Рейтингование объектов: DEA + сеть Кохонена

(Бухвалова В.В., 16.05.2024)

DEA — определение

DEA (от английского Data Envelopment Analysis) — техника измерения относительной эффективности многопродуктовых производственных единиц, базирующаяся на линейном программировании.

Примеры однородных множеств, к которым применяется техника DEA: муниципалитеты, школы, больницы, магазины, отделения банков, относящиеся к определённому региону.

DEA — ответ на запрос «DEA что это» в Google.ru (07.05.2024)

DEA (Drug Enforcement Administration) — агентство в составе Министерства юстиции США, занимающееся исполнением федерального законодательства о наркотиках.

Есть ещё **кокамид ДЭА**, который *нашёл применение в качестве загустителя и стабилизатора при изготовлении мазей*, но ничего про то, что нам нужно.

DEA — ответ на запрос «dea what it means» в Google.ru

Первая ссылка на статью о модели DEA (12.03.2019) только на пятой странице. В 2014 г. уже на первой странице была ссылка на монографию, изданную в 2008:

DEA — история возникновения

Всё начиналось с этих авторов и их статей:

Farrell M. J. (1957) *The measurement of productive efficiency* // J.R. Statis. Soc. Series A 120, 253–281.

Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E. (1978) *Measuring the efficiency of decision making units.* // European Journal of Operational Ressearch 2, 429–444.

DEA — наши дни

Теория и практика DEA стали активно развиваться с момента своего создания. Было образовано International Data Envelopment Analysis Society, которое издаёт журнал «*The Data Envelopment Analysis Journal*» (*https://www.nowpublishers.com/DEA*) и проводит международные конференции. В сентябре 2023 г. в Великобритании прошла конференция, посвящённая 45-ой годовщине существования DEA.

О переводе названия DEA

Устоявшегося русского перевода для **Data Envelopment Analysis** не существует.

Используются термины: *анализ свертки данных*, *комплексный анализ данных* и *оболочечный анализ данных*.

Чаще всего в русскоязычной литературе используется международное название DEA.

DEA — экономическое предположение

Производственные единицы из рассматриваемой совокупности достаточно автономны и сами принимают все решения.

В англоязычной литературе это подчеркивается использованием термина *Decision Making Units* или аббревиатуры от него **DMU**.

DEA — определение эффективности

Традиционная формула определения экономической эффективности имеет вид:

$$\text{Эффективность} = \frac{\text{Доход}}{\text{Затраты}}.$$

В англоязычной литературе эта формула обычно имеет вид

$$\text{Efficiency} = \frac{\text{Output}}{\text{Input}}.$$

Поэтому будем использовать термины *вход* и *выход*, а не затраты и доход.

DEA — пример

Пример. *Фирма состоит из 20 складов, информация о деятельности которых приведена в следующей таблице. Входы — максимальный уровень запаса на складе и текущие расходы (в основном на заработную плату, сотни тысяч), выходы — количество поставок супермаркетам, количество поступлений (от поставщиков), количество заявок поставщикам при низком уровне запаса (соответствующая графа таблицы названа НУЗ). Все три показателя (выходы) измеряются в тысячах. Предполагается, что, чем больше значения выходов, тем лучше работает склад.*

DEA — пример (данные)

Склад	Объём	Расходы	Поставки	Поступления	НУЗ
1	3	5	40	55	30
2	2.5	4.5	45	50	40
3	4	6	55	45	30
4	6	7	48	20	60
5	2.3	3.5	28	50	25
6	4	6.5	48	20	65
7	7	10	80	65	57
8	4.4	6.4	25	48	30
9	3	5	45	64	42
10	5	7	70	65	48
11	5	7	45	65	40
12	2	4	45	40	44
13	5	7	65	25	35
14	4	4	38	18	64
15	2	3	20	50	15
16	3	6	38	20	60
17	7	11	68	64	54
18	4	6	25	38	20
19	3	4	45	67	32
20	5	6	57	60	40

DEA — формула относительной эффективности

Farrell M. J. (1957):

$$E_k(U, V) = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_i y_{ik}}{\sum_{k=1}^{n} v_j x_{jk}},$$

где n — число входов, k — номер производственной единицы, вектор $X_k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk})$ — значения входов, m — число выходов, вектор $Y_k = (y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{mk})$ — значения выходов, $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — вектор весов входов, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — вектор весов выходов.

Значения всех входов и выходов являются неотрицательными числами ($X_k \geq 0, \; Y_k \geq 0$) и значения хотя бы одного входа и выхода у каждой производственной единицы k строго больше нуля.

DEA — свойства $E_k(U, V)$

$$E_k(U, V) = E_K(aU, aV);$$
$$E_k(aU, V) = aE_k(U, V);$$
$$E_k(U, aV) = \frac{1}{a}E_k(U, V).$$

$$E_k(U, V) \le E_l(U, V) \Longrightarrow E_k(aU, V) \le E_l(aU, V),$$
$$E_k(U, aV) \le E_l(U, aV), \text{ при } a > 0.$$

Нас интересую не значения эффективности, а только относительная эффективность в некоторой совокупности производственных единиц, поэтому можно скорректировать значения весов (U, V) так, чтобы $E_k(U, V) \in [0,\ 1]$.

DEA — доминирование

Будем называть ситуацию, когда $X_k \geq X_l$ и $Y_k \leq Y_l$, *доминированием производственной единицы* l *над производственной единицей* k.

Из доминирования l над k следует

$$E_k(U,V) \leq E_l(U,V) \text{ при любых весах } U,\ V.$$

DEA — пример — доминирование

Склад 10 доминирует над складом 11; склад 19 доминирует над складом 18.

Склад	Объём	Расходы	Поставки	Поступления	НУЗ
10	5	7	70	65	48
11	5	7	45	65	40
18	4	6	25	38	20
19	3	4	45	67	32

DEA — проблема выбора весов

$$E_k(U,V) = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_i y_{ik}}{\sum_{k=1}^{n} v_j x_{jk}}$$

Использование этой формулы предполагает наличие общего набора весов (V, U) для всех DMU.

Проблемы:
1. Трудно оценить входы и выходы.
2. Требование единой системы весов не всегда является справедливым. Примеры: с музыкальная и спортивная школы; отделения банка, расположенные в разных местах.

Выход: *предоставить каждой* DMU *возможность установить набор весов* (V, U)*, при котором её эффективность будет максимальной.*

DEA — проблема выбора весов

Математически это эквивалентно решению следующей экстремальной задачи для каждой производственной единицы k:

$$E_k(U, V) = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_i y_{ik}}{\sum_{k=1}^{n} v_j x_{jk}} \to \max \tag{1}$$

при ограничениях:

$$E_s(U, V) = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_i y_{is}}{\sum_{j=1}^{n} v_j x_{js}} \leq 1, \; s = 1, \ldots, l, \tag{2}$$

$$u_i \geq \epsilon, \; i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$v_j \geq \epsilon, \; j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Переменные задачи — веса $V = (v_j)$, $U = (u_i)$!
Значения входов $X_k = (x_{jk})$ и выходов $Y_k = (y_{ik})$ заданы!

DEA — о задаче выбора весов

Целевая функция — значение эффективности производственной единицы k, максимизируется.

Переменными задачи являются значения весов (U, V).

Существование допустимых решений следует из свойств эффективности.

Конечность оптимального решения следует из ограниченности целевой функции.

В правой части ограничений на эффективности могла бы стоять любая положительная константа.

Ограничения на значения весов $(\geq \epsilon)$ гарантируют, что будут учтены все входы и выходы.

DEA — об оптимальном решении задачи выбора весов

Обозначим через

(U^*, V^*) — оптимальное решение задачи (1)–(4),

E_k^* — максимальное значение целевой функции (1).

Из свойств задачи следует, что:

Если $E_k^* < 1$, то производственная единица k неэффективна, так как существует хотя бы одна производственной единицы l, у которой $E_l(U^*, V^*) = 1$ при найденных весах.

DEA — пример (продолжение)

Пример. Для склада 1 ($k = 1$) задача (1)–(4) примет вид:

$$\max E_1 = \frac{40u_1 + 55u_2 + 30u_3}{3v_1 + 5v_2}$$

при ограничениях

$$E_1 = \frac{40u_1 + 55u_2 + 30u_3}{3v_1 + 5v_2} \le 1,$$
$$E_2 = \frac{45u_1 + 50u_2 + 40u_3}{2.5v_1 + 4.5v_2} \le 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$E_{20} = \frac{57u_1 + 60u_2 + 40u_3}{5v_1 + 6v_2} \le 1,$$

$$u_i \ge \epsilon,\ \ i = 1, 2, 3,$$
$$v_j \ge \epsilon,\ \ j = 1, 2.$$

DEA — таблица с решением (склад 1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2								v1	v2	u1	u2	u3
3								0.299	0.02	0.005	0.011	0.0001
4	склад	объём	расходы	поставки	поступления	НУЗ	**1**	**0.820**	= целевая функция			
5	1	3	5	40	55	30	1	-0.180	0.820			
6	2	2.5	4.5	45	50	40	2	-0.049	0.942			
7	3	4	6	55	45	30	3	-0.533	0.596			
8	4	6	7	48	20	60	4	-1.462	0.246			
9	5	2.3	3.5	28	50	25	5	-0.058	0.924			
10	6	4	6.5	48	20	65	6	-0.854	0.358			
11	7	7	10	80	65	57	7	-1.159	0.496			
12	8	4.4	6.4	25	48	30	8	-0.782	0.459			
13	9	3	5	45	64	42	9	-0.053	0.947			
14	10	5	7	70	65	48	10	-0.551	0.664			
15	11	5	7	45	65	40	11	-0.681	0.584			
16	12	2	4	45	40	44	12	0.000	1.000			
17	13	5	7	65	25	35	13	-1.022	0.376			
18	14	4	4	38	18	64	14	-0.875	0.315			
19	15	2	3	20	50	15	15	0.000	1.000			
20	16	3	6	38	20	60	16	-0.597	0.415			
21	17	7	11	68	64	54	17	-1.253	0.460			
22	18	4	6	25	38	20	18	-0.767	0.419			
23	19	3	4	45	67	32	19	0.000	1.000			
24	20	5	6	57	60	40	20	-0.654	0.596			
25		v1	v2	u1	u2	u3		**1.000**	1			
26												

DEA — линеаризация задачи оптимизации

Преобразуем ограничения (2) в эквивалентные линейные ограничения (7).

Учитывая свойства относительной эффективности, можно фиксировать значение знаменателя ЦФ (6) и максимизировать её числитель (5). Получаем задачу ЛП с $n+m$ переменными и $p+n+m+1$ ограничениями:

$$\max \sum_{i=1}^{m} u_i y_{ik} \tag{5}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_{jk} = 1\,, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i y_{il} - \sum_{j=1}^{n} v_j x_{jl} \le 0, \quad l = 1, \dots, p, \tag{7}$$

$$u_i \ge \epsilon,\ i = 1, \dots, m, \tag{8}$$

$$v_j \ge \epsilon,\ j = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Для случая: $n = 1$, $m = 2$, $v_1 = v_2 = \dots = v_p$, решение задачи (1)–(4) может быть получено графическим методом.

Пример 2. *Фирма выращивает два сорта клубники на 3 участках* (A, B, C)*, равной площади и с одинаковой по качеству почвой. На каждом участке работает отдельная бригада. При равных затратах (значения входов равны) бригады получили следующие урожаи ягод на этих участках (два выхода, значение тонны):*

$$A: u_{11} = 80,\ u_{21} = 0;\ B: u_{12} = 25,\ u_{22} = 10;\ C: u_{13} = 20,\ u_{23} = 40.$$

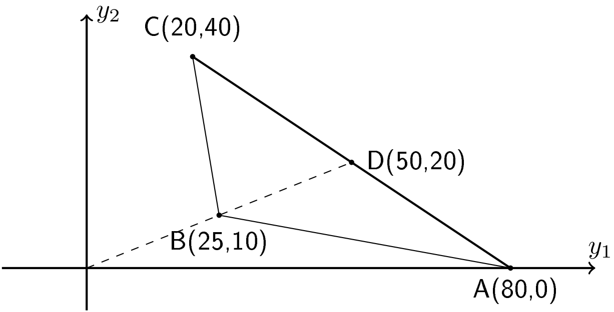
Что можно сказать об эффективности работы бригад, обслуживающих участки?

Поясним приведённые данные. Первая бригада выращивала клубнику только первого сорта, и урожай составил 80 т. Вторая и третья бригады предпочли выращивать клубнику обоих сортов. Урожаи на участках B и C составили (25 т, 10 т) и (20 т, 40 т).

Замечание. Между результатами работы трёх бригад нет доминирования. Однако мы покажем, что работа бригады на участке B является неэффективной.

DEA — геометрия оптимизационной задачи

Изобразим урожаи, полученные на участках, точками на плоскости (y_1, y_2).



Поделим участок B между бригадами, обслуживающими участки A и C. Отрезок AC — все возможные урожаи, которые при этом будут на участке B.

Аналогично можно поступить и с участками A и C. Отрезок AC расположен выше отрезков BC и BA, это означает, что ему соответствует больший урожай при одинаковых затратах. Этот отрезок называется *эффективной границей*. Точка B расположена ниже этой границы, поэтому работа на этом участке организована неэффективно.

Проведем луч через начало координат и точку B. D — пересечение этого луча с отрезком AC. $D(50, 20)$ — середина отрезка AC.

Вывод: *если на одной половине участка применить технологию участка A, а на другой — технологию участка C, то урожай возрастет в 2 раза.*

DEA — двойственная задача

Введем обозначения для переменных задачи, двойственной к (5)–(9):

$$(6): w;\ (7): \lambda_1, \ldots, \lambda_p;\ (8): s_1^u, \ldots, s_m^u;\ (9): s_1^v, \ldots, s_n^v\,.$$

Тогда двойственная задача примет вид:

$$\min w - \epsilon \left(\sum_{i=1}^{m} s_i^u + \sum_{j=1}^{n} s_j^v \right) \tag{10}$$

при ограничениях

$$x_{jk} w - \sum_{l=1}^{p} x_{jl} \lambda_l - s_j^v = 0\,,\ j = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

$$\sum_{l=1}^{p} y_{il} \lambda_l - s_i^u = y_{ik}\,,\ i = 1, \ldots, m, \tag{12}$$

$$\lambda_l \geq 0,\ l = 1, \ldots, p, \tag{13}$$

$$s_j^v \geq 0,\ j = 1, \ldots, n;\ s_i^u \geq 0,\ i = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

DEA — двойственная задача

Задача (10)–(14)имеет $(n + m)$ ограничений и $(p + n + m + 1)$ переменных.

В реальных задачах количество производственных единиц p много больше $n + m$. Поэтому часто предпочитают решать двойственную задачу так как в трудоемкость вычисления оптимального решения задачи ЛП зависит, прежде всего, от количества ограничений.

DEA — двойственные переменные

Оптимальные значения двойственных переменных λ_l^* — цена за ограничение эффективности производственной единицы ℓ, если оптимальное значение этой эффективности равно 1.

Оптимальные значения двойственных переменных s_j^v и s_i^u — цена за запрет не учитывать вход j и выход i (вернее, учитывать их с весом 0) при максимизации эффективности производственной единицы k (решение задачи (5)–(9)).

DEA — двойственные переменные

Преобразуем ограничения (11)–(14) к виду:

$$\sum_{l=1}^{p} x_{jl}\lambda_l = x_{jk}w - s_j^v\,,\ j = 1,\ldots,n,$$

$$\sum_{l=1}^{p} y_{il}\lambda_l = y_{ik} + s_i^u\,,\ i = 1,\ldots,m,$$

$$\lambda_l \geq 0,\ l = 1,\ldots,p,$$

$$s_j^v \geq 0,\ j = 1,\ldots,n;\ s_i^u \geq 0,\ i = 1,\ldots,m.$$

Если можно организовывать *составные* производственные единицы со следующими вектора входа и выхода:

$$\sum_{l=1}^{p} x_{jl}\lambda_\ell,\ j = 1,\ldots,n;\ \sum_{l=1}^{p} y_{il}\lambda_\ell,\ i = 1,\ldots,m,$$

то из ограничений видно, что оптимальное решение двойственной задачи ищется среди составных производственных единиц, значения входов которых не больше значений входов производственной единицы k, а значения выходов — не меньше.

DEA — двойственные переменные

Допустимые решения двойственной задачи — значения долей λ_ℓ в составных производственных единицах, эффективность которых не меньше эффективности производственной единицы k.

Если производственная единица k является эффективной, то в оптимальном решении выполнены следующие равенства:

$$w = 1,\ s_j^v = 0,\ j = 1, \ldots, n;\ s_i^u = 0,\ i = 1, \ldots, m.$$

DEA — области применения

Чаще всего в прикладных публикациях, посвященных DEA, упоминаются:

- здравоохранение (больницы, сети филиалов клиник),
- образование (школы, университеты),
- банки (сети филиалов),
- сети ресторанов быстрого питания,
- сети магазинов,
- сети складов.

Размерность задач (количество производственных единиц l принадлежит очень широкому диапазону: от нескольких штук до нескольких тысяч.

Модель DEA — свойства

- Рассмотрен первый вариант модели DEA — модель CCR, *ориентированная на выход*.
- Модель DEA требует большого объёма вычислений (решается задача линейного программирования для каждого объекта). Но можно предложить несколько приёмов, которые сокращают эти вычисления.
- Можно разбивать объекты не только на два кластера (эффективные и неэффективные), но и на несколько кластеров, например, по средней эффективности.

Рейтингование объектов: сеть Кохонена

(Бухвалова В.В., 16.05.2024)

Задачи классификации и кластеризации

Задача классификации: восстановление отображения из множества объектов в конечный набор меток классов. Классы зафиксированы заранее (например, цифры $0, 1, \ldots, 9$). Имеется обучающая выборка (объекты и классы, к которым они относятся).

Задаче кластеризации: также разбиваем объекты на конечное множество классов, но ***без обучающей выборки***. Отсутствует представление, какими будут эти классы. Модель кластеризации создаёт *новую информацию* о том, какие есть классы. Иногда не известно заранее, сколько классов имеется. Из-за сходства постановок этих задач в литературе кластеризацию иногда называют **unsupervised classification**.

Цели кластеризации

Анализ данных в целом: выявление структуры данных и её наглядное представление, оценивание значимости свойств объектов, сокращение объёма данных.

Разбиение данных на кластеры: свои модели и алгоритмы для каждого кластера.

Сеть Кохонена: основные свойства

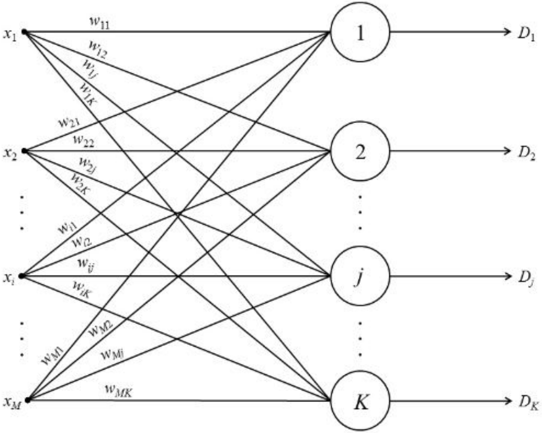
Нейронные сети Кохонена типичный пример сети, обучающейся *без учителя*. Рассмотрим вариант сети Кохонена для задачи кластеризации объектов. Сначала предположим, что число кластеров K задано.

Решение о попадании объекта в тот или иной кластер принимается на основе значений его признаков. Обычно до начала обучения проводится нормализация признаков объектов. Нормализация признаков выполняется в пределах [–1, 1] или [0, 1].

Можно считать, что сеть Кохонена состоит из одного слоя из K нейронов с весами W^k, сигнал по которым от входов направляется к выходам в прямом направлении. Начальные значения весов нейронов — случайные числа. Задаётся также начальная скорость обучения λ и шаг её уменьшения $\Delta\lambda$.

Для обучения сети применяются механизмы конкуренции.

Сеть Кохонена



Постановка задачи

Имеется множество X, которое состоит из которое M объектов. Каждый объект характеризуется N признаками:

$$X^m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_N^m),\ m = 1, 2, \dots, M.$$

Требуется разбить множество X на K кластеров.

Обучение

Обучаемыми будут вектора весов кластеров:

$$W^k = (w_1^k, w_2^k, \ldots, w_N^k),\ k = 1, 2, \ldots, K.$$

Алгоритм обучения (подготовительные шаги)

1. Нормирование исходных данных ([0,1] по столбцам — признакам):

$$Max_n = \max_m x_n^m, \; Min_n = \min_m x_n^m,$$

$$a_n = \frac{1}{Max_n - Min_n}, \; b_n = \frac{-Min_n}{Max_n - Min_n}, .$$

$$x_n^m := a_n x_n^m + b_n, \; n = 1, 2, \ldots, N.$$

2. Начальные значения весов — случайные числа, например, такие:

$$w_n^k \sim R[0.5 - \frac{1}{\sqrt{N}}, \; 0.5 + \frac{1}{\sqrt{N}}], \; k = 1, 2, \ldots, K, \; n = 1, 2, \ldots, N.$$

3. Выбор параметра скорости обучения и шага его уменьшения:

$$\lambda = 0.3, \; \Delta\lambda = 0.05.$$

Алгоритм обучения (основные шаги)

1. Пока $\lambda > 0$
2. Повтор шагов 3-4 фиксированное число раз (например, 10).
3. Для каждого X^m находим ближайший W^k.
   Комментарий к п. 3. Чаще всего используется евклидова метрика. Перебор в фиксированном или случайном порядке.
4. Изменяем найденный вектор:
   $$W^k := W^k + \lambda(X^m - W^k).$$
5. Завершив повторы 3-4, меняем скорость обучения:
   $$\lambda := \lambda - \Delta\lambda.$$
6. Переход к шагу 1.

Кластеры объектов

1. Результатом работы приведённого алгоритма являются обученные веса W^k.
2. Объект X^m включаем в кластер с ближайшим весом.
3. Если с вектором весов W^k выполнить процедуру обратной нормировки, то значения его компонент можно трактовать как средние значения характеристик данного кластера.

Численный пример (задача о складах)

Вернёмся к ранее рассмотренной задаче о складах и применим к ней теперь сеть Кохонена: разобъём множество складов на 2 кластера и сравним полученные решения.

Модель **DEA** разбила склады на два кластера: эффективные и неэффективные. При этом данные о складах (признаки) были разбиты на два множества: входы и выходы. Использование сети Кохонена предполагает задание единого множества признаков объектов.

Преобразование данных: в качестве признаков складов были использованы *удельные эффективности* (отношения каждого выхода к каждому входу). Таким образом, у каждого склада получилось 6 признаков.

Задача о складах: признаки и результаты двух моделей

склад	3/1	4/1	5/1	3/2	4/2	5/2	2 кластера	Эффективность (DEA)
1	13.3	18.3	10.0	8.0	11.0	6.0	1	0.820
2	18.0	20.0	16.0	10.0	11.1	8.9	1	0.942
3	13.8	11.3	7.5	9.2	7.5	5.0	0	0.811
4	8.0	3.3	10.0	6.9	2.9	8.6	0	0.651
5	12.2	21.7	10.9	8.0	14.3	7.1	1	0.946
6	12.0	5.0	16.3	7.4	3.1	10.0	0	0.819
7	11.4	9.3	8.1	8.0	6.5	5.7	0	0.706
8	5.7	10.9	6.8	3.9	7.5	4.7	0	0.516
9	15.0	21.3	14.0	9.0	12.8	8.4	1	0.963
10	14.0	13.0	9.6	10.0	9.3	6.9	1	0.885
11	9.0	13.0	8.0	6.4	9.3	5.7	0	0.631
12	22.5	20.0	22.0	11.3	10.0	11.0	1	**1.000**
13	13.0	5.0	7.0	9.3	3.6	5.0	0	0.817
14	9.5	4.5	16.0	9.5	4.5	16.0	**0**	**1.000**
15	10.0	25.0	7.5	6.7	16.7	5.0	1	**1.000**
16	12.7	6.7	20.0	6.3	3.3	10.0	0	0.903
17	9.7	9.1	7.7	6.2	5.8	4.9	0	0.547
18	6.3	9.5	5.0	4.2	6.3	3.3	0	0.420
19	15.0	22.3	10.7	11.3	16.8	8.0	1	**1.000**
20	11.4	12.0	8.0	9.5	10.0	6.7	1	0.842

Сеть Кохонена на языке Python

Для выполнения кластеризации с помощью сети Кохонена была написана программа на языке Python (использовался пакет minisom-2.3.1). Результаты работы этой программы приведены в столбце «2 кластера». Для удобства сравнения кластеризации двумя методами в последнем столбце «Эффективность» приведены результаты вычислений с помощью модель DEA.

Из DEA-эффективных складов в кластер 1 не вошёл только склад 14. Заметим, что в кластер 1 попали также склады, DEA-эффективность которых сравнительно высокая. Но и здесь есть исключение: в кластер 1 не попал склад 16 ($E = 0.903$). Видим, что оба подхода дают похожее разбиение на кластеры.

Литература по теме доклада

- Бухвалова В.А., Бухвалова В.В. (2014) Использование методологии DEA для рейтингования объектов с нелинейной производственной функцией // Proceedings of the 2nd International Conference «Information Technologies for Intelligent Decision Making Support», Vol 2, May 18-21, Ufa, Russia, 2014, p. 166-171.
- Бухвалова В.В. (2023) Рейтингование объектов: DEA + сеть Кохонена // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем: сборник научных трудов X VII Международной школы-симпозиума АМУР-2023, Судак, 14-27 сентября 2023, 71-76.
- Ендовицкий Д.А., Коменденко С.Н. (2022) Применение DEA в оценке деятельности научно-педагогических работников // Вестник ВГУ. Серия: Экономика и управление. 2022. №2. С. 3–17.
- Кохонен Т. (2008) Самоорганизующиеся карты. — Бином. Лаборатория знаний, 2008.

Литература по теме доклада

- Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E. (1978) Measuring the efficiency of decision making units // European Journal of Operational Ressearch, 2: 429-444.
- Farrell M. J. (1957) The measurement of productive efficiency // J.R. Statis. Soc., 195; Series A, 120: 253-281.
- Kohonen T. (1988) An introduction to neural computing // Neural Networks, Volume 1, Issue 1, 3-16.
- Kohonen T. (1990) The self-organizing map // Proceedings of the IEEE, 78(9), 1464-180.
- Panwar, A., Olfati, M., Pant, M. et al. (2022) A Review on the 40 Years of Existence of Data Envelopment Analysis Models: Historic Development and Current Trends // Arch Computat. Methods Eng. 29, 5397–5426.