Быстрый фейеровский алгоритм решения системы линейных неравенств

В.И. Ерохин

[1]Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
vka@mil.ru

Семинар по оптимизации, машинному обучению
и искусственному интеллекту «O&ML»

13 марта 2025 г.

Детально о фейеровском решателе системы $Ax = b$, $x \geqslant 0$:
http://oml.cmlaboratory.com/pdf/2023/Erohin_VI_2nov2023.pdf

О фейеровском решателе для задачи $Ax = b$, $\underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}$:
http://oml.cmlaboratory.com/pdf/2024/20241219_ErohinVI_prez.pdf

О фейеровском решателе задачи ЛП $L : Ax = b, x \geqslant 0, c^\top x \to \max$, $L^* : A^\top u \geqslant c, b^\top u \to \min$

A method for solving a dual pair of linear programming problems based on the fast Fejér type algorithm for finding a nonnegative solution to a system of linear algebraic equations

В.И. Ерохин, д.ф.м.н., проф.

[1] Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
vka@mil.ru

XXIII Международная конференция
«Теория математической оптимизации и исследование операций»

MOTOR-2024

30 июня – 6 июля, 2024

Главная задача и связанные подзадачи

Главная задача

$L : Ax = b, x \geqslant 0, c^\top x \to \max, L^* : A^\top u \geqslant c, b^\top u \to \min$

Основная задача - создать решатель 1 (P1) для системы

$$Ax = b, x \geqslant 0$$

Подзадача 1 - на основе P1 создать P2 для системы

$$Cx \leqslant d \to (Ax + y = d, y \geqslant 0)$$

Подзадача 2 - на основе P1 и P2 создать P для системы

$$Ax = b, x \geqslant 0, A^\top u \geqslant c, c^\top x = b^\top u \to$$
$$\to (Ax = b, A^\top u - y = c, y \geqslant 0, c^\top x = b^\top u)$$

M-фейеровские отображения: Определение

Пусть $\phi : D \to E$ – некоторое отображение (*итерационная функция*), $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq D$, $M = \{x \in D \,|\, \phi(x) = x\} \subseteq E$ – множество *неподвижных точек* отображения ϕ, $\{x^k\}$ строится по правилу

$$x^{k+1} = \phi(x^k),\ x^0 \in D,\ x^0 \notin M,\ k = 0, 1, \ldots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Отображение ϕ называется M-фейеровским, если

$$M \neq \varnothing,\ \|\phi(x) - y\| < \|x - y\| \ \forall y \in M, \forall (x \in D, x \notin M).$$

(в последующем тексте, в зависимости от контекста, $||\cdot||$ – евклидова векторная норма или спектральная матричная норма).

Класс M-фейеровских отображений обозначим через F_M.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. 2020. том 60. № 6. с. 963–974

УДК 517.988.68

ИТЕРАЦИОННЫЕ ФЕЙЕРОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ

© 2020 г. В. В. Васин

В небольшой заметке [1] Л. Фейер сформулировал следующее определение поточечной близости точки к некоторому множеству.

Определение 1. Пусть M — замкнутое множество из R^n (или гильбертова пространства). Если для точек p и p_1 из R^n выполнено неравенство $\|p-q\| > \|p_1 - q\|$ для любого $q \in M$, то будем говорить, что p_1 поточечно ближе к M, чем p. Причем, если для p не существует точек p_1, которые поточечно ближе, чем p, тогда точку p назовем ближайшей к множеству M.

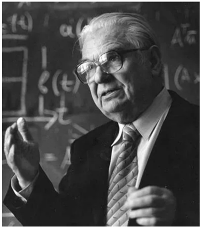
Кроме того, им было отмечено, что множество ближайших к M точек совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой $\overline{\mathrm{conv}(M)}$ множества M. Из этого факта непосредственно вытекает, что если точка p не принадлежит $\overline{\mathrm{conv}(M)}$, то можно найти точку p_1, которая поточечно ближе к множеству M, чем p.

На основе определения 1 поточечной близости точки к множеству и отмеченного геометрического факта Т. Моцкин и Дж. Шенберг [2] ввели определение монотонной фейеровской последовательности $\{x_k\}$, для которой $x_k \neq x_{k+1}$, $\|x_{k+1} - q\| \le \|x_k - q\|\ \forall q \in M$, и предложили релаксационный метод решения систем линейных неравенств. Дальнейшие исследования по методам построения фейеровских последовательностей для задач линейного и выпуклого программирования были продолжены в работах [3], [4]. И.И. Ереминым были введены более общие понятия, связанные с именем Л. Фейера: фейеровский оператор, фейеровский процесс, установлены их свойства и важные факты, которые определили широкий простор для построения итерационных фейеровских методов решения задач математического программирования в R^n, в том числе, несобственных [5], [6] (см. также [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fejér L.* Über die Lage der Nullstellen fon Polynomen, die aus Minimumforderungen gewsser Art entspringen // Math. Ann. 1922. B. 85. Nr 1. S. 41—48.
2. *Motzkin T.S., Schoenberg J.J.* The relaxation method for linear inequalities // Canad. J. Math. 1954. V. 6. № 3. P. 393—404.
3. *Agmon S.* The relaxation method for linear inequalities // Canad. J. Math. 1954. V. 6. № 3. P. 382—392.
4. *Брегман Л.М.* Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования // ДАН СССР. 1965. Т. 162. № 3. С. 487—490.
5. *Еремин И.И.* Обобщение релаксационного метода Моцкина-Агмона // Успехи матем. наук. 1965. Т. 20. Вып. 2. С. 183—187.
6. *Еремин И.И.* Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании // Матем. заметки. 1968. Т. 3. Вып. 2. С. 217—234.
7. *Vasin V.V., Eremin I.I.* Operators and iterative processes of Fejér type. Theory and applications. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2009.

Российские исследователи фейеровских отображений


Еремин Иван Иванович (1933-2013)
Академик РАН, г.н.с. отдела математического программирования УрО РАН

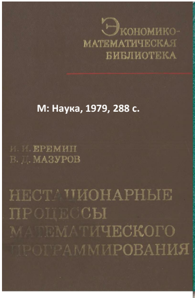

Васин Владимир Васильевич
Чл.-корр. РАН, г.н.с. отдела некорректных задач и анализа приложений УрО РАН

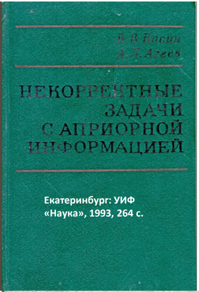

Попов Леонид Денисович
д.ф.м.н, в.н.с. отдела математического программирования УрО РАН


Соколинский Леонид Борисович
д.ф.м.н, зав. кафедрой «Системное программирование» ЮУрГУ


Соколинская Ирина Михайловна
к.ф.м.н, доцент кафедры «Математическое обеспечение информационных технологий» ЮУрГУ


Нурминский Евгений Алексеевич
д.ф.м.н, профессор департамента математического и компьютерного моделирования ДВФУ





THE RELAXATION METHOD FOR LINEAR INEQUALITIES

SHMUEL AGMON

1. Introduction. In various numerical problems one is confronted with th task of solving a system of linear inequalities:

$$l_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, \dots, m \tag{1.1}$$

assuming, of course, that the above system is consistent. Sometimes one ha in addition, to minimize a given linear form $l(x)$. Thus, in linear programmin one obtains a problem of the latter type. To cite another example, this tim from analysis, the problem of finding the polynomial of best approximation c degree less than n corresponding to a discrete function defined in N points is c the latter type. In this paper we shall be dealing only with the simpler probler of finding a solution of (1.1). Nevertheless, it is known **(7**, lectures IV and V that the more difficult problem of minimization can be reduced to a system c inequalities involving no minimization by the duality (or minimax) principl (However, this will increase considerably the number of unknowns an inequalities in the equivalent system.)

That the numerical problem of solving a system of inequalities is in genera no easy task could be inferred from the fact that even in the case of equation the numerical solution is not easy, and that many ingenious methods wer devised **(2)** in the hope of obtaining at least an approximate solution in "reasonable" number of steps. The situation is much worse in the case c inequalities. Of the existing methods one could mention the double descriptio method **(3)** and the simplex method due to Dantzig **(1)**. The eliminatio method (proposed already by Fourier) is ruled out in general due to the hug number of elementary operations involved.

We propose to discuss here an iteration procedure of finding a solution c (1.1). The idea of the algorithm involved was communicated to the author b T. S. Motzkin.[1] This method, which uses orthogonal projection, will be see later to be intimately connected with the so-called relaxation method in th case of equations **(4; 5; 6)**, and it could be considered (after a suitable trans formation) to be the extension of this method to inequalities. Even in the cas of equations it seems to us that our results are not completely devoid c interest, for we shall get a simple geometric proof for the convergence of th

Received May 27, 1953. The preparation of this paper was sponsored (in part) by the Offic of the Air Comptroller, U.S.A.F.

[1]It was through valuable conversations which the author had with T. S. Motzkin that h was led to consider the problems treated here.

382

THE RELAXATION METHOD FOR LINEAR INEQUALITIES

T. S. MOTZKIN AND I. J. SCHOENBERG

I. STATEMENT OF PROBLEM AND MAIN RESULTS

1. The relaxation method. Let A be a closed set of points in the n-dimensional euclidean space E_n. If p and p_1 are points of E_n such that

$$|p - a| > |p_1 - a|, \text{ for every } a \in A, \tag{1.1}$$

then p_1 is said to be *point-wise closer* than p to the set A. If p is such that there is no point p_1 which is point-wise closer than p to A, then p is called a *closest point* to the set A. In 1922 Fejér **(2)** made the interesting observation that the set of closest points to A is identical with the convex hull $K(A)$ of the set A. We have mentioned this remark because it will suggest a way of dealing with our main problem, to which we now turn.

We are given a consistent system of m linear inequalities

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, \dots, m). \tag{1.2}$$

The coefficients a_{ij} and b_i being given numerically, the problem is to devise a numerical procedure which will furnish a solution $(x_1, \dots, x_n)$ of the system (1.2). In the case of a homogeneous system, i.e. when all $b_i = 0$, we add the obvious requirement that the solution $(x_1, \dots, x_n)$ obtained be different from the trivial solution $(0, \dots, 0)$.

A natural approach to this problem will be suggested by Fejér's idea as soon as we place the problem in its customary geometric setting. Each of the inequalities (1.2) defines a closed half-space

$$H_i\colon \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \geqslant 0, \tag{1.3}$$

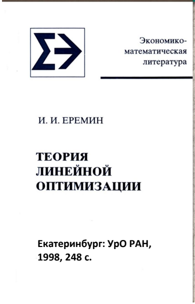
in terms of which the set of points corresponding to the solutions of (1.2) is identical with the convex polytope

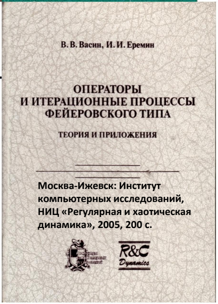
$$A = \bigcap_{i=1}^{m} H_i, \tag{1.4}$$

which is assumed from the outset not to be void. Let $p \notin A$ be given. The following simple construction furnishes a point p_1 which is point-wise closer than p to A: Clearly $p \notin H_j$ for some j. Let p' be symmetric to p with respect to the

Received May 11, 1953. Presented to the American Mathematical Society, September, 1952. This work was performed on a National Bureau of Standards contract with the University of California, Los Angeles, and was sponsored (in part) by the Office of Scientific Research, USAF.

393





1965 г. март — апрель *т. XX, вып. 2 (122)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.9

ОБОБЩЕНИЕ РЕЛАКСАЦИОННОГО МЕТОДА МОЦКИНА — АГМОНА

И. И. Еремин

В работах [1] и [2] рассмотрен релаксационный метод, позволяющий находить хотя бы одно решение совместной системы линейных неравенств

$$(c_j, x) - a_j \leqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, m), \tag{1}$$

иначе говоря, позволяющий находить точку, общую для полупространств P_j $(j = 1, 2, \dots, m)$, отвечающих неравенствам системы (1); здесь (c_j, x) — скалярное произведение векторов $c_j \in R^n$, $x \in R^n$, a_j — действительное число В основе этого метода лежит практически легко реализуемая операция проектирования на полупространства P_j. Естественно попытаться распространить его на случай системы выпуклых замкнутых множеств $M_j \subset R^n$ $(j = 1, 2, \dots, m)$, алгоритмом проектирования на которые мы располагаем. Этому вопросу и посвящена настоящая заметка. Рассматриваемая в ней процедура в разных направлениях обобщает релаксационный метод из статьи [1].

В заключительной части настоящей заметки эта процедура приспосабливается к нахождению неотрицательных решений системы неравенств

$$\varphi_j(x) \leqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, m), \tag{2}$$

в которой $\varphi_j(x)$ — вещественные непрерывные выпуклые функции, определенные на R^n.

1. Пусть M — выпуклое замкнутое множество пространства R^n и $\varrho(x, M)$ — расстояние от точки $x \in R^n$ до него. Известно, что во множестве M существует единственная точка $\pi(x, M)$ — проекция точки x на множество M, для которой

$$\varrho(x, M) = |\pi(x, M) - x|.$$

Обозначим через M^ε множество точек пространства R^n, расстояние $\varrho(x, M)$ которых до M не превосходит $\varepsilon > 0$. Множество M^ε, очевидно, замкнуто и выпукло.

Лемма 1. *Если $x \notin M^\varepsilon$, то справедливо соотношение*

$$\pi(x, M) - x = \frac{\varrho(x, M)}{\varrho(x, M) - \varepsilon}[\pi(x, M^\varepsilon) - x].$$

M-фейеровские отображения: Базовые конструкции

1. Отображение π_L

на основе проекции точки на полупространство:
$L = \{x \,|\, l(x) = a^T x - \beta \leqslant 0\}$, $a, x \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^1$, $a \neq 0$,
$\pi_L(x) = x - \lambda \,[l(x)]_+ \, a/a^T a$, $\lambda \in (0, 2)$. ($[\cdot]_+$ – операция положительной срезки (поэлементная))

2. Отображение π_+

на основе проекции точки на $\mathbb{R}^n_+$: $\pi_+(x) = [x]_+$

3. Отображение π_X

на основе проекции точки на множество решений совместной СЛАУ: $X = \{x \,|\, Ax = b\}$, $\pi_X(x) = x + A^+ r(x)$, $r(x) = b - Ax$. (A^+ – псевдообратная матрица)

Замечание. *Несложно убедиться, что*

$\pi_+(x) \in \mathbb{R}^n_+$, $\pi_+(\pi_+(x)) = \pi_+(x)$, $\pi_X(x) \in X$, $\pi_X(\pi_X(x)) = \pi_X(x)$.

M-фейеровские отображения: Основные свойства

СВОЙСТВО 1.

Пусть $\{x^k\}$ *построена с помощью* $\phi \in F_M$. *Тогда если* $\{x^k\} \bigcap M = \varnothing$, *то* $x^k \to \bar{x} \in M$, *иначе* $\exists k \in \mathbb{N} \mid x^k, x^{k+1}, \ldots \in M$.

СВОЙСТВО 2.

Пусть $\phi_\lambda(x) = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)x,\ \lambda \in (0,1),\ \phi \in F_M$. *Тогда* $\phi_\lambda \in F_M$.

СВОЙСТВО 3.

Пусть $\phi_j \in F_M$, $\phi(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j\phi_j(x),\ \alpha_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$. *Тогда* $\phi \in F_M$.

СВОЙСТВО 4.

Пусть $\phi_j \in F_{M_j}$, $\phi(x) = \phi_1(\phi_2(\ldots(\phi_m(x))\ldots))$, $M = \bigcap_{j=1}^m M_j \neq \varnothing$. *Тогда* $\phi \in F_M$.

M-фейеровское отображение для системы $Ax = b$, $x \geqslant 0$

Заметим, что из отображений π_+ и π_X может быть построено отображение

$$\tilde{\pi}_{X_+}(x) = \pi_+(\pi_X(x)) = \left[x + A^+ r(x)\right]_+,$$

которое, в силу свойства 4, является X_+-фейеровским.

Работы с $\tilde{\pi}_{X_+}(x)$: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \leqslant n$, $\operatorname{rank} A = m$, $A^+ = A^\top(AA^\top)^{-1}$

Уральское отделение Российской академии наук
Институт математики и механики

Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений — 2002. Вып. 6

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ФЕЙЕРОВСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ СИЛЬНО СТРУКТУРИРОВАННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ И УРАВНЕНИЙ *

И. И. Еремин, Л. Д. Попов

Математические структуры и моделирование
2002, вып. 9, с. 1–17 УДК 519.6

ФЕЙЕРОВСКИЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

И.И. Еремин, И.М. Соколинская

Автоматика и телемеханика, № 2, 2004

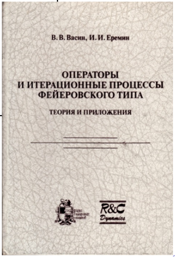
© 2004 г. Е. А. БЕРДНИКОВА, И. И. ЕРЕМИН, академик, Л. Д. ПОПОВ, д-р физ.-мат. наук
(Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург)

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ФЕЙЕРОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ И ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Экономико-математическая литература

И. И. ЕРЕМИН

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ



Известия вузов. Математика
2009, № 1, с. 44–65

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Посвящается 50-летию журнала.

И.И. ЕРЕМИН, Л.Д. ПОПОВ

ФЕЙЕРОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ТЕОРИИ И ПРАКТИКЕ: ОБЗОР ПОСЛЕДНИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

X_+-фейеровское отображение $\pi_{X_+,\lambda}(x)$ (O&ML, 02.11.2023)

Пусть

$$\pi_{X,\lambda}(x)=x+\lambda A^+r(x),\ \lambda\in(0,2);\ \pi_{X_+,\lambda}(x)=|\pi_{X,\lambda}(x)|$$

($|\cdot|$ – поэлементная операция взятия абсолютной величины)

Очевидно, что отображения $\pi_{X,\lambda}$ и $\pi_{X_+,\lambda}$ непрерывны, $\pi_{X,\lambda}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Отображение $\pi_{X_+,\lambda}$ в последующих выкладках будем рассматривать как отображение из $\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}^n_+$, т.е., как инструмент порождения итерационных числовых последовательностей $\{x^k\}$ вида

$$x^{k+1}=\pi_{X_+,\lambda}(x^k)\in\mathbb{R}^n_+,\ x^0\in\mathbb{R}^n_+,\ x^0\notin X_+,\ k=0,1,\dots$$

Заметим, что отображение $\pi_{X_+,\lambda}$в литературе ранее не упоминалось и его свойства ранее не исследовались.

Логика приближения к ЛП-решателю

Основной рабочий инструмент – решатель P1 системы $Ax = b,\ x \geqslant 0$

Для **P1** строится **вычислительная схема** (итерационное отображение фейеровского типа), выполняется ее **теоретическое обоснование** (включая оценку скорости сходимости), приводятся результаты **вычислительных экспериментов**.

Примечание: **P1** существенно использует матрицу A^{+} – псевдообратную к матрице A.

Подзадачи 1,2: (решатель P2 системы $A^{\top}u \geqslant c$ и P пары двойственных задач ЛП)

Логика построения решателя **P2** – преобразование задачи и использование алгоритма, основанного на **P1**. Основная «практическая» задача – построение экономной расчетной схемы с использованием блочного представления матрицы $\begin{bmatrix} A^{\top} & -I_m \end{bmatrix}^{+}$ и соответствующих «блочных» вычислений.

Литература – математический аппарат матричных выкладок

- *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – 5-е изд., – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 560 с. (Псевдообратная матрица, алгоритм Гревилля)
- *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 224 с. (Псевдообращение блочных матриц)
- *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с. (Формула Шермана-Моррисона-Вудбери)

Псевдобратная матрица. Детально:
http://oml.cmlaboratory.com/pdf/2023/Erohin_VI_9mar2023.pdf

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – некоторая матрица, $\operatorname{rank} A = r \leqslant \min\{m, n\}$. *Псевдообратной* к матрице A будем называть матрицу $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$, для которой выполняются

уравнения Пенроуза:

$$AA^+A = A, \tag{1}$$
$$A^+AA^+ = A^+, \tag{2}$$
$$(AA^+)^\top = AA^+, \tag{3}$$
$$(A^+A)^\top = A^+A. \tag{4}$$

Утверждение 1. Для *любой* матрицы A псевдообратная матрица A^+ *существует* и является *единственной*.

Псевдообращение блочной матрицы [Алберт А., 1977]

(4.7) Теорема.

$$(U \,\vdots\, V)^{+} = \left(\begin{array}{c} U^{+} - U^{+}VJ \\ \hdashline J \end{array}\right),$$

$$C = (I - UU^{+})V$$

$$K = \{I + [U^{+}V(I - C^{+}C)]^{\text{т}}[U^{+}V(I - C^{+}C)]\}^{-1}$$

$$J = C^{+} + (I - C^{+}C)KV^{\text{т}}(U^{+})^{\text{т}}U^{+}(I - VC^{+})$$

Действия с матрицами $\begin{bmatrix} A & \pm I_m \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A^\top & \pm I_n \end{bmatrix}$

Формулы псевдообращения

$$\begin{bmatrix} A & \pm I_m \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} DA^+ \\ \pm I_m \mp ADA^+ \end{bmatrix}, \; D = \left(I_n + A^+ A^{+\top}\right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} A^\top & \pm I_n \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} DA^{+\top} \\ \pm I_n \mp A^\top DA^{+\top} \end{bmatrix}, \; D = \left(I_m + A^{+\top} A^+\right)^{-1}$$

«Удлиненные» проекции (для $Ax \geqslant b \Leftrightarrow Ax - y = b$, $y \geqslant 0$)

$r = b - Ax + y$, $\Delta x = DA^+ r$, $\Delta y = A\Delta x - r$, $\widehat{x} = x + \lambda \Delta x$, $\widehat{y} = y + \lambda \Delta y$.

Алгоритм решения системы линейных неравенств $Ax \geqslant b$

Шаг 0.

Задать $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$, $y^0 \geqslant 0$, $0 < \lambda < 2$. Вычислить A^+, $D = \left(I_n + A^+ A^{+\top}\right)^{-1}$, $Q = DA^+$.

Шаг k $(k = 1, 2, \ldots)$.

Вычислить $r^k = b - Ax^k + y^k$, $\Delta x^k = Qr^k$, $\Delta y^k = A \Delta x^k - r^k$, $z = y^k + \Delta y^k$.

Если $z \geqslant 0$, то $x^* = x^k + \Delta x^k$ – решение системы неравенств, работу алгоритма закончить.

Положить $x^{k+1} = x^k + \lambda \Delta x^k$, $y^{k+1} = \left|y^k + \lambda \Delta y^k\right|$, $k = k + 1$, работу алгоритма продолжить ...

Спасибо за внимание!
Вопросы?