Синхронизация и десинхронизация в нелинейных динамических сетях

Плотников Сергей Александрович

Институт проблем машиноведения РАН

Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту
22 февраля 2024 г.

План доклада

1. Синхронизация в динамических сетях
   - Определение синхронизации
   - Важные результаты по синхронизации сетей с диффузионными связями
   - Синхронизация в однородной сети из систем Хиндмарш-Роуз
   - Синхронизация в неоднородной сети из систем ФитцХью-Нагумо
2. Десинхронизация в динамических сетях
   - Колебательность по Якубовичу
   - Определение десинхронизации
   - Десинхронизация в нелинейных сетях с диффузионными связями
   - Десинхронизация в однородных сетях ФитцХью-Нагумо

Определение

Синхронизация – это согласованное во времени функционирование двух или нескольких процессов или объектов. В частности, это может быть совпадение или сближение переменных состояния двух или нескольких систем, или согласованное изменение некоторых количественных характеристик систем[1].

[1] Фрадков А.Л. *Кибернетическая физика: принципы и примеры.* – 2003.

Пусть имеется некоторое число N объектов (процессов), состояние каждого из которых в момент времени t характеризуется некоторым вектором $\mathbf{x}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, где t изменяется на промежутке $0 \le t < \infty$. Предположим, что все вектор-функции $\mathbf{x}_i$ принадлежат одному и тому же функциональному пространству $\mathcal{X}$, а их значения $\mathbf{x}_i(t)$ принадлежат $\mathbb{R}^n$.

Определение (Асимптотическая синхронизация)

N *объектов (процессов) асимптотически синхронизированы, если*

$$\lim_{t\to\infty} |x_{ik}(t) - x_{jk}(t)| = 0, \quad \forall k = 1, \ldots, n, \quad \forall i, j = 1, \ldots, N.$$

Определение (ε-синхронизация)

N *объектов (процессов) приближенно синхронизированы, если*

$$|x_{ik}(t) - x_{jk}(t)| \le \varepsilon, \quad \forall k = 1, \ldots, n, \quad \forall i, j = 1, \ldots, N, \quad t \ge 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Таким образом, при синхронизации объекты (процессы) достигают некоторого среднего состояния $\bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$, которое определяет динамику сети из рассматриваемых объектов.
Если граф рассматриваемой сети является неориентированным или сбалансированным, то $\bar{\mathbf{x}}$ соответствует среднему состоянию всех объектов, т.е.

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i.$$

В противном случае $\bar{\mathbf{x}}$ соответствует взвешенному среднему, т.е. линейной комбинации состояний $\mathbf{x}_i$:

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \mathbf{x}_i, \quad \sum_{i=1}^{N} \nu_i = 1.$$

Определим векторы из ошибок синхронизации $\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}$, $i = 1, \ldots, N$. Тогда задачу исследования синхронизации можно свести к задаче исследования устойчивости системы из ошибок синхронизации:

- N объектов (процессов) асимптотически синхронизированы тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}_i(t) = 0$, $\forall\ i = 1, \ldots, N$.
- N объектов (процессов) приближенно синхронизированы тогда и только тогда, когда $\exists\ \varepsilon > 0 : |e_{ik}(t)| \leq \varepsilon$, $\forall k = 1, \ldots, n$, $\forall\ i = 1, \ldots, N$, $t \geq 0$.

Нелинейная сеть с диффузионными связями

Рассмотрим неоднородную сеть из N нелинейных систем в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_i(t) &= \mathbf{f}_i^y(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{z}_i(t)) + \mathbf{u}_i(t), \\ \dot{\mathbf{z}}_i(t) &= \mathbf{f}_i^z(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{z}_i(t)), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{y}_i$, $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$ – выход и вход i-й системы,соответственно, а $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^{n-m}$ – ее ноль-динамика. Вектор-функции $\mathbf{f}_i^y : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f}_i^z : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ являются локально липшицевыми.

Пусть связи между системами будут линейными диффузионными:

$$\mathbf{u}_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}[\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_i(t)], \tag{2}$$

Диффузионные связи задаются при помощи матрицы Лапласа:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sum_{j=2}^{N} a_{1j} & -a_{12} & \cdots & -a_{1N} \\ -a_{21} & \sum_{j=1, j\neq 2}^{N} a_{2j} & \cdots & -a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N1} & -a_{N2} & \cdots & \sum_{j=1}^{N-1} a_{Nj} \end{bmatrix}.$$

От спектра матрицы Лапласа $0 \leq \operatorname{Re} \lambda_2 \leq \operatorname{Re} \lambda_3 \leq \cdots \leq \operatorname{Re} \lambda_N$ зависит состояние сети, в частности, для синхронизации важным параметром является алгебраическая связность графа λ_2.

- Джунусов И.А., Фрадков А.Л. Синхронизация в сетях линейных агентов с обратными связями по выходам // *Автомат. и телемех.*, 2011, № 8, С. 41-42.
- Pogromsky A., Nijmeijer H. Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems // *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2001, Vol. 48, No. 2, P. 152–162.
- Panteley E., Loría A. Synchronization and dynamic consensus of heterogeneous networked systems // *IEEE Trans. Automat. Control*, 2017, Vol. 62, No. 8. P. 3758–3773.

Определение (Строго полупассивная система)

Система (1) называется строго полупассивной, если существует неотрицательная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *такая, что* $V(0) = 0$ *и выполнено неравенство*

$$\dot{V}(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) = \frac{\partial V(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{y}_i}(\mathbf{f}_i^y(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) + \mathbf{u}_i) + \frac{\partial V(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{z}_i}\mathbf{f}_i^z(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) \le \mathbf{y}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_i - H(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i),$$

где функция $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *положительна снаружи шара* $\mathcal{B}$ *радиуса* ρ*:*

$$\exists \rho > 0, \quad \|(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)\| \ge \rho \Rightarrow H(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) > 0.$$

Здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Пусть сеть (1) является однородной, т.е. $\mathbf{f}_i^y = \mathbf{f}^y$, $\mathbf{f}_i^z = \mathbf{f}^z$, $i = 1, \ldots, N$; $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}$; а граф рассматриваемой сети – неориентированным.

Теорема

- *Пусть каждая система в сети (1) является строго полу-пассивной.*
- *Пусть существует гладкая положительно определенная функция $V_0 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ и положительная константа α такие, что выполнено неравенство*

$$(\nabla V_0(\mathbf{z}' - \mathbf{z}''))^{\mathrm{T}} (\mathbf{f}^z(\mathbf{z}', \mathbf{y}') - \mathbf{f}^z(\mathbf{z}'', \mathbf{y}')) \leq -\alpha \|\mathbf{z}' - \mathbf{z}''\|^2,$$

$\forall\ \mathbf{z}',\ \mathbf{z}'' \in \mathbb{R}^{n-1}$ *и* $\mathbf{y}' \in \mathbb{R}$.

Тогда существует положительное число λ^* такое, что при $\lambda_2 \geq \lambda^*$ сеть из систем (1), (2) будет асимптотически синхронизированной. Здесь λ_2 – алгебраическая связность графа.

Если рассматриваемая сеть является неоднородной, то важным понятием становится возникающая динамика:

$$\dot{\mathbf{y}}_e(t) = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \mathbf{f}_i^y(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{z}_i(t)),$$
$$\dot{\mathbf{z}}_e(t) = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \mathbf{f}_i^z(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{z}_i(t)).$$

Система Хиндмарш-Роуз[2]

Рассмотрим модель нейрона Хиндмарш-Роуз, которая представлена нелинейной системой третьего порядка:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -ax^3 + bx^2 + y - z + I, \\
\dot{y} &= c - dx^2 - y, \\
\dot{z} &= r(s(x + w) - z),
\end{aligned}
$$

где x описывает динамику мембранного потенциала, а y и z описывают динамику ионных токов. Малый параметр $0 < r \ll 1$ используется для разделения динамики на медленную и быструю, где z описывает динамику медленного калиевого тока, а y описывает динамику быстрого натриевого тока. I – внешний стимул, а a, b, c, d, s, w – некоторые положительные константы.

[2] Hindmarsh J.L., Rose R.M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // *Proc. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.*, 1984, Vol. 221, No. 1222, P. 87–102.

Рассмотрим однородную сеть из N диффузионно-связанных систем Хиндмарш-Роуз:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -ax_i^3 + bx_i^2 + y_i - z_i + I + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x_j - x_i), \\ \dot{y}_i &= c - dx_i^2 - y_i, \\ \dot{z}_i &= r(s(x_i + w) - z_i), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, N$ – матрица смежности графа, описывающего топологию рассматриваемой сети. Предположим, что граф является неориентированным.

Теорема

Пусть граф связей сети из систем Хиндмарш-Роуз (3) *является неориентированным. Если выполнено следующее неравенство*

$$\lambda_2 > \lambda^* = \frac{2(b^2 + d^2)}{a},$$

где λ_2 *– это алгебраическая связность графа, то сеть из систем Хиндмарш-Роуз асимптотически синхронизируется.*

[3] Plotnikov S.A. Synchronization conditions in networks of Hindmarsh-Rose systems // *Cybernetics and Physics*, 2021, Vol. 10, No. 4, P. 254–259.

Вычислим среднюю динамику сети из систем Хиндмарш-Роуз:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= -a\psi + b\varphi + \bar{y} - \bar{z} + I,\\ \dot{\bar{y}} &= c - d\varphi - \bar{y},\\ \dot{\bar{z}} &= r(s(\bar{x} + w) - z),\end{aligned}$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i, \quad \bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i,$$

$$\psi = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^3, \quad \varphi = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2.$$

Интересные моменты доказательства теоремы

Вводятся ошибки синхронизации

$$e_{1i} = x_i - \bar{x}, \quad e_{2i} = y_i - \bar{y}, \quad e_{3i} = z_i - \bar{z},$$

и функция Ляпунова

$$V(e_{1i}, e_{2i}, e_{3i}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \left(e_{1i}^2 + \mu e_{2i}^2 + \frac{1}{rs} e_{3i}^2 \right).$$

Что делать с нелинейностями? В производной функции Ляпунова имеются следующие слагаемые:

$$-\sum_{i=1}^{N} a e_{1i}(x_i^3 - \psi) = -\sum_{i=1}^{N} a e_{1i} x_i^3 + a\psi \sum_{i=1}^{N} e_{1i} = -\sum_{i=1}^{N} a e_{1i}(x_i^3 - \bar{x}^3).$$

Интересные моменты доказательства теоремы (прод.)

Можно использовать формулу разности кубов:

$$x_i^3 - \bar{x}^3 = (x_i - \bar{x})(x_i^2 + x_i\bar{x} + \bar{x}^2)/$$

Хотим получить следующую оценку:

$$x_i^2 + x_i\bar{x} + \bar{x}^2 \geq \alpha(x_i - \bar{x})^2. \tag{4}$$

Неравенство (4) можно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_i & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0.5+\alpha \\ 0.5+\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ \bar{x} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Используя критерий Сильвестра, получим, что α должен лежать в промежутке $[0; 0.25]$ для того, чтобы неравенство (4) было выполнено.

Моделирование

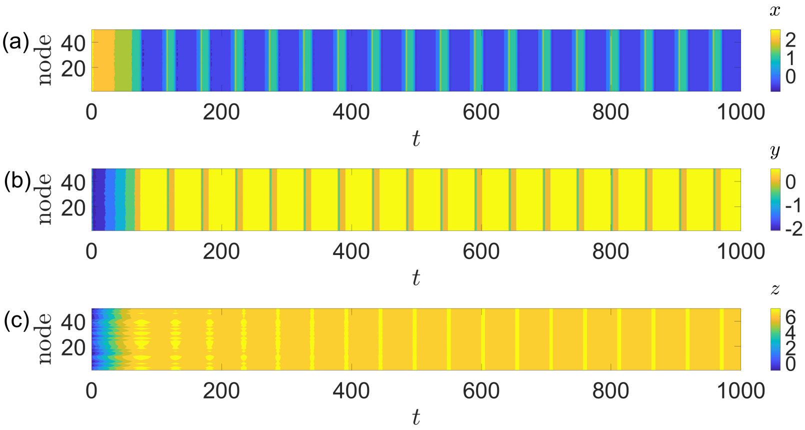


Рис. 1: Синхронизация в однородной сети из 50 систем Хиндмарш-Роуз (3). (a), (b), (c): динамика переменных состояния. Значения параметров: $N = 50$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 0.5$, $r = 0.01$, $s = 4$, $w = 1.5$, $I = 5$, $\lambda_2 = 15.4172$. Начальные условия $x_i(0)$, $y_i(0)$, $z_i(0)$, $i = 1, \ldots, N$ равномерно распределены на промежутке $[-1; 1]$.

Рассмотрим систему ФитцХью-Нагумо

$$\varepsilon\dot{u} = u - \frac{u^3}{3} - v,$$
$$\dot{v} = u + c - bv,$$

где u и v – трансмембранное напряжение (активатор) и переменная активации ионного тока (ингибитор), соответственно, ε – параметр соотношения временных масштабов, b, c — постоянные параметры.

[4] FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophys. J.*, 1961, Vol. 1, No. 6, P. 445-466.

[5] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proc. IRE.*, 1962, Vol. 50, P. 2061-2070.

Рассмотрим неоднородную сеть из N диффузионно-связанных систем ФитцХью-Нагумо:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}_i &= u_i - \frac{u_i^3}{3} - v_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(u_j - u_i), \\ \dot{v}_i &= u_i - b v_i + c_i, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, N$ – матрица смежности графа, описывающего топологию рассматриваемой сети. Предположим, что граф является неориентированным. Также предположим, что значения параметров c_i принадлежат промежутку $|c_i - c_j| \leq \sigma$, $\forall i, j = 1, \ldots, N$.

Достаточные условия синхронизации сети из систем ФитцХью-Нагумо[6]

Теорема

Пусть граф связей сети из систем ФитцХью-Нагумо (5) *является неориентированным. Также пусть значения параметров* c_i *принадлежат промежутку* $|c_i - c_j| \leq \sigma,\ \forall i, j = 1, \ldots, N$. *Если выполнено следующее неравенство*

$$\lambda_2 > \lambda^* = 1,$$

где λ_2 *– это алгебраическая связность графа, то сеть из систем ФитцХью-Нагумо приближенно синхронизируется с уровнями точности*

$$\Delta_1 = \left(\frac{3N\sigma^2}{b}\right)^{1/4}, \quad \Delta_2 = \frac{\sigma}{2}\left(\sqrt{\frac{N}{b}} + \frac{1}{b}\right).$$

[6] Plotnikov S.A., Fradkov A.L. On synchronization in heterogeneous FitzHugh–Nagumo networks // *Chaos, Solitons & Fractals*, 2019, Vol. 121, P. 85-91.

Моделирование

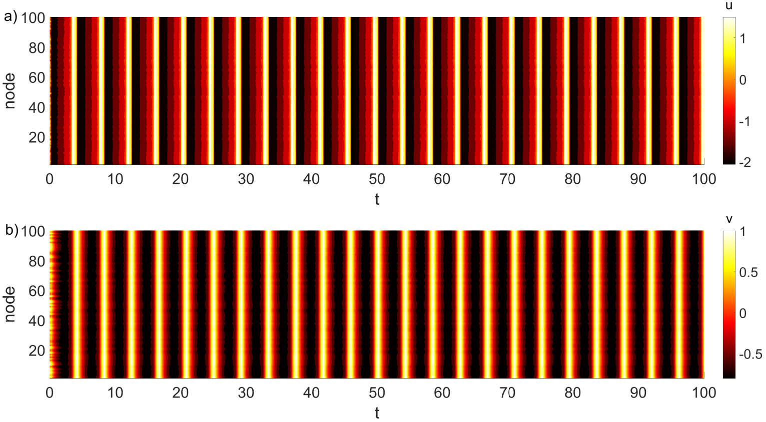
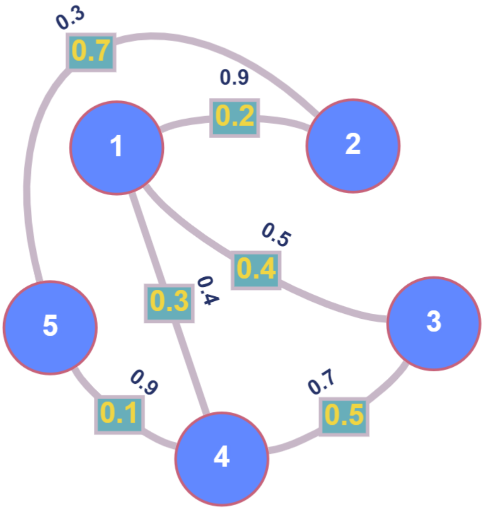


Рис. 2: Синхронизация в неоднородной сети из 100 систем ФитцХью-Нагумо (5). (a), (b): динамика переменных состояния. Значения параметров: $N = 100$, $b = 0.45$, $\varepsilon = 0.08$, $\lambda_2 = 21.1$. Параметры a_i имеют равномерное распределение на промежутке $[0.63; 0.73]$. Начальные условия $u_i(0)$, $v_i(0)$, $i = 1, \ldots, N$ равномерно распределены на промежутке $[0; 1]$.

Состояния динамической сети

- Полная синхронизация
- Кластерная синхронизация
- Состояние Химеры
- Десинхронизация



Напомним определения колебательных функций и систем, введенные В.А. Якубовичем[7].

Определение

Для $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ *скалярная функция* $\psi(t)$ *называется* (α,β)*-колебательной при* $t \to \infty$, *если она ограничена, и выполнены следующие неравенства:*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \psi(t) = \alpha; \quad \varlimsup_{t\to+\infty} \psi(t) = \beta.$$

[7] Якубович В.А. Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // *Сиб. мат. журн.*, 1973, Т. 14, № 5, С. 1100–1129.

Колебательность по Якубовичу (прод.)

Рассмотрим нелинейную систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{6}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\mathbf{f}$ – непрерывная, локально липшицева вектор-функция.

Определение

Решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ *для* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *системы* (6) *называется колебательным, если для него существует выход* $\psi = \eta(\mathbf{x})$, *где* $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– непрерывная функция, такой, что он является* (α, β)*-колебательным для некоторых* $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.

Система (6) *называется колебательной, если для почти всех* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *решения системы* $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ *колебательные.*

Достаточные условия колебательности системы

Теорема

Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\varphi(\mathbf{y})$, $y = \mathbf{C}\mathbf{x}$ *(здесь* $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ *– непрерывно-дифференцируемая функция, а* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *– матрицы соответствующих размерностей), все решения системы* (6) *ограничены. Пусть все матрицы* $\mathbf{Q}_i = \mathbf{A} + \mathbf{B}\partial\varphi(\mathbf{C}\mathbf{x}_i^*)/\partial\mathbf{y}$, *где* $\mathbf{x}_i^*$ *– положения равновесия системы* (6), *имеют хотя бы одно собственное число с положительной вещественной частью и не имеют чисто мнимых собственных чисел. Тогда система* (6) *является колебательной по выходу* $\mathbf{y}$. *Если все собственные числа матриц* $\mathbf{Q}_i$ *имеют положительные вещественные части, то множество начальных условий* Ω, *для которых решения не являются колебаниями по выходу* $\mathbf{y}$ *при* $t \to \infty$, *имеет вид* $\Omega = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{x}_i^*\}$.

Определение

Непрерывная функция $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *принадлежит классу* K, *если она строго возрастающая и* $\sigma(0) = 0$.

Определение

Непрерывная функция $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *принадлежит классу* K_∞, *если она принадлежит классу* K *и радиально неограничена.*

Следующий результат был получен Д.В. Ефимовым и А.Л. Фрадковым[8].

---

[8] Ефимов Д.В., Фрадков А.Л. Условия колебательности по Якубовичу для нелинейных систем // *Вестн. СПбГУ*, 2006, № 4, С. 28–40.

Достаточные условия колебательности системы (прод.)

Теорема

Пусть существуют две непрерывные и локально липшицевы функции Ляпунова $V_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $V_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, *удовлетворяющие неравенствам* $v_1(|\mathbf{x}|) \le V_1(\mathbf{x}) \le v_2(|\mathbf{x}|)$, $v_3(|\mathbf{x}|) \le V_2(\mathbf{x}) \le v_4(|\mathbf{x}|)$, *для всех* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $v_1, v_2, v_3, v_4 \in K_\infty$, *а их производные в силу системы* (6) *удовлетворяют неравенствам* $\dot{V}_1(\mathbf{x}) = \partial V_1/\partial \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) > 0$ *для* $0 < |\mathbf{x}| < X_1$, $\mathbf{x} \notin \Xi$, $\dot{V}_2(\mathbf{x}) = \partial V_2/\partial \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0$ *для* $|\mathbf{x}| > X_2$, $\mathbf{x} \notin \Xi$, *где* $0 < X_1 < v_1^{-1} \circ v_2 \circ v_3^{-1} \circ v_4(X_2) < +\infty$ *и* $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ *– некоторое множество нулевой меры, не содержащее целых траекторий системы. Если, к тому же, пересечение двух следующих множество пусто* $\{\mathbf{x} : v_2^{-1} \circ v_1(X_1) < |\mathbf{x}| < v_3^{-1} \circ v_4(X_2)\} \cap \Xi = \emptyset$, *то система* (6) *является колебательной, при этом для ее решения* $\mathbf{x}(t)$ *верны следующие оценки*

$$|\mathbf{x}(t)| > v_2^{-1} \circ v_1(X_1), \quad |\mathbf{x}(t)| < v_3^{-1} \circ v_4(X_2).$$

Рассмотрим N объектов (процессов) с состояниями $\mathbf{x}_i(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Введем для них средннюю динамику $\bar{\mathbf{x}} = 1/N \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i$ и ошибки синхронизации $\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}$.

Определение

Сеть из N объектов (процессов) будем называть частично десинхронизированной, если существуют выход $\psi = \eta(\mathbf{e}_i)$, где $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, и достаточно большие $\Delta_i > 0$ такие, что для некоторых $i = 1, \dots, N$ выход $\psi = \eta(\mathbf{e}_i)$ является (α, β)-колебательным и выполнены неравенства $\beta - \alpha \geq \Delta_i$, $\forall t \geq 0$.
Если неравенства выполнены для всех $i = 1, \dots, N$, то сеть называется полностью десинхронизированной.

Отметим, что определение частотной десинхронизации дано в работе [9].

[9] Franci A., Panteley E., Chaillet A., Lamnabhi-Lagarrigue F. Desynchronization of coupled phase oscillators, with application to the Kuramoto system under mean-field feedback // *50th IEEE Conf. on Decis. Cont. & Europ. Cont. Conf.*, 2011, P. 6748–6753.

Рассмотрим однородную сеть из N нелинейных систем в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_i(t) &= \mathbf{f}^y(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{z}_i(t)) - \mathbf{u}_i(t), \\ \dot{\mathbf{z}}_i(t) &= \mathbf{f}^z(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{z}_i(t)), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\mathbf{y}_i,\ \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$ – выход и вход i-й системы,соответственно, а $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^{n-m}$ – ее ноль-динамика. Вектор-функции $\mathbf{f}^y : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f}^z : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ являются локально липшицевыми.
Пусть связи между системами будут линейными диффузионными:

$$\mathbf{u}_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}[\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_i(t)], \tag{8}$$

Введем векторы состояния $\mathbf{x}_i = \mathrm{col}(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ каждой системы (7).

Достаточные условия десинхронизации нелинейной сети [10]

Теорема

Пусть все решения сети (7), (8) ограничены, а граф сети является неориентированным. Пусть все положения равновесия $\mathbf{x}_j^*$ *несвязанной системы (7) являются локально устойчивыми, а все матрицы линеаризованной сети (7), (8) вокруг каждого из положений равновесия* $\mathrm{col}(\mathbf{x}_j^*, \ldots, \mathbf{x}_j^*)_N$*, имеют хотя бы одно собственное число с положительной вещественной частью и не имеют чисто мнимых собственных чисел. Тогда сеть (7), (8) является частично десинхронизированной при некотором* $\Delta > 0$*. Если* $(N-1)n$ *собственных числел матриц линеаризованной сети имеют положительные вещественные части, то сеть (7), (8) будет полностью десинхронизирована при некотором* $\Delta > 0$*, если начальные данные не лежат в множестве* $\Omega = \{\mathbf{x} \ : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}_j^*\}$.

[10] Plotnikov S.A., Fradkov A.L. Desynchronization in oscillatory networks based on Yakubovich oscillatority // *IFAC PapersOnLine*, 2020, Vol. 53, No. 2, P. 1037-1042.

Предположим, что граф сети является неориентированным, и введем среднюю динамику:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{y}}}(t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{f}^y(\mathbf{y}_i(t),\mathbf{z}_i(t)),\\ \dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{f}^z(\mathbf{y}_i(t),\mathbf{z}_i(t)),\end{aligned}\tag{9}$$

тогда система из ошибок синхронизации будет представлена в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_{yi} &= \mathbf{f}^y(\mathbf{y}_i,\mathbf{z}_i) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{f}^y(\mathbf{y}_i,\mathbf{z}_i) - \sum_{j=1}^{N}a_{ij}[\mathbf{e}_{yi}(t)-\mathbf{e}_{yj}(t)],\\ \dot{\mathbf{e}}_{zi} &= \mathbf{f}^z(\mathbf{y}_i,\mathbf{z}_i) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{f}^z(\mathbf{y}_i,\mathbf{z}_i),\end{aligned}\tag{10}$$

где $\mathbf{e}_{yi}=\mathbf{y}_i-\bar{\mathbf{y}}$, $\mathbf{e}_{zi}=\mathbf{z}_i-\bar{\mathbf{z}}$, $\mathbf{e}_i=\mathrm{col}(\mathbf{y}_i,\mathbf{z}_i)$, $\mathbf{e}=\mathrm{col}(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_N)$.

Достаточные условия десинхронизации нелинейной сети[11]

Теорема

Пусть граф сети (7), (8) является ориентированным и связным, а ее решения являются ограниченными для почти всех начальных данных. Пусть существует непрерывная и локально липшецева функция Ляпунова $V : \mathbb{R}^{Nn} \to \mathbb{R}_+$*, удовлетворяющая неравенствам* $v_1(|\mathbf{e}|) \le V(\mathbf{e}) \le v_2(|\mathbf{e}|)$ *для всех* $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{Nn}$, $v_1, v_2 \in K_\infty$*, а ее производная в силу системы из ошибок синхронизации (10) положительна* $\dot{V}(\mathbf{e}) > 0$ *для* $0 < |\mathbf{e}| < E$, $\mathbf{e} \notin \Xi$*, где* $E > 0$ *и* $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ *– некоторое множество нулевой меры, не содержащее целых траекторий системы. Если, к тому же, пересечение двух следующих множество пусто* $\{\mathbf{e} : v_2^{-1} \circ v_1(E) < |\mathbf{e}|\} \cap \Xi = \emptyset$*, то сеть (7), (8) является полностью десинхронизированной при* $\Delta = v_2^{-1} \circ v_1(E)$.

[11] Плотников С.А. Десинхронизация в сетях из нелинейных систем // *XIV Всероссийское совещание по проблемам управления*, Россия, Москва, ИПУ РАН, 17-20 июня 2024 г. (подана).

Рассмотрим однородную сеть из N диффузионно-связанных систем ФитцХью-Нагумо:

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{u}_i &= u_i - \frac{u_i^3}{3} - v_i - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(u_j - u_i), \\ \dot{v}_i &= u_i + c, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, N$ – матрица смежности графа, описывающего топологию рассматриваемой сети. Предположим, что граф является неориентированным.

Достаточные условия десинхронизации однородной сети ФитцХью-Нагумо[12]

Теорема

Сеть из связанных возбудимых $(|c| > 1)$ *систем ФитцХью-Нагумо* (11) *с неориентированным графом связей частично десинхронизирована при некотором* $\Delta > 0$, *если* $\lambda_N > c^2 - 1$. *А если, к тому же* $\lambda_2 > c^2 - 1$, *то сеть из связанных возбудимых систем ФитцХью-Нагумо* (11) *полностью десинхронизирована при некотором* $\Delta > 0$. *Здесь* λ_2, λ_N *– собственные числа матрицы Лапласа.*

[12] Плотников С.А. Десинхронизация и колебательность в возбудимых сетях ФитцХью-Нагумо // *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2023, Том 24, № 6, С. 292-299.

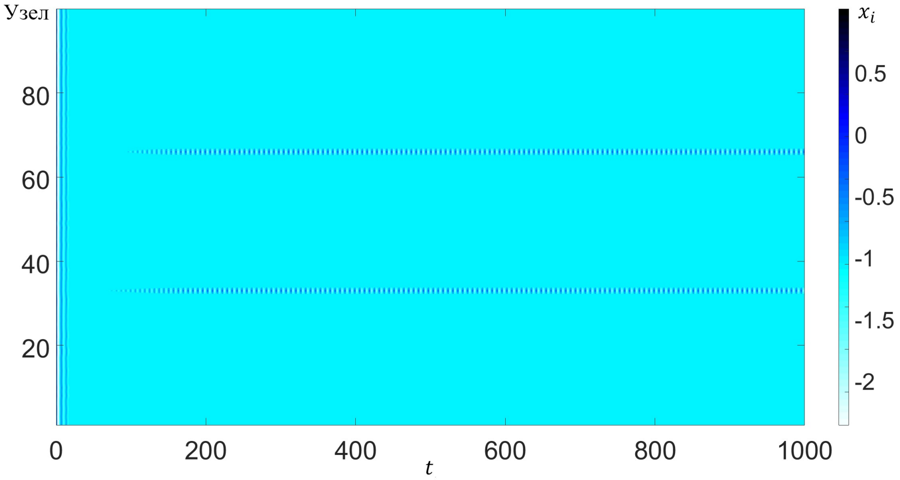


Рис. 3: Частичная десинхронизация в однородной сети из 100 систем ФитцХью-Нагумо (11), динамика трансмембранных потенциалов u_i. Значения параметров: $N = 100$, $\varepsilon = 1$, $c = 1.1$. Начальные условия $u_i(0)$, $v_i(0)$, $i = 1, \ldots, N$ равномерно распределены на промежутке $[0; 1]$.

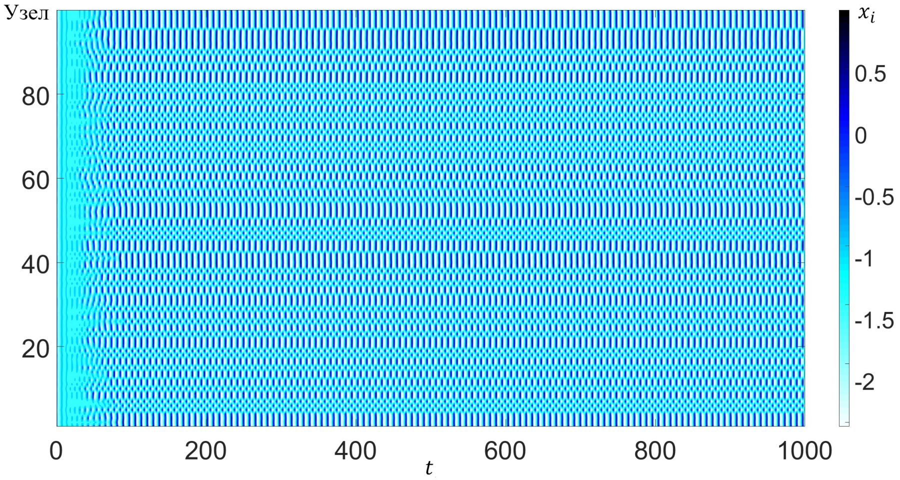


Рис. 4: Полная десинхронизация в однородной сети из 100 систем ФитцХью-Нагумо (11), динамика трансмембранных потенциалов u_i. Значения параметров: $N = 100$, $\varepsilon = 1$, $c = 1.1$. Начальные условия $u_i(0)$, $v_i(0)$, $i = 1, \dots, N$ равномерно распределены на промежутке $[0; 1]$.

Заключение

- Рассмотрена проблема синхронизации в нелинейных диффузионно-связанных сетях. Приведено определение координатной синхронизации, отмечены важные работы в этой области.
- Получены достаточные условия синхронизации в однородной сети из систем Хиндмарш-Роуз и неоднородной сети из систем ФитцХью-Нагумо.
- Введено определение координатной десинхронизации. Установлена связь между понятиями десинхронизации и колебательности по Якубовичу.
- Получены достаточные условия частичной и полной десинхронизации в нелинейных сетях. В качестве примера была рассмотрена однородная сеть из систем ФитцХью-Нагумо.

Спасибо за внимание!