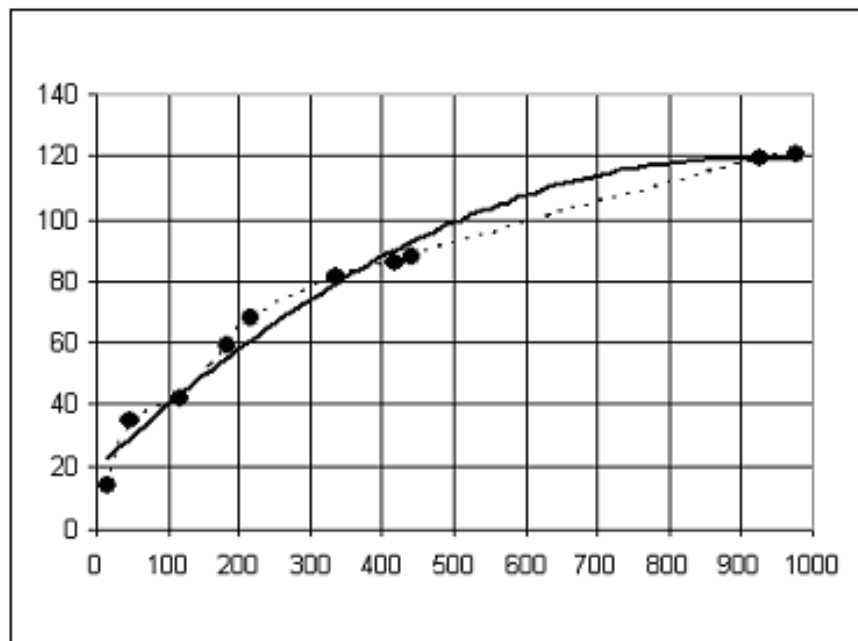
# Результаты вычислительных экспериментов (Д.С.Медвеженков)

Число узлов и число дуг в серии задач	Общее число переменных в серии задач	Число решенных задач в серии	Среднее число итераций метода внутренних точек	Среднее время, затрачиваемое на расчеты, сек
(7, 10)	17	11	14,00	0,02
(21,28)*	49	15	34,87	0,11
(50, 67)	117	17	42,00	0,44
(75, 109)	184	16	59,44	0,21
(100, 116)	216	16	67,88	0,46
(150,186)	336	16	81,44	1,71
(200, 218)	418	17	85,59	3,57
(200, 240)	440	20	87,80	3,71
(337, 589)*	926	21	119,19	21,26
(360,618)	978	23	121,00	24,73

# Диаграммы для результатов вычислений

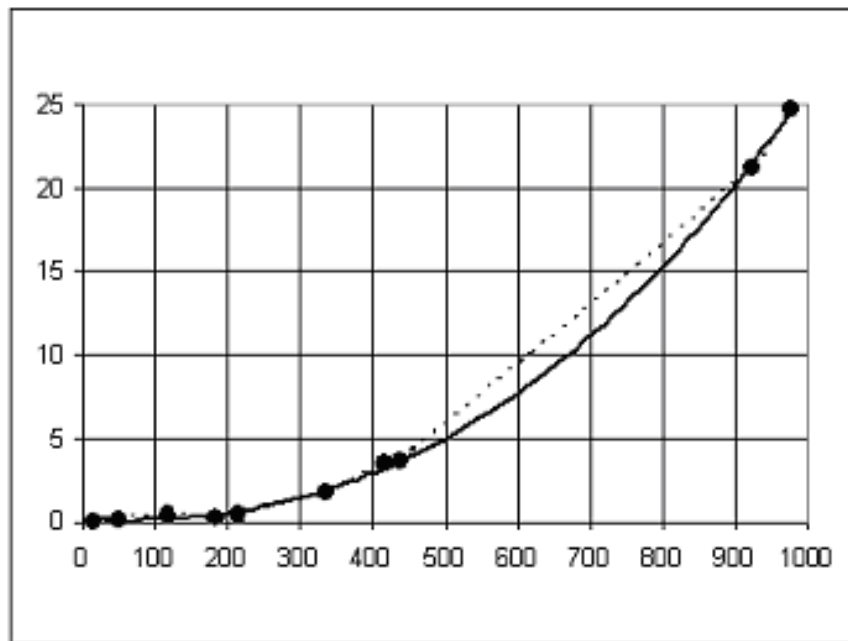
Результатов расчетов представлены на двух графиках

*Число итераций*



*Количество  
переменных*

*Время счета, сек*



*Количество  
переменных*

# Благодарю за понимание!

**Алгоритмы внутренних точек** красивые,

идейно богатые,

простые и эффективные в реализации, надеюсь будут и в алгоритмах обучения НС, ИИ.

заменяли симплекс-метод в учебных курсах.

Привели к интересным теоретическим исследованиям в т.ч. линейных неравенств, задач оптимизации, ближайших к началу координат точек линейных многообразий и полиэдров, чебышевских аппроксимаций, моделей энергетики.