

Синхронизация в сетях математических моделей нейронов Хиндмарша-Роуза

Семенов Данила Михайлович

Научный руководитель: д. т. н., профессор А. Л. Фрадков

15 февраля 2024 г.

План выступления

План выступления

- 1 Актуальность темы исследования
- 2 Математическая модель нейрона Хиндмарша-Роуза
- 3 Предельная ограниченность сети нейронов Хиндмарша-Роуза
- 4 Управляемая синхронизация двух связанных нейронов Хиндмарша-Роуза при наличии возмущений
- 5 Адаптивное управление синхронизацией сети нейронов Хиндмарша-Роуза
- 6 Синхронизация сети нейронов Хиндмарша-Роуза при помощи адаптивной настройки силы связи
- 7 Управляемая синхронизация в регулярной сети моделей Хиндмарша-Роуза с запаздывающими связями

Актуальность темы исследования

Задачи управления синхронизацией в динамических сетях, состоящих из сложных систем, возникают во многих научных областях, например в таких, как физика, инженерия, компьютерные науки, биология и медицина. Важным классом таких задач является управление синхронизацией между нейронами в мозге человека или животного. В популяциях нейронов синхронизация играет важную роль в формировании мозговых волн активности. Кроме того, было обнаружено, что некоторые заболевания нервной системы напрямую связаны с аномальной синхронизацией некоторых нейронных популяций. При этом изучение синхронизации нейронов в мозге *in vivo* является сложной проблемой, вызывающей множество технических, этических и других вопросов. Эта проблема может быть частично преодолена путем построения соответствующей математической модели популяций нейронов или всего мозга. Таким образом, мы можем использовать построенную модель для изучения того, как контролировать синхронизацию в этих популяциях.

Математическая модель нейрона Хиндмарша-Роуза

Модель Хиндмарша-Роуза¹ — модель биологического нейрона, которая описывается следующей системой ДУ:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= q(t) - ap^3(t) + bp^2(t) - n(t) + I_{ext}, \\ \dot{q}(t) &= c - dp^2(t) - q(t), \\ \dot{n}(t) &= r[s(p(t) - p_R) - n(t)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $p(t)$ — мембранный потенциал; $q(t)$ и $n(t)$ — переменные, описывающие натрий-калиевый насос; I_{ext} — внешнее воздействие. Все параметры системы, за исключением параметров I_{ext} и p_R , являются положительными (параметр p_R отрицателен, а параметр I_{ext} знаконеопределен).

¹Hindmarsh J. L., Rose R. M. (1982) *Nature*, **296**(5853): 

Модель (1) можно упростить, сократив число параметров в её записи. Для этого воспользуемся заменой $(p, q, n) \rightarrow (p, q + c, n - sp_R)$. Получим следующее:

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= q(t) - ap^3(t) + bp^2(t) - n(t) + I, \\ \dot{q}(t) &= -dp^2(t) - q(t), \\ \dot{n}(t) &= r(s(p(t) - n(t))).\end{aligned}\tag{2}$$

где $I = I_{\text{ext}} + c + sp_R$.

Предельная ограниченность сети нейронов Хиндмарша-Роуза

Рассмотрим следующую сеть нейронов Хиндмарша-Роуза

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j),$$

$$f_i(x_i) = \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $x_i = \text{col}(p_i, q_i, n_i)$; σ есть сила связи между нейронами;

$A = [\alpha_{ij}]_{N \times N}$ матрица смежности графа G ; $i, j \in \mathcal{I} := \{1, \dots, N\}$.

Предполагается, что G неориентированный граф, т. е. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $i, j \in \mathcal{I}$.

Требуется найти предельное множество Ω , которое бы содержало в себе траектории сети (3), начиная с некоторого момента времени $T > 0$.

Верна следующая теорема ²

Теорема 1

Все решения сети (3) являются глобально равномерно предельно ограниченными на множестве

$$\Omega = \left\{ |p_i| \leq \sqrt[4]{\frac{2\Delta}{\tilde{a}}}, |q_i| \leq \sqrt{\frac{\Delta}{\tilde{c}}}, |n_i| \leq \sqrt{\frac{\Delta}{\tilde{d}}}, i \in \mathcal{I} \right\}.$$

где

$$\tilde{a} = \frac{a}{4}, \quad \tilde{b} = \frac{1}{a} (b^2 + 2d^2), \quad \tilde{c} = \frac{a}{8d^2}, \quad \tilde{d} = \frac{1}{s}, \quad \Delta = \frac{a}{4d^2} l^2 + \tilde{\beta},$$

$$\tilde{\beta} = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{a}{2d^2} l^2 \geq \frac{\tilde{b}^2}{\tilde{a}}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{b}^2}{\tilde{a}} - \frac{a}{2d^2} l^2 \right), & \text{иначе.} \end{cases}$$

²Semenov D. M., Fradkov A. L. Chaos, Solitons & Fractals. – 2022. – Vol. 150. – 111170.

Управляемая синхронизация двух
связанных нейронов
Хиндмарша-Роуза при наличии
возмущений

Рассмотрим следующую сеть:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1) + \sigma \varphi(x_1, x_2) + \xi_1 + Bu, \\ \dot{x}_2 &= f(x_2) + \sigma \varphi(x_2, x_1) + \xi_2, \end{aligned} \quad (4)$$

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

где $x_i = \text{col}(p_i, q_i, n_i)$; $\xi_i = \text{col}(\xi_{pi}, \xi_{qi}, \xi_{ni})$, $B = \text{col}(1, 0, 0)$; σ есть сила связи между нейронами; u — искомое управление; $\varphi(\cdot)$ обозначает функцию связи в сети. Здесь ξ_i , $i = 1, 2$ есть вектор равномерно ограниченных возмущений, т.е.

$$|\xi_{pi}(t)| \leq \frac{\Delta_p}{2}, \quad |\xi_{qi}(t)| \leq \frac{\Delta_q}{2}, \quad |\xi_{ni}(t)| \leq \frac{\Delta_n}{2}, \quad i = 1, 2, \quad \forall t \geq 0.$$

Теперь введем некоторые обозначения, которые будут использованы далее:

$$e(t) = x_1(t) - x_2(t), \eta(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t) \\ \psi^{(1)}(t) = p_1^3(t) - p_2^3(t), \psi^{(2)}(t) = p_1^2(t) - p_2^2(t),$$

где $e(t) = \text{col}(e_p(t), e_q(t), e_n(t))$ вектор отклонений между координатами нейронов.

Последовательно вычтем второе уравнение из первого в (4) и получим

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \hat{f}(e, \psi) + 2\sigma\varphi(x_1, x_2) + \eta + Bu, \\ \hat{f}(e, \psi) &= \begin{bmatrix} e_q - a\psi^{(1)} + b\psi^{(2)} - e_n \\ -d\psi^{(2)} - e_q \\ r(se_p - e_n) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\psi = \text{col}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})$; $\eta = \text{col}(\eta_p, \eta_q, \eta_n)$ — вектор-функция возмущений, таких, что

$$|\eta_p(t)| \leq \Delta_p, \quad |\eta_q(t)| \leq \Delta_q, \quad |\eta_n(t)| \leq \Delta_n, \quad \forall t \geq 0.$$

Основываясь на приведенных выше обозначениях, сформулируем задачу управляемой координатной ε -синхронизации моделей (4) в виде следующей цели управления:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} e_p(t) \leq \varepsilon_p, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} e_q(t) \leq \varepsilon_q, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} e_n(t) \leq \varepsilon_n, \quad (6)$$

где $\varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_n$ есть уровни точности синхронизации.

Таким образом, чтобы гарантировать синхронизацию нейронов (4), необходимо обеспечить устойчивость системы (5). Этого можно достигнуть посредством управления $u(t)$, закон которого будет выведен из решения задачи.

Для введенной цели строится алгоритм управления:

$$u(t) = -(\gamma + b\psi^{(2)}) + d\psi^{(2)}e_q. \quad (7)$$

Далее делается предположение

$$\gamma + 2\sigma - 1 > 0, \quad (8)$$

из которого следует верность следующей теоремы³.

Теорема 2

Предположим, что условие (8) выполнено. Тогда закон управления $u(t)$ в форме (7) гарантирует достижение цели управления (6) $\forall x_i(0)$, $i = 1, 2$ систем (4).

Таким образом, теорема 2 является достаточным условием для достижения ε -синхронизации связанных систем (4).

³Семенов Д. М. Управление большими системами. – 2018. – № 75. – С. 30–49.

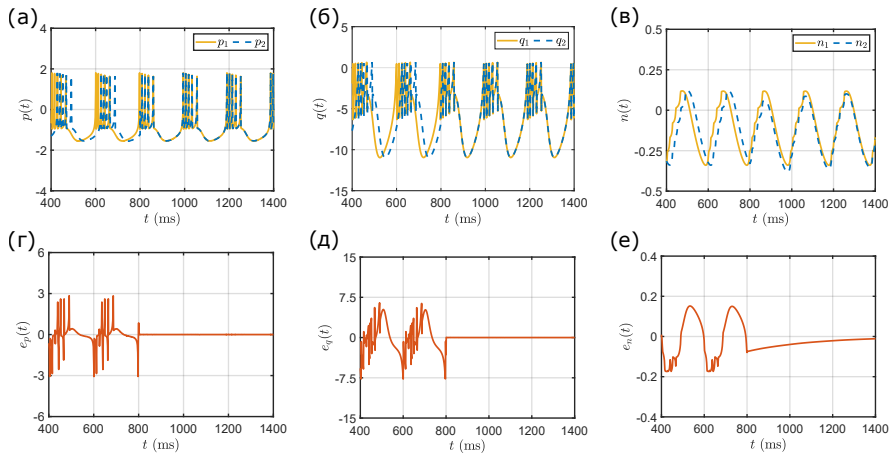


Рис. 1: Численное моделирование двух связанных нейронов Хиндмарша-Роуза. (а), (б), (в): динамика переменных p_i , q_i , n_i , $i = 1, 2$, соответственно; (г), (д), (е): ошибки синхронизации соответствующих переменных. Параметры моделей: $\gamma = 1$; $a = 1$; $b = 3$; $c = 1$; $d = 5$; $r = 0.01$; $s = 4$; $l = -2.25$; $\sigma = 0.01$. Начальные условия: $p_i(0)$, $q_i(0)$ и $n_i(0)$, $i = 1, 2$ равномерно распределены на интервалах $[-2, 2]$, $[-10, -1]$ и $[-0.25, 0.25]$, соответственно.

Адаптивное управление
синхронизацией сети нейронов
Хиндмарша-Роуза

Рассмотрим следующую сеть нейронов Хиндмарша-Роуза:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j) + Bu_i, \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\} \quad (9)$$

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $x_i = \text{col}(p_i, q_i, n_i)$; $B = \text{col}(1, 0, 0)$; $\sigma > 0$ обозначает силу связи между нейронами; α_{ij} , $\forall i, j \in \mathcal{I}$ элементы матрицы смежности $A(G)$ графа связей G ; $\varphi(\cdot)$ обозначает функцию связи в сети. Здесь и далее будем считать, что G есть связный и неориентированный граф.

Построим уравнение средней динамики для сети (9):

$$\dot{x}_s = f_s(x_s, \psi(p)), \quad f_s(x_s, \psi(p)) = \begin{bmatrix} q_s - a\psi_s^{(1)}(p) + b\psi_s^{(2)}(p) - n_s + I \\ -d\psi_s^{(2)}(p) - q_s \\ r(sp_s - n_s) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$p_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i, \quad q_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i, \quad n_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i,$$

$$\psi_s^{(1)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^3, \quad \psi_s^{(2)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^2,$$

где $x_s = \text{col}(p_s, q_s, n_s)$, $p = \text{col}(p_1, \dots, p_N)$,
 $\psi_s(p) = \text{col}(\psi_s^{(1)}(p), \psi_s^{(2)}(p))$.

Далее введем ошибки синхронизации

$$e_{pi} = p_i - p_s, \quad e_{qi} = q_i - q_s, \quad e_{ni} = n_i - n_s.$$

Последовательно вычитая уравнения средней динамики (10) из уравнений сети (9), мы получаем сеть ошибок синхронизации, которая может быть представлена следующим образом:

$$\dot{e}_i = f(e_i, \psi_i(p)) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_j) + Bu_i, \quad (11)$$

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} e_{qi} - a\psi_i^{(1)}(p) + b\psi_i^{(2)}(p) - e_{ni} \\ -d\psi_i^{(2)}(p) - e_{qi} \\ r(se_{pi} - e_{ni}) \end{bmatrix},$$

$$\psi_i^{(1)}(p) = p_i^3 - \psi_s^{(1)}(p), \quad \psi_i^{(2)}(p) = p_i^2 - \psi_s^{(2)}(p), \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

где $e_i = \text{col}(e_{pi}, e_{qi}, e_{ni})$, $\psi_i(p) = \text{col}(\psi_i^{(1)}(p), \psi_i^{(2)}(p))$.

Таким образом, задача адаптивной синхронизации для сети (9) может быть переформулирована в задачу адаптивной стабилизации сети (11) в начале координат. Для решения задачи адаптивной стабилизации зададимся следующей целью управления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{pi} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{qi} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ni} = 0, \quad i \in \mathcal{I}. \quad (12)$$

Здесь мы используем алгоритм управления, который имеет вид

$$u_i(t) = - \left[\gamma_0 + \theta_1(t) \psi_i^{(2)}(t) \right] e_{pi}(t) + \theta_2(t) \psi_i^{(2)}(t) e_{qi}(t), \quad i \in \mathcal{I}. \quad (13)$$

где γ_0 есть коэффициент усиления в законе управления $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ — настраиваемые параметры.

В качестве алгоритма настройки коэффициентов $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ будем использовать метод скоростного градиента:

$$\dot{\theta} = \gamma \begin{bmatrix} \psi_i^{(2)}(p)e_{pi} \\ -\psi_i^{(2)}(p)e_{qi} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где $\theta = \text{col}(\theta_1, \theta_2)$; $\gamma > 0$ есть коэффициент усиления алгоритма. Предполагая выполнимость условий сходимости скоростного градиента⁴, сформулируем следующую теорему⁵.

Теорема 3

Пусть граф связей G является неориентированным. Тогда сеть (11) стабилизируема в начале координат с помощью алгоритма (13), (14), т.е. полученный алгоритм обеспечивает достижение цели управления (12) для любых $e_1(0), \dots, e_N(0)$ и $\theta(0)$.

⁴Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000. 549 с.

⁵Semenov D. M., Fradkov A. L. IFAC-PapersOnLine. – 2020. – Vol. 51, Issue 5. – P. 146–151.

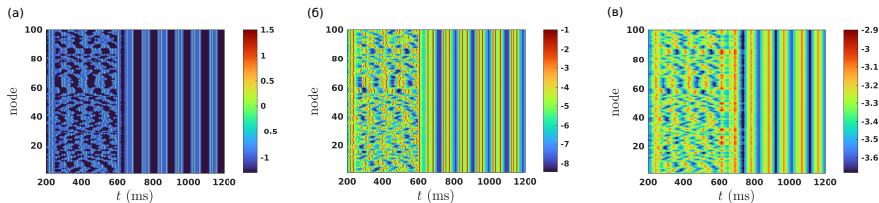


Рис. 2: Компьютерное моделирование сети Хиндмарша-Роуза (100 узлов). (а), (б), (в): динамика переменных p_i , q_i и n_i , $i \in \mathcal{I}$, соответственно. Параметры сети: $N = 100$; $\gamma_0 = 1$; $\gamma = 0.01$; $a = 1$; $b = 3$; $c = 1$; $d = 5$; $r = 0.01$; $s = 4$; $l = -2.25$. Начальные условия: $\sigma = 0.001$; $p_i(0)$, $q_i(0)$ и $n_i(0)$, $i \in \mathcal{I}$ равномерно распределены на интервалах $[-2, 2]$, $[-10, -1]$ и $[-0.25, 0.25]$, соответственно.

Синхронизация сети нейронов Хиндмарша-Роуза при помощи адаптивной настройки силы связи

Рассмотрим следующую сеть нейронов Хиндмарша-Роуза:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j), \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\} \quad (15)$$

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $x_i = \text{col}(p_i, q_i, n_i)$; $\sigma > 0$ обозначает силу связи между нейронами; $\alpha_{i,j}$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$ элементы матрицы смежности $A(G)$ граф связей G ; $\varphi(\cdot)$ обозначает функцию связи в сети. Здесь и далее будем предполагать, что G есть связный и неориентированный граф.

Построим уравнение средней динамики для сети (15):

$$\dot{x}_s = f_s(x_s, \psi(p)), \quad f_s(x_s, \psi(p)) = \begin{bmatrix} q_s - a\psi_s^{(1)}(p) + b\psi_s^{(2)}(p) - n_s + I \\ -d\psi_s^{(2)}(p) - q_s \\ r(sp_s - n_s) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$p_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i, \quad q_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i, \quad n_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i,$$

$$\psi_s^{(1)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^3, \quad \psi_s^{(2)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^2,$$

где $x_s = \text{col}(p_s, q_s, n_s)$, $p = \text{col}(p_1, \dots, p_N)$,
 $\psi_s(p) = \text{col}(\psi_s^{(1)}(p), \psi_s^{(2)}(p))$.

Далее введем ошибки синхронизации

$$e_{pi} = p_i - p_s, \quad e_{qi} = q_i - q_s, \quad e_{ni} = n_i - n_s.$$

Последовательно вычитая уравнения средней динамики (16) из уравнений сети (15), мы получаем сеть ошибок синхронизации, которая может быть представлена следующим образом:

$$\dot{e}_i = f(e_i, \psi_i(p)) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_j), \quad (17)$$

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} e_{qi} - a\psi_i^{(1)}(p) + b\psi_i^{(2)}(p) - e_{ni} \\ -d\psi_i^{(2)}(p) - e_{qi} \\ r(se_{pi} - e_{ni}) \end{bmatrix},$$

$$\psi_i^{(1)}(p) = p_i^3 - \psi_s^{(1)}(p), \quad \psi_i^{(2)}(p) = p_i^2 - \psi_s^{(2)}(p), \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

где $e_i = \text{col}(e_{pi}, e_{qi}, e_{ni})$, $\psi_i(p) = \text{col}(\psi_i^{(1)}(p), \psi_i^{(2)}(p))$.

Таким образом, задача адаптивной синхронизации для сети (15) может быть переформулирована в задачу адаптивной стабилизации сети (17) в начале координат. Для решения задачи адаптивной стабилизации зададимся следующей целью управления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{pi} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{qi} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ni} = 0, \quad i \in \mathcal{I}. \quad (18)$$

Очевидно, что определенная цель управления соответствует как адаптивной синхронизации сети (15), так адаптивной стабилизации сети (17). Таким образом, нам необходимо найти такой адаптивный закон управления, который бы обеспечивал достижение цели (18). В данной работе мы используем алгоритм скоростного градиента для поиска такого управления, а в качестве настраиваемого параметра рассматривается параметр σ – сила связи в сети.

Согласно алгоритму скоростного градиента, получим адаптивный алгоритм настройки силы связи:

$$\dot{\sigma} = \gamma p^T L(G) p, \quad (19)$$

где $\gamma > 0$ есть коэффициент усиления алгоритма. Верна следующая теорема ⁶.

Теорема 4

Пусть граф связей G является неориентированным и связным. Тогда сеть (17) стабилизируема в начале координат с помощью алгоритма (19), т.е. полученный алгоритм (19) обеспечивает достижение цели управления (18) для любых $e_1(0), \dots, e_N(0)$ и $\sigma(0)$.

Учитывая предельную ограниченность сети (15), получаем, что при выполнении теоремы 4 мы обеспечили синхронизацию между нейронами в сети (15).

⁶Semenov D. M., Fradkov A. L. Chaos, Solitons & Fractals. – 2022. – Vol. 150. – 111170.

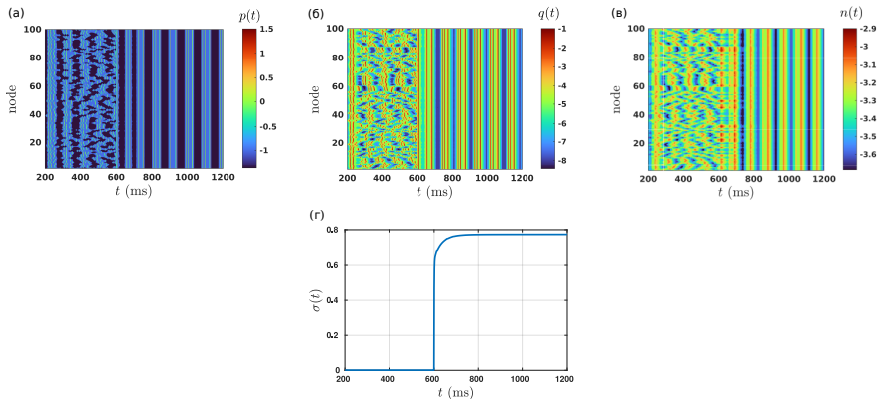


Рис. 3: Компьютерное моделирование сети Хиндмарша-Роуза (100 узлов). (а), (б), (в): динамика переменных p_i , q_i и n_i , $i \in \mathcal{I}$, соответственно; (г) динамика силы связи σ . Параметры сети: $N = 100$; $\gamma = 0.01$; $a = 1$; $b = 3$; $c = 1$; $d = 5$; $r = 0.01$; $s = 4$; $l = -2.25$. Начальные условия: $\sigma(0) = 0.001$; $p_i(0)$, $q_i(0)$ и $n_i(0)$, $i \in \mathcal{I}$ равномерно распределены на интервалах $[-2, 2]$, $[-10, -1]$ и $[-0.25, 0.25]$, соответственно.

Управляемая синхронизация в
регулярной сети моделей
Хиндмарша-Роуза с
запаздывающими связями

Рассмотрим следующую сеть:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j(t-h)) + Bu_i, \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\} \quad (20)$$

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $x_i = \text{col}(p_i, q_i, n_i)$; $B = \text{col}(1, 0, 0)$; $h > 0$ обозначает постоянную задержку в связях; u_i есть искомое управление i -го нейрона; α_{ij} , $\forall i, j \in \mathcal{I}$ элементы матрицы смежности $A(G)$ графа связей G ; $\varphi(\cdot)$ обозначает функцию связи в сети.

Далее будем считать, что выполнены следующие предположения относительно рассматриваемой сети:

- G есть связный и неориентированный граф;
- G является регулярным графом, т.е. $d_i(G) = d_j(G)$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$;
- решения (20) являются предельно ограниченными.

Построим уравнение средней динамики для сети (20):

$$\dot{x}_s = f_s(x_s, \psi(p)) + d(G)\varphi(x_s, x_s(t-h)), \quad (21)$$

$$f_s(x_s, \psi(p)) = \begin{bmatrix} q_s - a\psi_s^{(1)}(p) + b\psi_s^{(2)}(p) - n_s + I \\ -d\psi_s^{(2)}(p) - q_s \\ r(sp_s - n_s) \end{bmatrix},$$

$$p_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i, \quad q_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i, \quad n_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i,$$

$$\psi_s^{(1)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^3, \quad \psi_s^{(2)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^2,$$

где $x_s = \text{col}(p_s, q_s, n_s)$, $p = \text{col}(p_1, \dots, p_N)$,

$\psi_s(p) = \text{col}(\psi_s^{(1)}(p), \psi_s^{(2)}(p))$; $d(G)$ есть степень вершин G .

Далее введем ошибки синхронизации

$$e_{pi} = p_i - p_s, \quad e_{qi} = q_i - q_s, \quad e_{ni} = n_i - n_s.$$

Тогда сеть ошибок синхронизации может быть представлена следующим образом:

$$\dot{e}_i = f(e_i, \psi_i(p)) + \sum_{i=1}^N \alpha_{ij} \varphi(e_i, e_j(t-h)) + Bu_i, \quad (22)$$

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} e_{qi} - a\psi_i^{(1)}(p) + b\psi_i^{(2)}(p) - e_{ni} \\ -d\psi_i^{(2)}(p) - e_{qi} \\ r(se_{pi} - e_{ni}) \end{bmatrix},$$

$$\psi_i^{(1)}(p) = p_i^3 - \psi_s^{(1)}(p), \quad \psi_i^{(2)}(p) = p_i^2 - \psi_s^{(2)}(p), \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

где $e_i = \text{col}(e_{pi}, e_{qi}, e_{ni})$, $\psi_i(p) = \text{col}(\psi_i^{(1)}(p), \psi_i^{(2)}(p))$.

Таким образом, задача синхронизации для сети (20) может быть переформулирована в задачу стабилизации сети (22) в начале координат.

Вводится управление вида

$$u_i = -\frac{2\gamma^4(b^2 + d^2)}{a}e_{pi}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (23)$$

для которого формулируется следующая теорема⁷

Теорема 5

Пусть регулярный граф G ориентированный и связный, тогда управление (23) обеспечивает асимптотическую устойчивость (22) в начале координат.

⁷Semenov D. M., Plotnikov S. A., Fradkov A. L. 2022 6th Scientific School Dynamics of Complex Networks and their Applications (DCNA). IEEE, 2022. P. 236–239.

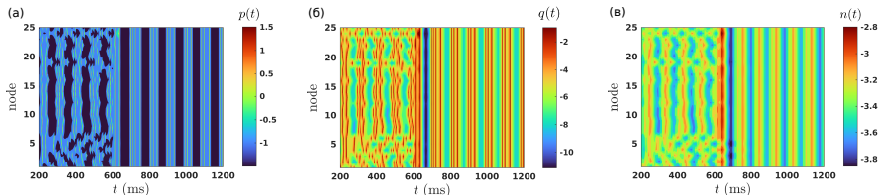


Рис. 4: Компьютерное моделирование сети Хиндмарша-Роуза с запаздывающими связями (25 узлов). (а), (б), (в): динамика переменных p_i , q_i и n_i , $i \in \mathcal{I}$, соответственно. Параметры сети: $N = 25$; $\gamma = 1.01$; $a = 1$; $b = 3$; $c = 1$; $d = 5$; $r = 0.01$; $s = 4$; $l = -2.25$; $h = 10$. Начальные условия: $p_i(0)$, $q_i(0)$ и $n_i(0)$, $i \in \mathcal{I}$ равномерно распределены на интервалах $[-2, 2]$, $[-10, -1]$ и $[-0.25, 0.25]$, соответственно.

Заключение

В заключении перечислим основные результаты работы.

- 1 Доказана предельная ограниченность траекторий сети нейронов Хиндмарша-Роуза и получена оценка предельного множества (Теорема 1).
- 2 Синтезирован алгоритм управления и установлено условие синхронизации двух связанных нейронов Хиндмарша-Роуза при наличии возмущений, входящих в правые части уравнений (Теорема 2).
- 3 Синтезирован адаптивный алгоритм управления на основе метода скоростного градиента, обеспечивающий синхронизацию в сети между нейронами Хиндмарша-Роуза без предварительной информации о параметрах модели (Теорема 3).
- 4 На основе метода скоростного градиента получен адаптивный алгоритм настройки силы связи, позволяющий перевести сеть в синхронный режим функционирования (Теорема 4).
- 5 Синтезирован алгоритм управления, позволяющий синхронизировать нейроны в сети даже при наличии запаздывающих связей, т.е. связей, в которых присутствуют временные задержки (Теорема 5).

Публикации

Основные публикации по теме исследования:

- 1 Семенов Д. М. Управление синхронизацией двух связанных неидентичных систем Хиндмарш-Роуз // Управление большими системами. – 2018. – № 75. – С. 30–49.
- 2 Semenov D. M., Fradkov A. L. Adaptive synchronization of two coupled non-identical Hindmarsh-Rose systems by the Speed Gradient method // IFAC PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, Issue 33. – P. 12–14.
- 3 Semenov D. M., Fradkov A. L. Adaptive control of synchronization for the heterogeneous Hindmarsh-Rose network // IFAC-PapersOnLine. – 2020. – Vol. 51, Issue 5. – P. 146–151.
- 4 Semenov D. M., Fradkov A. L. Adaptive synchronization in the complex heterogeneous networks of Hindmarsh–Rose neurons // Chaos, Solitons & Fractals. – 2022. – Vol. 150. – 111170.

Конференции

Результаты были представлены на следующих конференциях:

- 1 19th Conference of Young Scientists «Navigation and Motion Control», Saint Petersburg, Russia, 2017
- 2 the 18th Scientific School «Nonlinear Waves–2018», Nizhny Novgorod, Russia, 2018
- 3 5th IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems, Eindhoven, The Netherlands, 2018
- 4 21st Conference of Young Scientists «Navigation and Motion Control», Saint Petersburg, Russia, 2019
- 5 European Control Conference (ECC'20), Saint Petersburg, Russia, 2020
- 6 the 19th Scientific School «Nonlinear Waves–2020», Nizhny Novgorod, Russia

Спасибо за внимание!