Итерационное отображение фейеровского типа для решения системы линейных алгебраических уравнений с двухсторонними ограничениями

В.И. Ерохин

[1]Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
vka@mil.ru

Семинар по оптимизации, машинному обучению
и искусственному интеллекту «O&ML»

19 декабря 2024 г.

Детально о фейеровском решателе системы $Ax = b$, $x \geqslant 0$: http://oml.cmlaboratory.com/pdf/2023/Erohin_VI_2nov2023.pdf

Новое итерационное отображение фейеровского типа для решения системы линейных алгебраических уравнений с условием неотрицательности

В.И. Ерохин

[1] Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
vka@mil.ru

Семинар по оптимизации, машинному обучению
и искусственному интеллекту «O&ML»

2 ноября 2023 г.

О фейеровском решателе задачи ЛП $L : Ax = b, x \geqslant 0, c^\top x \to \max$, $L^* : A^\top u \geqslant c, b^\top u \to \min$

A method for solving a dual pair of linear programming problems based on the fast Fejér type algorithm for finding a nonnegative solution to a system of linear algebraic equations

В.И. Ерохин, д.ф.м.н., проф.

[1] Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия

vka@mil.ru

XXIII Международная конференция
«Теория математической оптимизации и исследование операций»

MOTOR-2024

30 июня – 6 июля, 2024

Главная задача и связанные подзадачи

Главная задача

$L: Ax = b, x \geqslant 0, c^\top x \to \max, L^*: A^\top u \geqslant c, b^\top u \to \min$

Основная задача - создать решатель 1 (Р1) для системы

$$Ax = b, x \geqslant 0$$

Подзадача 1 - на основе Р1 создать Р2 для системы

$$Cx \leqslant d \to (Ax + y = d, y \geqslant 0)$$

Подзадача 2 - на основе Р1 и Р2 создать Р для системы

$$Ax = b, x \geqslant 0, A^\top u \geqslant c, c^\top x = b^\top u \to$$
$$\to (Ax = b, A^\top u + y = c, y \leqslant 0, c^\top x = b^\top u)$$

Формулы для псевдообратных матриц подзадач 1,2

$$\left[C_{m\times n} \vdots I_m\right]^+ = \left[\frac{D_n C^+_{n\times m}}{I_m - C_{m\times n} D_n C^+_{n\times m}}\right], D_n = \left(I_n + C^+_{n\times m} C^{+\top}_{m\times n}\right)^{-1},$$

$$\begin{bmatrix} A_{m\times n} \vdots 0_{m\times m} \vdots 0_{m\times n} \\ \hdashline 0_n \vdots A^\top_{n\times m} \vdots I_n \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} A^+_{n\times m} \vdots 0_n \\ \hdashline 0_{m\times m} \vdots \tilde{D}_m A^{+\top}_{m\times n} \\ \hdashline 0_{n\times m} \vdots I_n - A^\top_{n\times m} \tilde{D}_m A^{+\top}_{m\times n} \end{bmatrix}, \tilde{D}_m = \left(I_m + A^{+\top}_{m\times n} A^+_{n\times m}\right)^{-1},$$

$$\begin{bmatrix} A_{m\times n} \vdots 0_{m\times m} \vdots 0_{m\times n} \\ \hdashline 0_n \vdots A^\top_{n\times m} \vdots I_n \\ \hdashline c^\top_{1\times n} \vdots -b^\top_{1\times m} \vdots 0_{1\times n} \end{bmatrix}^+ = \left[\begin{bmatrix} A^+_{n\times m} \vdots 0_n \\ \hdashline 0_{m\times m} \vdots \tilde{D}_m A^{+\top}_{m\times n} \\ \hdashline 0_{n\times m} \vdots I_n - A^\top_{n\times m} \tilde{D}_m A^{+\top}_{m\times n} \end{bmatrix} - q d^\top \vdots q\right],$$

$$d = \left[\frac{A^{+\top}_{m\times n} c_{n\times 1}}{A^+_{n\times m} \tilde{D}_m b_{m\times 1}}\right], p = \begin{bmatrix} (I_n - A^+_{n\times m} A_{m\times n}) c_{n\times 1} \\ \hdashline (I_m - A_{m\times n} A^+_{n\times m} \tilde{D}_m) b_{m\times 1} \\ \hdashline A^+_{n\times m} \tilde{D}_m b_{m\times 1} \end{bmatrix}, q = \frac{p}{p^\top p}.$$

Литература – математический аппарат матричных выкладок

- *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – 5-е изд., – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 560 с. (Псевдообратная матрица, алгоритм Гревилля)
- *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 224 с. (Псевдообращение блочных матриц)
- *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с. (Формула Шермана-Моррисона-Вудбери)

Псевдообратная матрица. Детально: http://oml.cmlaboratory.com/pdf/2023/Erohin_VI_9mar2023.pdf

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – некоторая матрица, $\operatorname{rank} A = r \leqslant \min\{m, n\}$. *Псевдообратной* к матрице A будем называть матрицу $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$, для которой выполняются

уравнения Пенроуза:

$$AA^+A = A, \tag{1}$$

$$A^+AA^+ = A^+, \tag{2}$$

$$(AA^+)^\top = AA^+, \tag{3}$$

$$(A^+A)^\top = A^+A. \tag{4}$$

Утверждение 1. Для *любой* матрицы A псевдообратная матрица A^+ *существует* и является *единственной.*

M-фейеровские отображения: Определение

Пусть $\phi : D \to E$ – некоторое отображение (*итерационная функция*), $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq D$, $M = \{x \in D \,|\, \phi(x) = x\} \subseteq E$ – множество *неподвижных точек* отображения ϕ, $\{x^k\}$ строится по правилу

$$x^{k+1} = \phi(x^k),\ x^0 \in D,\ x^0 \notin M,\ k = 0, 1, \ldots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Отображение ϕ называется M-фейеровским, если

$$M \neq \varnothing,\ \|\phi(x) - y\| < \|x - y\|\ \ \forall y \in M, \forall (x \in D, x \notin M).$$

(в последующем тексте, в зависимости от контекста, $||\cdot||$ – евклидова векторная норма или спектральная матричная норма).

Класс M-фейеровских отображений обозначим через F_M.

M-фейеровские отображения: Базовые конструкции

1. Отображение π_L

на основе проекции точки на полупространство:
$L = \{x \,|\, l(x) = a^T x - \beta \leqslant 0\}$, $a, x \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^1$, $a \neq 0$,
$\pi_L(x) = x - \lambda \left[l(x)\right]_+ a / a^T a$, $\lambda \in (0, 2)$. ($[\cdot]_+$ – операция положительной срезки (поэлементная))

2. Отображение π_+

на основе проекции точки на $\mathbb{R}^n_+$: $\pi_+(x) = [x]_+$

3. Отображение π_X

на основе проекции точки на множество решений совместной СЛАУ: $X = \{x \,|\, Ax = b\}$, $\pi_X(x) = x + A^+ r(x)$, $r(x) = b - Ax$. (A^+ – псевдообратная матрица)

Замечание. *Несложно убедиться, что*

$\pi_+(x) \in \mathbb{R}^n_+$, $\pi_+(\pi_+(x)) = \pi_+(x)$, $\pi_X(x) \in X$, $\pi_X(\pi_X(x)) = \pi_X(x)$.

M-фейеровские отображения: Основные свойства

Свойство 1.

Пусть $\{x^k\}$ *построена с помощью* $\phi \in F_M$. *Тогда если* $\{x^k\} \bigcap M = \varnothing$, *то* $x^k \to \bar{x} \in M$, *иначе* $\exists k \in \mathbb{N} \mid x^k, x^{k+1}, \ldots \in M$.

Свойство 2.

Пусть $\phi_\lambda(x) = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)x,\ \lambda \in (0,1),\ \phi \in F_M$. *Тогда* $\phi_\lambda \in F_M$.

Свойство 3.

Пусть $\phi_j \in F_M$, $\phi(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \phi_j(x),\ \alpha_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$. *Тогда* $\phi \in F_M$.

Свойство 4.

Пусть $\phi_j \in F_{M_j}$, $\phi(x) = \phi_1(\phi_2(\ldots(\phi_m(x))\ldots))$, $M = \bigcap_{j=1}^m M_j \neq \varnothing$. *Тогда* $\phi \in F_M$.

M-фейеровское отображение для системы $Ax = b$, $x \geqslant 0$

Заметим, что из отображений π_+ и π_X может быть построено отображение

$$\tilde{\pi}_{X_+}(x) = \pi_+(\pi_X(x)) = \left[x + A^+ r(x)\right]_+,$$

которое, в силу свойства 4, является X_+-фейеровским.

X_+-фейеровское отображение $\pi_{X_+,\lambda}(x)$ (O&ML, 02.11.2023)

Пусть

$$\pi_{X,\lambda}(x)=x+\lambda A^+r(x),\ \lambda\in(0,2);\ \pi_{X_+,\lambda}(x)=|\pi_{X,\lambda}(x)|$$

($|\cdot|$ – поэлементная операция взятия абсолютной величины)

Очевидно, что отображения $\pi_{X,\lambda}$ и $\pi_{X_+,\lambda}$ непрерывны, $\pi_{X,\lambda}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Отображение $\pi_{X_+,\lambda}$ в последующих выкладках будем рассматривать как отображение из $\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}^n_+$, т.е., как инструмент порождения итерационных числовых последовательностей $\{x^k\}$ вида

$$x^{k+1}=\pi_{X_+,\lambda}(x^k)\in\mathbb{R}^n_+,\ x^0\in\mathbb{R}^n_+,\ x^0\notin X_+,\ k=0,1,\ldots$$

Заметим, что отображение $\pi_{X_+,\lambda}$ в литературе ранее не упоминалось и его свойства ранее не исследовались.

Свойства $\pi_{X_+,\lambda}(x)$ (и базы сравнения $\tilde{\pi}_{X_+,\lambda}(x) = [x + \lambda A^+ r(x)]_+$)

ЛЕММА 1. $\pi_{X,\lambda}(x) \in F_X$ **ТЕОРЕМА 1.** $\pi_{X_+,\lambda}(x) \in F_{X_+}$

ТЕОРЕМА 2. Если $X_+ \neq \varnothing$ и последовательность $\{x^k = \pi_{X_+,\lambda}(x^{k-1})\}$ является бесконечной, то $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = y \in X_+$, $\|\pi_{X_+,\lambda}(x^k) - y\| \leqslant \theta \cdot \|x^k - y\|$ $\forall y \in X_+, \forall x^k \in \mathbb{R}^n_+$, где $0 \leqslant \theta < 1$

ТЕОРЕМА 3. (Об оценке сходимости $\{x^k\}$ по сходимости $\{r(x^k)\}$)

Пусть $X_+ \neq \varnothing$ и последовательность $\{x^k\}$ является бесконечной. Тогда 1) $\|r(x^k)\| \to 0$, 2) имеет место неравенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|r(x^{k+1})\|}{\|r(x^k)\|} \leqslant \bar{\theta}\,\|A\|\,C = \bar{\bar{\theta}},$$

где $\bar{\bar{\theta}}$ – верхняя оценка константы асимптотики сходимости последовательности $\{r(x^k)\}$.

ТЕОРЕМА 4. (О сходимости $\{x^k\}$ за конечное число шагов)

Пусть $X_+ \neq \varnothing$ и последовательность $\{x^k\}$ порождается некоторым отображением $\pi_{X_+,\lambda}$, где $\lambda \in [1, 2)$. Если при этом $\pi_{X,\lambda}(x^k) \geqslant 0$ для некоторого $k \geqslant 0$, то $\pi_X(x^k) \in X_+$.

M-фейеровские отображения для системы $Ax = b$, $\underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}$

Пусть $X_{[]} = \{x \,|\, Ax = b, \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}\} \neq \varnothing$. Рассмотрим отображения $\mathbb{R} \to [\alpha, \beta]$:

$$\pi_{\alpha,\beta}(\gamma) = \begin{cases} \min\{2\alpha - \gamma, \beta\}, \gamma < \alpha \\ \gamma, \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta \\ \max\{2\beta - \gamma, \alpha\}, \gamma > \beta \end{cases}$$

(Объект исследования)

$$\tilde{\pi}_{\alpha,\beta}(\gamma) = \begin{cases} \alpha, \gamma < \alpha \\ \gamma, \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta \\ \beta, \gamma > \beta \end{cases}$$

(База сравнения)

и отображения $\mathbb{R}^n \to X_{[]}$:

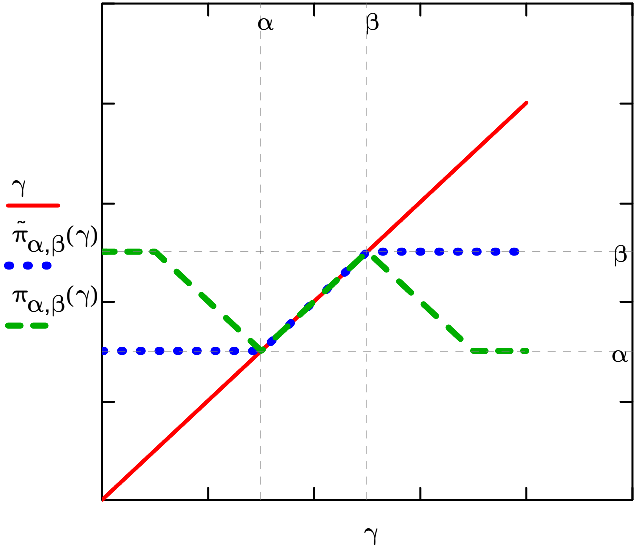
$(\forall \underline{x}, \overline{x}, x \in \mathbb{R}^n \; \pi_{\underline{x},\overline{x}}(x) = \left(\pi_{\underline{x}_i,\overline{x}_i}(x_i)\right) \in \mathbb{R}^n, \tilde{\pi}_{\underline{x},\overline{x}}(x) = \left(\tilde{\pi}_{\underline{x}_i,\overline{x}_i}(x_i)\right) \in \mathbb{R}^n)$

$$\pi_{X_{[]},\lambda}(x) = \pi_{\underline{x},\overline{x}}(\pi_{X,\lambda}(x)) = \\ = \pi_{\underline{x},\overline{x}}\left(x + \lambda A^+ r(x)\right)$$

(Объект исследования)

$$\tilde{\pi}_{X_{[]},\lambda}(x) = \tilde{\pi}_{\underline{x},\overline{x}}(\pi_{X,\lambda}(x)) = \\ = \tilde{\pi}_{\underline{x},\overline{x}}\left(x + \lambda A^+ r(x)\right)$$

(База сравнения)


α
β
γ
$\tilde{\pi}_{\alpha,\beta}(\gamma)$
$\pi_{\alpha,\beta}(\gamma)$
β
α
γ

Важный 'технический' результат

ЛЕММА 1/2. Фрагмент доказательства $\pi_{X,\lambda}(x) \in F_X$

Пусть $X \neq \varnothing$ и $x, y \in \mathbb{R}^n$ – такие, что $x \notin X$, $y \in X$. Тогда ...

$$\left\|\pi_{X,\lambda}(x) - y\right\|^2 = \left\|x - y\right\|^2 - \lambda(2-\lambda)\kappa^2,$$

где

$$0 < \kappa = \left\|A^+ A (x - y)\right\| \leqslant \|x - y\|.$$

Следствие 1.
$\forall (x \notin X, y \in X) \Rightarrow \|\pi_{X,\lambda}(x) - y\| < \|x - y\| \Leftrightarrow \pi_{X,\lambda}(x) \in F_X$.

Следствие 2. $\forall (x \notin X, y \in X) \Rightarrow \|\pi_{X,\lambda}(x) - y\| \leqslant \theta \|x - y\|$,
где $0 \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta} = \left(\frac{(1-\lambda)^2 + (C\|A\|)^2 - 1}{(C\|A\|)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, C – константа Хоффмана в неравенстве $\|x - y\| \leqslant C\|r(x)\|$.

Следствие 3.
$\forall (x \notin X, y \in X) \Rightarrow \|r(\pi_{X,\lambda}(x))\| \leqslant C\|A\|\theta\|r(x)\|$.

Обоснование отображения $\pi_{X_{[]},\lambda}(x)$

Лемма 1.
$$\forall y \in X_{[]}, \forall x \,|\underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}, r(x) \neq 0 \Rightarrow \left\|\pi_{X_{[]},\lambda}(x) - y\right\| \leqslant \left\|\pi_{X,\lambda}(x) - y\right\|.$$

Доказательство. Пусть $\underline{x} \leqslant y = \underline{x} + v = \overline{x} - w \leqslant \overline{x}$, где $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v, w \geqslant 0$.

Рассмотрим поэлементное представление отображения $\pi_{X_{[]},\lambda}(x) = \left(\left(\pi_{X_{[]},\lambda}(x)\right)_i\right)$.

Можно показать, что

$$\left(\pi_{X_{[]},\lambda}(x)\right)_i = \begin{cases} \underline{x}_i + \min\left\{\left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - \underline{x}_i\right|, \overline{x}_i - \underline{x}_i\right\} & \text{при } x_i \leqslant \frac{\underline{x}_i + \overline{x}_i}{2} \\ \overline{x}_i - \min\left\{\left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - \overline{x}_i\right|, \overline{x}_i - \underline{x}_i\right\} & \text{при } x_i > \frac{\underline{x}_i + \overline{x}_i}{2} \end{cases}$$

Следовательно, $\left|\left(\pi_{X_{[]},\lambda}(x)\right)_i - y_i\right| =$

$$= \begin{cases} \left|\min\left\{\left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - \underline{x}_i\right|, \overline{x}_i - \underline{x}_i\right\} - v_i\right| (= \sigma) & \text{при } x_i \leqslant \frac{\underline{x}_i + \overline{x}_i}{2} \\ \left|w_i - \min\left\{\left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - \overline{x}_i\right|, \overline{x}_i - \underline{x}_i\right\}\right| (= \rho) & \text{при } x_i > \frac{\underline{x}_i + \overline{x}_i}{2} \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно выражения σ и ρ:

$\sigma = \left|\min\left\{\left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - y_i + v_i\right| - v_i, \overline{x}_i - y_i\right\}\right| \leqslant \left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - y_i\right|,$

$\rho = \left|\min\left\{\left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - y_i - w_i\right| - w_i, y_i - \underline{x}_i\right\}\right| \leqslant \left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - y_i\right|$. Таким образом,

$$\left|\left(\pi_{X_{[]},\lambda}(x)\right)_i - y_i\right| \leqslant \left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - y_i\right| \overset{\text{абс. норма}}{\Rightarrow} \left\|\left(\pi_{X_{[]},\lambda}(x)\right) - y\right\| \leqslant \left\|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right) - y\right\| \blacksquare$$

Следствия. Следствия 1,2,3 применимы к отображению $\pi_{X_{[]},\lambda}(x)$.

Обоснование отображения $\tilde{\pi}_{X_{[]},\lambda}(x)$

Лемма 2.
$\forall y \in X_{[]}, \forall x \,|\underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}, r(x) \neq 0 \Rightarrow \left\|\tilde{\pi}_{X_{[]},\lambda}(x) - y\right\| < \|x - y\|.$

Доказательство. Пусть $\underline{x} \leqslant y = \underline{x} + v = \overline{x} - w \leqslant \overline{x}$, где $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v, w \geqslant 0$.

Рассмотрим поэлементное представление отображения $\tilde{\pi}_{X_{[]},\lambda}(x) = \left(\left(\tilde{\pi}_{X_{[]},\lambda}(x)\right)_i\right)$.

Можно показать, что $\left(\tilde{\pi}_{X_{[]},\lambda}(x)\right)_i = \begin{cases} \frac{\underline{x}_i + \left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - \underline{x}_i\right| + x_i}{2} & \text{при } x_i \leqslant \frac{\underline{x}_i + \overline{x}_i}{2} \\ \frac{\overline{x}_i - \left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - \overline{x}_i\right| + x_i}{2} & \text{при } x_i > \frac{\underline{x}_i + \overline{x}_i}{2} \end{cases}$

Следовательно,

$$\left|\left(\tilde{\pi}_{X_{[]},\lambda}(x)\right)_i - y_i\right| = \begin{cases} \frac{\left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - \underline{x}_i\right| - v_i + (x_i - y_i)}{2} (= \tilde{\sigma}) & \text{при } x_i \leqslant \frac{\underline{x}_i + \overline{x}_i}{2} \\ \frac{w_i - \left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - \overline{x}_i\right| + (x_i - y_i)}{2} (= \tilde{\rho}) & \text{при } x_i > \frac{\underline{x}_i + \overline{x}_i}{2} \end{cases}$$

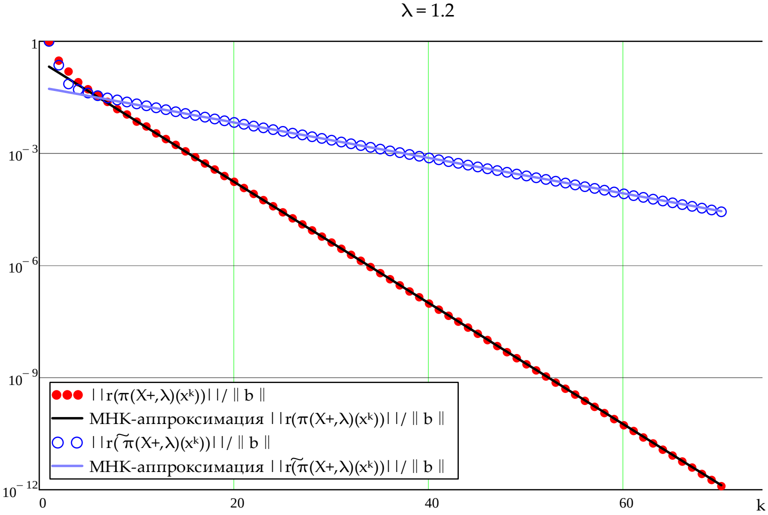
Рассмотрим отдельно выражения $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\rho}$: $\tilde{\sigma}, \tilde{\rho} \leqslant \frac{\left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - y_i\right| + |x_i - y_i|}{2}$.

Таким образом, $\left|\left(\tilde{\pi}_{X_{[]},\lambda}(x)\right)_i - y_i\right| \leqslant \frac{\left|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right)_i - y_i\right| + |x_i - y_i|}{2} \overset{\text{абс. норма}}{\Rightarrow}$

$\overset{\text{абс. норма}}{\Rightarrow} \left\|\left(\tilde{\pi}_{X_{[]},\lambda}(x)\right) - y\right\| \leqslant \frac{\left\|\left(\pi_{X,\lambda}(x)\right) - y\right\| + \|x - y\|}{2} < \|x - y\|$ ■

Следствия. Следствия 1,2,3 применимы к отображению $\tilde{\pi}_{X_{[]},\lambda}(x)$.

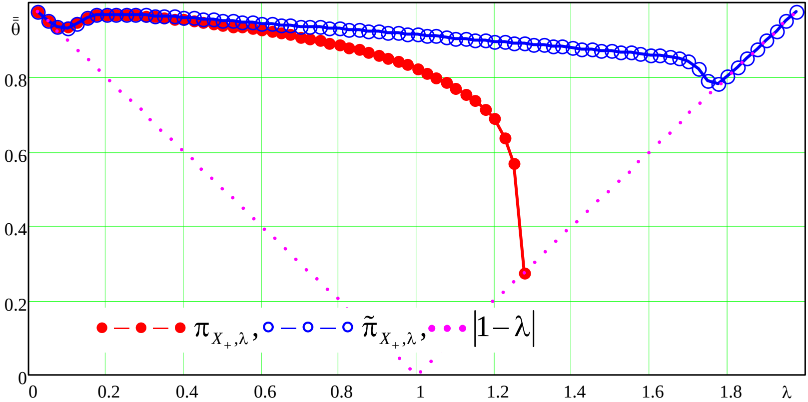
Иллюстрация методики экспериментального оценивания $\bar{\bar{\theta}}$



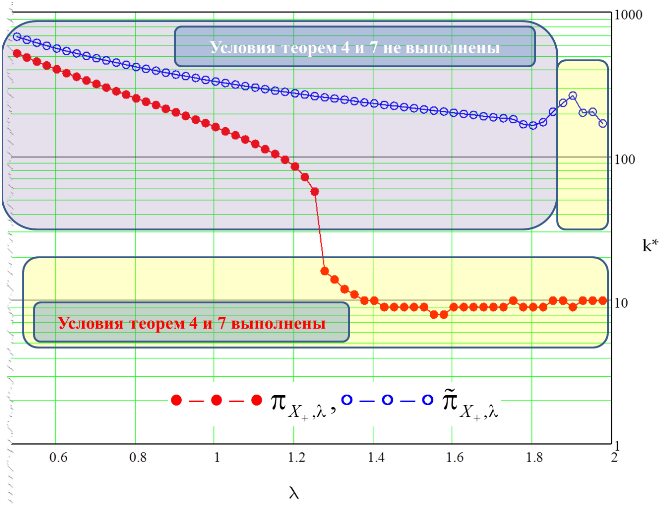
Реальный пример средней размерности: $m = 136$, $n = 285$, $\operatorname{rank} A = 136$, $X_+ \neq \varnothing$, $x^0 = 0$. Сходимость $\pi_{X_+,\lambda}$ VS $\tilde\pi_{X_+,\lambda}$

Экспериментальная оценка $\bar{\bar{\theta}}(\lambda)$ по последовательностям $\{x^k\}_\lambda$ и $\{\tilde x^k\}_\lambda$

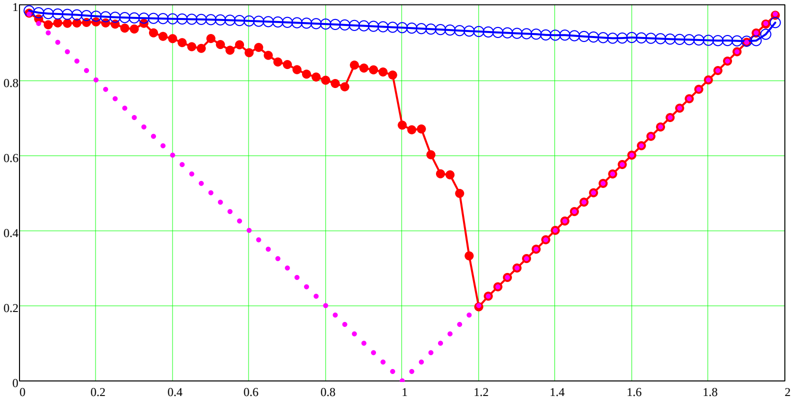
Для всех представленных на графиках данных экспериментально подтвержден первый порядок сходимости и выполнение условий $\pi_{X,\lambda}(x) \ngeqslant 0\ \forall x \in \{x^k\}$, $\tilde\pi_{X,\lambda}(\tilde x) \ngeqslant 0\ \forall \tilde x \in \{\tilde x^k\}$



Реальный пример средней размерности: $m = 136$, $n = 285$, $\operatorname{rank} A = 136$, $X_+ \neq \varnothing$, $x^0 = 0$. Число шагов k^*: $\pi_{X_+,\lambda}$ VS $\tilde\pi_{X_+,\lambda}$



Реальный пример средней размерности: $m = 136$, $n = 285$, $\operatorname{rank} A = 136$, $X_{[]} \neq \varnothing$, $x^0 = 0$. Сходимость $\pi_{X_{[]},\lambda}$ VS $\tilde{\pi}_{X_{[]},\lambda}$



Спасибо за внимание!
Вопросы?

Итерационное отображение фейеровского типа для решения системы линейных алгебраических уравнений с двухсторонними ограничениями

В.И. Ерохин

[1] Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
vka@mil.ru

Семинар по оптимизации, машинному обучению
и искусственному интеллекту «O&ML»

19 декабря 2024 г.