# ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ А. Н. ТИХОНОВА И ЕЁ ОБОБЩЕНИЯ*


В. Н. Малоземов
v.malozemov@spbu.ru

А. В. Петров
aleksndr19@rambler.ru


3 апреля 2025 г.


Лемма А. Н. Тихонова связана с коррекцией матрицы несовместной (противоречивой) системы линейных уравнений. В данном докладе предлагается элементарное доказательство леммы А. Н. Тихонова, опирающееся только на неравенство Коши–Буняковского для векторов и условие обращения этого неравенства в равенство. Существенно, что формула для оптимальной матрицы не «предъявляется–проверяется», а *выводится*. Рассматривается обобщение леммы А. Н. Тихонова на коррекцию матрицы несовместной системы, состоящей из двух сопряженных систем линейных уравнений. Выведены формулы для оптимальной матрицы и ее нормы.


**1°**. Рассмотрим задачу:

> *перевести ненулевой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ в вектор $b \in \mathbb{R}^m$ с помощью матрицы $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, имеющей наименьшую евклидову норму.*

Запишем эту задачу в формализованном виде:

$$\begin{gathered} \|H\|^2 := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (h_{ij})^2 \to \min, \\ Hx = b. \end{gathered} \tag{1}$$

Задача (1) имеет простое решение [1, 2].

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» http://oml.cmlaboratory.com/

**ЛЕММА 1** (А. Н. Тихонов). *Единственным решением задачи* (1) *является матрица*

$$H^* = \frac{1}{\|x\|^2} bx^T. \tag{2}$$

*При этом*

$$\|H^*\| = \frac{\|b\|}{\|x\|}. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим через $h_i$ $i$-ю строку матрицы $H$. Тогда задачу (1) можно переписать так:

$$\begin{gathered} \|H\|^2 := \sum_{i=1}^{m} \|h_i\|^2 \to \min, \\ \langle h_i, x\rangle = b_i,\ i \in 1:m. \end{gathered} \tag{4}$$

Согласно неравенству Коши—Буняковского имеем

$$|b_i| = |\langle h_i, x\rangle| \leqslant \|h_i\| \cdot \|x\|, \quad i \in 1:m.$$

Отсюда следует, что

$$\|h_i\| \geqslant \frac{|b_i|}{\|x\|}, \quad i \in 1:m. \tag{5}$$

Это неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $h_i = t_i x^T$ при некоторых $t_i \in \mathbb{R}$. Учитывая ограничения задачи (4), получаем, что $t_i = \frac{b_i}{\|x\|^2}$. Таким образом, неравенство (5) выполняется как равенство только при $h_i = h_i^* = \frac{1}{\|x\|^2} b_i x^T$, $i \in 1:m$.

Единственным решением задачи (4) является матрица $H^*$ вида (2). Для нормы этой матрицы справедлива формула (3).

Лемма доказана. □

**2°**. Предположим, что заданы ненулевые векторы $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и произвольные векторы $b \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим обобщение задачи (1):

$$\begin{gathered} \|H\|^2 := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (h_{ij})^2 \to \min, \\ Hx = b, \quad u^T H = v^T. \end{gathered} \tag{6}$$

Справедлив следующий результат [3, 4].

**ЛЕММА 2** (Обобщенная лемма А. Н. Тихонова)**.** *При выполнении условия*

$$u^T b = v^T x =: \alpha \tag{7}$$

*единственным решением задачи* (6) *будет матрица*

$$H^* = \frac{bx^T}{\|x\|^2} + \frac{uv^T}{\|u\|^2} - \frac{\alpha u x^T}{\|u\|^2 \cdot \|x\|^2}. \tag{8}$$

*При этом*

$$\|H^*\|^2 = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|u\|^2 \cdot \|x\|^2}. \tag{9}$$

Доказательство. По лемме А.Н. Тихонова задача (6) без второго ограничения имеет единственное решение

$$H_1^* = \frac{bx^T}{\|x\|^2} \quad \text{с нормой} \quad \|H_1^*\| = \frac{\|b\|}{\|x\|}. \tag{10}$$

Сделаем замену переменной $H_2 = H - H_1^*$. Задача (6) примет вид

$$\begin{gathered} \|H_2 + H_1^*\|^2 \to \min, \\ H_2 x = \mathbf{0}, \quad u^T H_2 = v^T - u^T H_1^* =: \tilde{v}^T. \end{gathered} \tag{11}$$

Как известно,

$$\|H\|^2 = \operatorname{tr}(HH^T),$$

где $\operatorname{tr}(A)$ — след квадратной матрицы $A$ (сумма диагональных элементов).

Воспользуемся формулой

$$\|H_2 + H_1^*\|^2 = \|H_2\|^2 + \|H_1^*\|^2 + 2\operatorname{tr}(H_2 (H_1^*)^T).$$

В данном случае

$$H_2 (H_1^*)^T = \frac{1}{\|x\|^2}(H_2 x) b^T = \mathbb{O},$$

так что

$$\|H_2 + H_1^*\|^2 = \|H_2\|^2 + \|H_1^*\|^2. \tag{12}$$

Запишем задачу, эквивалентную (11):

$$\begin{gathered} \|H_2\|^2 = \|H_2^T\|^2 \to \min, \\ H_2^T u = \tilde{v}, \quad x^T H_2^T = \mathbf{0}^T. \end{gathered} \tag{13}$$

По лемме А.Н. Тихонова задача (13) без второго ограничения имеет единственное решение

$$(H_2^*)^T = \frac{\tilde{v} u^T}{\|u\|^2} \quad \text{с нормой} \quad \|(H_2^*)^T\| = \frac{\|\tilde{v}\|}{\|u\|}.$$

Получили, что
$$H_2^* = \frac{u\tilde{v}^T}{\|u\|^2}, \quad \|H_2^*\| = \frac{\|\tilde{v}\|}{\|u\|}. \tag{14}$$

Отметим, что матрица $(H_2^*)^T$ удовлетворяет второму ограничению задачи (13). Действительно, в силу условия (7) имеем:

$$H_2^* x = \frac{u}{\|u\|^2}(\tilde{v}^T x) = \frac{u}{\|u\|^2}(v^T - u^T H_1^*)x =$$
$$= \frac{u}{\|u\|^2}(v^T x - u^T (H_1^* x)) = \frac{u}{\|u\|^2}(v^T x - u^T b) = \mathbf{0}\,.$$

Значит, матрица $(H_2^*)^T$ является единственным решением задачи (13), а матрица $H_2^*$ — единственным решением задачи (11). Наконец, матрица

$$H^* = H_1^* + H_2^* \tag{15}$$

будет единственным решением задачи (6).

Согласно (10) и (11) имеем

$$H^* = \frac{bx^T}{\|x\|^2} + \frac{u\tilde{v}^T}{\|u\|^2}. \tag{16}$$

Вектор $\tilde{v}^T$ появился в постановке задачи (11). Получим для него другое представление. Для этого воспользуемся формулами (10) и (7). Запишем

$$\tilde{v}^T = v^T - u^T H_1^* = v^T - \frac{(u^T b)x^T}{\|x\|^2} = v^T - \frac{\alpha x^T}{\|x\|^2}. \tag{17}$$

Второе слагаемое в правой части формулы (16) принимает вид

$$\frac{u\tilde{v}^T}{\|u\|^2} = \frac{uv^T}{\|u\|^2} - \frac{\alpha u x^T}{\|u\|^2\|x\|^2}. \tag{18}$$

Теперь формула (8) следует из (16) и (18).

Найдем квадрат нормы оптимальной матрицы $H^*$. В силу (15), (12), (10) и (14) имеем
$$\|H^*\|^2 = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|\tilde{v}\|^2}{\|u\|^2}. \tag{19}$$

Перепишем формулу (17) в виде равенства столбцов

$$\tilde{v} = v - \frac{\alpha x}{\|x\|^2}.$$

Вычислим

$$\frac{\|\tilde{v}\|^2}{\|u\|^2} = \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{2\alpha(v^T x)}{\|u\|^2\|x\|^2} + \frac{\alpha^2}{\|u\|^2\|x\|^2} = \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2}{\|u\|^2\|x\|^2}. \tag{20}$$

Теперь формула (9) следует из (19) и (20).

Лемма доказана. □

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1373–1383.

2. Малоземов В. Н., Тамасян Г. Ш. *Лемма А. Н. Тихонова и матричная коррекция* // Семинар «O & ML». Избранные доклады. 3 ноября 2022 г. (`http://oml.cmlaboratory.com/reps22.shtml#1103`)

3. Ерохин В. И. Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 587–601.

4. Ерохин В. И. *Матричная коррекция пары двойственных задач линейного программирования* // Семинар «O & ML». Избранные доклады. 6 октября 2022 г. (`http://oml.cmlaboratory.com/reps22.shtml#1006`)