

УСКОРЕННЫЙ ФЕЙЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС ПОИСКА НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

В. И. Ерохин
erohin_v_i@mail.ru

Г. Ш. Тамасян
grigoriytamasjan@mail.ru

22 мая 2025 г.

Аннотация

Работа лежит в русле исследований, основы которого были заложены и развиты в работах И.И. Еремина, В.В. Васина, Л.Д. Попова, Е.А. Бердниковой, И.М. Соколинской, А.В. Ершовой, Е.А. Нурминского и других. Основным результатом является новый вариант фейеровского отображения для нахождения неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений. Указанное отображение объединяет операцию ортогонального проектирования вектора в линейное подпространство решений системы линейных алгебраических уравнений и операцию проектирования вектора на неотрицательный ортант, но не с помощью традиционной операции положительной срезки, а с помощью поэлементной операции вычисления абсолютного значения. Доказана глобальная линейная сходимость полученного алгоритма и оценена его константа асимптотики. Вычислительные эксперименты демонстрируют значительно более быструю сходимость изученного отображения по сравнению с отображением с использованием операции положительной срезки. Представлено описание алгоритма, его теоретическое обоснование и результаты вычислительных экспериментов.

1°. Введение. Теория, методы и практические приложения линейного программирования (ЛП), начатые в новаторских работах Л.В. Канторовича, не остались в прошлом — они развиваются в наши дни, когда к многочисленным экономическим, техническим и военным приложениям присоединились задачи, связанные с проблемами создания систем искусственного интеллекта и обработки больших объемов данных. В ходе решения вышеуказанных

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML»
<http://www.apmath.spbu.ru/oml/>

задач возникает необходимость в решении задач ЛП высокой размерности (сотни тысяч, миллионы переменных и ограничений). Задачи такого масштаба не поддаются решению с помощью комбинаторных алгоритмов, таких как метод последовательного улучшения плана или симплекс-метод, и внимание исследователей обращается к методам с теоретически обоснованной полиномиальной временной сложностью (или линейной и более высокой скоростью сходимости), к которым относятся алгоритмы внутренних точек и фейеровские отображения. В данной работе мы рассматриваем важную частную задачу линейного программирования — задачу построения неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с использованием быстрого итерационного алгоритма фейеровского типа.

2°. Предистория. Рассматриваемый в настоящей работе алгоритм и соответствующее отображение фейеровского типа были открыты экспериментально при решении производственной задачи *согласования* материального баланса химического предприятия с непрерывным производственным циклом [1, 2].

Уравнения материального баланса предприятия представляют собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ax = b, \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $b \neq 0$, $m \leq n$, $1 \leq \text{rank } A \leq m$. Задача *согласования* материального баланса (в упрощенной постановке) заключается в том, чтобы найти неотрицательное решение $x \in \mathbb{R}^n$ системы (1), близкое, насколько это возможно, к заданному вектору $x^{\text{изм}} \geq 0$, составленному из *измеренных* значений массовых расходов соответствующих материальных потоков.

В качестве способа приближенного решения указанной задачи был использован итерационный алгоритм Гаусса-Ньютона [3], примененный к нелинейной системе уравнений

$$A \cdot \text{diag}(y) \cdot y = b \quad (2)$$

с начальным приближением $y^0 = ((x_1^{\text{изм}})^{1/2}, \dots, (x_n^{\text{изм}})^{1/2})^\top$. Шаг алгоритма с номером $k > 0$ имел вид

$$y^k = y^{k-1} + \frac{1}{2} \tilde{A}^+ (b - A \cdot \text{diag}(y^{k-1}) \cdot y^{k-1}), \quad (3)$$

где $\tilde{A}^+$ — матрица, псевдообратная к матрице $\tilde{A} = A \cdot \text{diag}(y^{k-1})$.

Очевидно, что если y — решение системы (2), то решение системы (1) имеет вид $x = \text{diag}(y) \cdot y \geq 0$. Выбор стартовой точки y^0 , построенной на основе $x^{\text{изм}}$, позволял получать решения, устраивающие технологов и метрологов предприятия, т. е., в некоторой степени близкие к $x^{\text{изм}}$.

Со временем, в процессе развития предприятия, увеличилось количество элементов технологической схемы, усложнилась ее топология и логика балансовых расчетов, что привело к росту размерности системы (1). При этом стали более заметными недостатки алгоритма (3), такие как *отсутствие глобальной сходимости* (приводящее к необходимости «ручной» корректировки начального приближения) и «тяжелый» (из-за наличия обязательного пересчета матрицы $\tilde{A}^+$), итерационный шаг, приводящий с ростом размерности задачи к существенному росту времени работы алгоритма.

Для преодоления второго недостатка была рассмотрена нелинейная негладкая система уравнений

$$A|x| = b,$$

где $|\cdot|$ — поэлементная операция взятия абсолютной величины, и экспериментально исследована возможность ее решения с помощью алгоритма Гаусса – Ньютона, аналогичного (3):

$$x^0 = x^{\text{изм}}; \quad x^k = x^{k-1} + \bar{A}^+ (b - A|x^{k-1}|), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $\bar{A} = A \cdot \text{diag}(s)$, $s = \text{sign}(x^{k-1})$, $\text{sign}(\cdot)$ — поэлементная операция взятия знака.

При условии, что вектор x^{k-1} не имеет нулевых элементов, трудоемкость пересчета матрицы $\bar{A}^+$ и алгоритма в целом существенно снижается по сравнению с алгоритмом (3), так как

$$\bar{A}^+ = \text{diag}(s) \cdot A^+, \quad \bar{A}^+(b - A|x^{k-1}|) = \text{diag}(s) \cdot A^+ (b - A|x^{k-1}|), \quad (5)$$

что можно легко показать с использованием, например, уравнений Мура–Пенроуза [4, 5]. Несложный анализ формул (5) показывает, что вычисление A^+ может быть выполнено не на каждом итерационном шаге, а только один раз перед началом итерационного процесса. Для оценки трудоемкости вычисления псевдообратной матрицы можно ориентироваться на оценки трудоемкости распространенных алгоритмов решения СЛАУ методом наименьших квадратов, приведенные, например, в [5, 6].

Но в общем случае вектор x^{k-1} имеет нулевые элементы и при «наивном» обнулении соответствующих элементов вектора s формулы (5) неверны. Проблемы алгоритма (4) при этом являются даже более глубокими и заключаются в том, что гарантирующие его сходимость значения соответствующих элементов вектора s неочевидны и могут быть определены только методами негладкого анализа (см., например [7, 8]). Эксперименты с их «угадыванием» не имели успеха, но привели к алгоритму (с «легким» итерационным шагом)

$$x^0 = x^{\text{изм}}; \quad x^k = |x^{k-1} + A^+(b - Ax^{k-1})|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Алгоритм (6) оказалась работоспособным и на тестовых задачах (с реальными данными) демонстрировал сходимость к решению при произвольном выборе начального приближения. Кроме того, указанный алгоритм выполнялся существенно быстрее, чем алгоритм (3), хотя затрачивал для нахождения решения большее количество шагов. При выборе $x^{\text{изм}}$ в качестве начального приближения, также, как и для алгоритма (3), получались решения, в некоторой степени близкие к $x^{\text{изм}}$ и устраивающие технологов и метрологов предприятия. Итерационный шаг алгоритма (6) оказался «легким», поскольку он не содержал операцию вычисления псевдообратной матрицы, выполняемую только один раз перед началом итерационного процесса.

Эксперименты с алгоритмом (6), в свою очередь, привели к появлению его модифицированного варианта, содержащего «параметр релаксации» $\lambda > 0$:

$$x^0 = x^{\text{изм}}; \quad x^k = |x^{k-1} + \lambda A^+(b - Ax^{k-1})|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

На тестовых задачах (с реальными данными) выбором $\lambda > 1$ удалось существенно уменьшить количество шагов алгоритма до значений, сопоставимых с количеством шагов алгоритма (3), что иллюстрирует приведенный ниже рисунок.

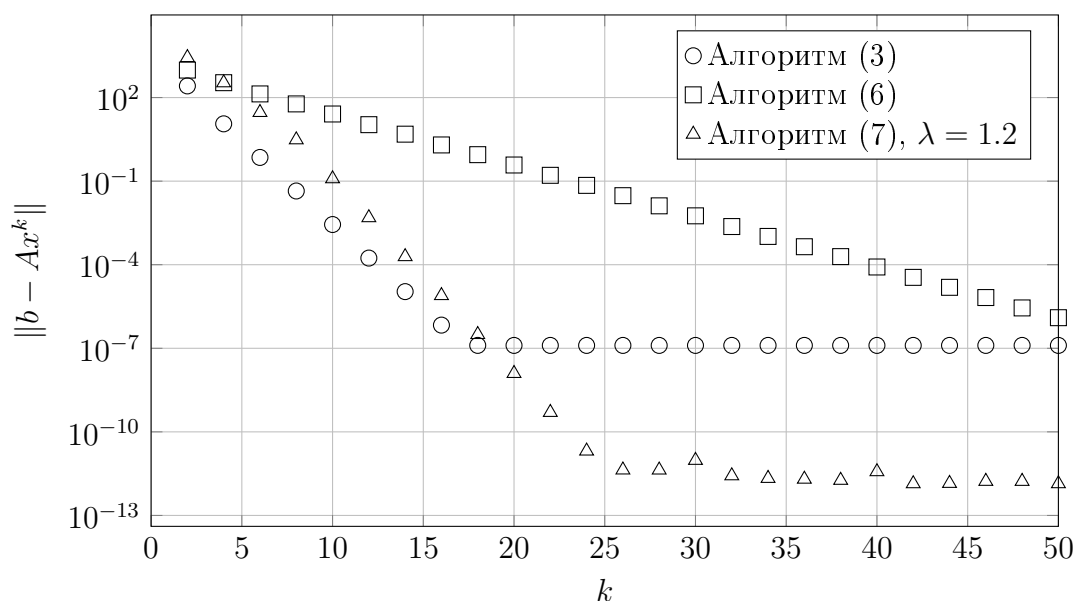


Рис. Пошаговые невязки алгоритмов (3), (6), (7) при решении задачи согласования материального баланса, содержащей 136 уравнений и 327 неизвестных

В вычислительных экспериментах алгоритм (7) также находил некоторое неотрицательное решение системы (1) при произвольно выбранном начальном приближении, однако даже при $x^0 = x^{\text{изм}}$ оно уже могло оказаться «недостаточно близким» к $x^{\text{изм}}$.

Полученные в отношении алгоритма (7) экспериментальные результаты, с одной стороны, показали его *ограниченное* соответствие конкретной практической задаче согласования материального баланса. В то же время, указанные результаты побудили провести теоретическое исследование алгоритма (необходимые и достаточные условия сходимости, локальная сходимость или глобальная, порядок сходимости и пр.), чтобы выявить, имеет ли данный алгоритм потенциал для того, чтобы служить инструментом поиска неотрицательных решений СЛАУ, востребованным как во многих прикладных задачах, так и в теории и методах линейного программирования.

Ответы на поставленные вопросы удалось найти, установив, что алгоритмы (6) и (7) принадлежат к классу так называемых *М-фейеровских* отображений.

3°. Общие сведения о фейеровских отображениях. Фейеровские отображения (интересующий нас частный случай *М-фейеровских* отображений рассматривается, начиная со следующего параграфа) являются обобщением сжимающих отображений, в котором понятие *неподвижной точки* обобщается до *множества неподвижных точек*, а понятие *сходимости к точке* обобщается до понятия *сходимости к множеству*.

Системное исследование фейеровских отображений (с введением соответствующих терминов и понятий, часть из которых, относящаяся к *М-фейеровским* отображениям и их базовым конструкциям для решения систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, приведена в следующих двух параграфах) берет свое начало с работы И.И. Еремина [9]. Историю дальнейших исследований по широкому кругу вопросов, связанных с фейеровскими процессами, можно проследить, например, по монографиям [10–14] и обзору [15]. Укажем также работы недавнего времени [16–18]. Некоторые дополнительные ссылки будут приведены в последующем тексте.

Признанными достоинствами итерационных процессов, построенных на фейеровских отображениях, являются следующие качества:

- возможность декомпозиции (решение систем уравнений, неравенств, задач ЛП и выпуклого программирования большой размерности, параллельные вычисления);
- глобальная линейная сходимость;
- устойчивость к ошибкам округления, самоисправляемость;
- возможность обработки динамических (изменяющихся во времени) данных;
- пригодность для ввода алгоритмов внутренних точек в допустимую область решаемой задачи;
- возможность адаптации к решению широкого круга задач, в том числе поиска псевдорешений несовместных систем линейных уравнений, неравенств и задач математического программирования.

Заметим, что характерной слабостью фейеровских отображений является медленная сходимость. Внимание на этом недостатке не всегда акцентируется авторами соответствующих исследований, но «между строк» (а также по времени счета и количеству итераций, приводимых в соответствующих таблицах с результатами вычислительных экспериментов) оно прослеживается в публикациях, рассматривающих вопросы построения вычислительных реализаций фейеровских итерационных процессов с использованием техники параллельных вычислений (см., например [19–24]). Преодоление указанного недостатка является (наряду с теоретическими обоснованиями) одной из задач данной работы.

M -фейеровские отображения. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi : D \rightarrow D$ — некоторое отображение. Обозначим через M множество неподвижных точек отображения φ , т. е.

$$M = \{x \in D \mid \varphi(x) = x\}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Отображение φ называется M -фейеровским, если $M \neq \emptyset$ и выполняется строгое неравенство

$$\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\| \quad \forall x \in D \setminus M, \forall y \in M. \quad (8)$$

В неравенстве (8) и далее во всем тексте статьи будем считать, что символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова векторная норма.

Класс M -фейеровских отображений обозначим через $\mathcal{F}_M$.

Рассмотрим последовательность $\{x^k\}$, которая строится по правилу

$$\begin{aligned} & \circ x^0 \in D \setminus M; \\ & \circ x^{j+1} = \varphi(x^j), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Приведем несколько свойств M -фейеровских отображений. Пусть $\{x^k\}$ построена по правилу (9) с помощью отображения $\varphi \in \mathcal{F}_M$.

Свойство 1. Если $\{x^k\} \cap M = \emptyset$, то $x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y \in M$. Иначе найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что $x^j \in M$ при всех $j \geq k$.

Свойство 2. Пусть $\lambda \in (0, 1)$. Отображение вида $\lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)x$ является M -фейеровским.

Пусть φ_j соответствующие M_j -фейеровские отображения, $j = 1 : m$, $M = \bigcap_{j=1:m} M_j \neq \emptyset$.

Свойство 3. Отображение вида

$$\varphi(x) = \sum_{j=1:m} \lambda_j \varphi_j(x) \quad \text{при } \lambda_j > 0, \quad \sum_{j=1:m} \lambda_j = 1,$$

является M -фейеровским.

Свойство 4. Отображение вида $\varphi(x) = \varphi_1(\varphi_2(\dots\varphi_m(x)\dots))$ является M -фейеровским.

Базовые конструкции M -фейеровских отображений для решения систем линейных алгебраических уравнений и неравенств. Положим $\mathbb{R}_+^n$ — неотрицательный ортант, $[x]_+ = \max\{0, x\}$ — поэлементная операция положительной срезки вектора $x \in \mathbb{R}^n$.

Приведем несколько примеров базовых отображений, используемых в дальнейшем.

Пример 1. Пусть $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ — множество решений системы линейных алгебраических уравнений непусто. Проекция произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$ на X задается отображением $\pi_X(x) = x + A^+(b - Ax)$, где A^+ (как уже указывалось выше) — псевдообратная матрица.

Пример 2. Проекция произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$ на $M = \mathbb{R}_+^n$ задается отображением «срезка» $\mathcal{C}(x) = [x]_+$. Оно принадлежит классу $\mathcal{F}_M$, т. к. является частным случаем прох-отображений (см. следствие 3.7 в монографии [13, разд. 3.3, гл. I]) и при этом

$$\mathcal{C}(x) = \operatorname{argmin}\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

Пример 3. Введем отображение $\mathcal{C}_{X_+}(x)$, как суперпозицию отображений $\mathcal{C}(x)$ и $\pi_X(x)$, а именно

$$\mathcal{C}_{X_+}(x) := \mathcal{C}(\pi_X(x)) = [x + A^+(b - Ax)]_+, \quad (10)$$

где

$$X_+ := \mathbb{R}_+^n \cap X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

В силу свойства 4 (предыдущего раздела) оно является X_+ -фейеровским.

Отображение $\mathcal{C}_{X_+}$ встречается в работах [12–15, 20–22], но не являлось предметом отдельного теоретического и экспериментального исследования. В работах, использующих отображение $\mathcal{C}_{X_+}$, предполагается, что матрица A исследуемой СЛАУ имеет полный строчный ранг, что позволяет представить псевдообратную матрицу в виде

$$A^+ = A^\top (AA^\top)^{-1}. \quad (11)$$

З а м е ч а н и е 1. Требование полноты строчного ранга матрицы A является избыточным, и в данной работе не используется. При этом следует учитывать, что в случае неполноты ранга матрицы A формула (11) неприменима, и для вычисления псевдообратной матрицы необходимо использовать более общие методы (см., например, [5, 6]).

С другими конструкциями M -фейеровских отображений можно ознакомиться в [13, § 1, гл. III]. Несложно убедиться, что приведенные выше отображения удовлетворяют условию $\pi(\pi(x)) = \pi(x)$.

4°. Два новых фейеровских отображения для поиска неотрицательного решения СЛАУ: незначительно модифицированное «классическое» (база сравнения) и «ускоренное» (основной предмет исследования). Положим $r(x) = b - Ax$, $\lambda > 0$. Рассмотрим естественную модификацию отображения (10):

$$\mathcal{C}_{X+}^{\lambda}(x) := [x + \lambda A^+ r(x)]_+. \quad (12)$$

Очевидно, что при $\lambda = 1$ получаем отображение (10). Таким образом, отображение (12) является параметризованным по λ семейством отображений. В литературе число λ называют коэффициентом релаксации.

Введем еще одно отображение

$$\mathcal{A}_{X+}^{\lambda}(x) := |x + \lambda A^+ r(x)|, \quad (13)$$

где $|\cdot|$ — поэлементная операция взятия абсолютной величины.

Далее будет показано, что отображения (12) и (13) являются X_+ -фейеровскими при $\lambda \in (0, 2)$. Отображение $\mathcal{C}_{X+}^{\lambda}$, учитывая публикации, посвященные его прототипу — отображению $\mathcal{C}_{X+}$, будем считать «классическим» и рассматривать как базу для сравнения с новым, «ускоренным» отображением $\mathcal{A}_{X+}^{\lambda}$, являющимся основным предметом исследования данной работы.

Рассмотрим вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ непусто. Отображение

$$\mathcal{P}_X^{\lambda}(x) = x + \lambda A^+ r(x)$$

является X -фейеровским при $\lambda \in (0, 2)$.

Доказательство. Надо показать справедливость неравенства (см. (8))

$$\|\mathcal{P}_X^{\lambda}(x) - y\| < \|x - y\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus X, \forall y \in X. \quad (14)$$

Зафиксируем два вектора x и y из $\mathbb{R}^n$, такие, что $x \notin X$, $y \in X$. Тогда

$$b = Ay, \quad r(x) = A(y - x). \quad (15)$$

Справедлива цепочка равенств

$$\mathcal{P}_X^{\lambda}(x) = x + \lambda A^+(b - Ax) = x + \lambda A^+ A(y - x) = y + (x - y) + \lambda A^+ A(y - x)$$

или

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X^{\lambda}(x) - y &= (x - y) + \lambda A^+ A(y - x) = (1 - \lambda)A^+ A(x - y) + (I - A^+ A)(x - y) = \\ &= (1 - \lambda)P(x - y) + Q(x - y) = (1 - \lambda)p + q. \end{aligned}$$

Здесь I — единичная матрица, P — ортогональный проектор в линейное подпространство L строк матрицы A , Q — ортогональный проектор в линейное

подпространство $L^\perp$, являющиеся ортогональным дополнением подпространства L . Поэтому для $p := P(x - y)$ и $q := Q(x - y)$ справедливо, что $p \perp q$ и в силу свойств евклидовой нормы

$$\|p\|^2 + \|q\|^2 = \|x - y\|^2. \quad (16)$$

Таким образом, имеем

$$\|\mathcal{P}_X^\lambda(x) - y\|^2 = (1 - \lambda)^2\|p\|^2 + \|q\|^2 = \|x - y\|^2 + \lambda(\lambda - 2)\|p\|^2. \quad (17)$$

Покажем, что $p \neq \mathbf{0}$ при $x \notin X$, $y \in X$. Предположим противное. Пусть $p = P(x - y) = \mathbf{0}$. Тогда, в силу (15) и равенств $AP = AA^+A = A$, имеем

$$Px = Py \Rightarrow APx = APy \Rightarrow Ax = Ay = b \Rightarrow x \in X.$$

Получили противоречие.

Теперь ясно, что в равенстве (17) при $\lambda \in (0, 2)$ второе слагаемое $\lambda(\lambda - 2)\|p\|^2 < 0$, а следовательно и справедливость неравенства (14). $\square$

Далее всюду, если не оговорено противное, предполагается, что множество $X_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq \mathbf{0}\}$ непусто.

ТЕОРЕМА 1. *Отображение $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda(x) = [x + \lambda A^+r(x)]_+$ принадлежит классу $\mathcal{F}_{X_+}$ при всех $\lambda \in (0, 2)$.*

Доказательство следует из примера 3 и леммы 1. Действительно, отображение $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$ является суперпозицией X -фейеровского отображения $\mathcal{P}_X^\lambda$ и отображения «срезка» на $\mathbb{R}_+$, а именно

$$\mathcal{C}_{X_+}^\lambda(x) = [\mathcal{P}_X^\lambda(x)]_+.$$

Теорема доказана. $\square$

Ниже будет полезен следующий результат.

ЛЕММА 2. *Справедливо неравенство*

$$\left| |\alpha + \beta| - \alpha \right| \leq |\beta| \quad \forall \alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Воспользуемся известными неравенствами

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| &\leq |\alpha| + |\beta|, \\ |\alpha + \beta| &\geq |\alpha| - |\beta|. \end{aligned}$$

Из обеих частей неравенств вычтем неотрицательное α , получим

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| - \alpha &\leq |\alpha| + |\beta| - \alpha = |\beta|, \\ |\alpha + \beta| - \alpha &\geq |\alpha| - |\beta| - \alpha = -|\beta|. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. $\square$

ТЕОРЕМА 2. *Отображение $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x) = |x + \lambda A^+ r(x)|$ принадлежит классу $\mathcal{F}_{X_+}$ при всех $\lambda \in (0, 2)$.*

Доказательство. Пусть $x \notin X_+$, $y \in X_+$. Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 1, получим

$$\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x) = |y + (x - y) + \lambda A^+ A(y - x)| = |y + (1 - \lambda)p + q|.$$

Тогда

$$|\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x) - y| = ||y + (1 - \lambda)p + q| - y|.$$

Применяя к правой части равенства результат леммы 2 и учитывая, что $y \in \mathbb{R}_+$, имеем

$$|\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x) - y| \leq |(1 - \lambda)p + q|.$$

Отметим, что это неравенство выполняется поэлементно.

Продолжая рассуждения аналогичные доказательству леммы 1, используя равенство (17) и что $p \neq \mathbf{0}$ при $x \notin X_+$, $y \in X_+$, получим

$$\|\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \lambda(\lambda - 2)\|p\|^2 < \|x - y\|^2 \quad \text{при } \lambda \in (0, 2). \quad (18)$$

Следовательно отображение $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ является X_+ -фейеровским. $\square$

5°. Алгоритм для поиска неотрицательного решения СЛАУ, основанный на отображении $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$. Перед тем, как привести рабочую схему по поиску некоторого решения системы

$$Ax = b, \quad x \geq \mathbf{0}, \quad (19)$$

опишем правило выхода из алгоритма в случае несовместности системы (19).

Нам понадобится следующий результат.

ЛЕММА 3. *Пусть $\hat{x} = A^+b$. Для некоторого $x \in \mathbb{R}$ вычислим $d = A^+(b - Ax)$. Если*

$$d \leq \mathbf{0}, \quad \hat{x}^\top d > 0, \quad (20)$$

то система (19) несовместна.

Доказательство. Для системы (19) сопоставим альтернативную

$$A^\top z \leq \mathbf{0}, \quad b^\top z > 0.$$

Воспользуемся леммой Фаркаша – Минковского (об альтернативах, [25–27]). Покажем, что при выполнении условий леммы, вектор $z_* = (A^+)^\top d$ является решением альтернативной системы. Действительно, в силу (20), имеем

$$A^\top z_* = A^\top (A^+)^\top d = (A^+ A)^\top d = A^+ A d = A^+ A A^+ (b - Ax) = A^+ (b - Ax) = d \leq \mathbf{0},$$

$$b^\top z_* = b^\top (A^+)^\top d = (A^+ b)^\top d = \hat{x}^\top d > 0.$$

Что и требовалось показать. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\hat{x} = A^+b < \mathbf{0}$, то система (19) несовместна. Действительно, достаточно заметить, что при $x = \mathbf{0}$ имеем $d = \hat{x}$.

Алгоритм (на основе отображения $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$)

И н и ц и а л и з а ц и я.

- Требуется единожды вычислить псевдообратную матрицу A^+ и вектор $\hat{x} = A^+b$. Если $\hat{x} < 0$, то система (19) несовместна. Процесс закончен.
- Фиксируем параметр $\lambda \in (0, 2)$.
- В качестве начального приближения x^0 берем произвольный вектор из $\mathbb{R}_+^n$.

О б щ и й ш а г.

1) Пусть уже имеется k -е приближение x^k .

- Вычислим $d^k = A^+(b - Ax^k)$. Если $d^k \leq \mathbf{0}$ и $\hat{x}^\top d^k > 0$, то система (19) несовместна. Процесс закончен.
- Вычислим $y^k = x^k + d^k$. Если $y^k \geq \mathbf{0}$, то система (19) имеет решение $x^* = y^k$. Процесс закончен.

2) Иначе $x^{k+1} = [x^k + \lambda d^k]$ — очередное приближение.

З а м е ч а н и е 2. По построению все приближения x^k лежат в неотрицательном ортанте.

З а м е ч а н и е 3. Вектор $y^k = x^k + d^k$ является проекцией точки x^k на множество решений системы $Ax = b$, т. е. $y^k = \pi_X(x^k)$ (см. пример 1).

З а м е ч а н и е 4. Аналогичный алгоритм справедлив и для отображения $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$. Единственное отличие в том, что очередное приближение необходимо вычислять по формуле

$$x^{k+1} = [x^k + \lambda d^k]_+.$$

6°. Теоретическое исследование сходимости отображений $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$. Покажем, что сходимость последовательностей векторов x^k , порождаемых отображениями $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$, а также сходимость норм соответствующих невязок $\|r(x^k)\|$ имеет порядок не ниже первого, и оценим соответствующие константы асимптотики. Результаты, относящиеся к сходимости числовых последовательностей $\|r(x^k)\|$ будут полезны при анализе вычислительных экспериментов, поскольку их элементы можно реально вычислить, в отличие от величин $\|\varphi(x^k) - y\|$, $\|x^k - y\|$, входящих в определение (8).

Рассмотрим при $\lambda \in (0, 2)$ отображение $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ (см. (13)) и порождаемую им последовательность x^k , задаваемую рекуррентным соотношением

$$x^{k+1} = |x^k + \lambda A^+ r(x^k)|. \quad (21)$$

Далее нам понадобится лемма Хоффмана (см. [13, 26, 27]). Приведем её для процесса (21). Пусть $S = \text{conv}\{x^k\}$. Существует константа $C > 0$ такая что,

$$|x - X_+| \leq C \|b - Ax\| \quad \text{для всех } x \in S, \quad (22)$$

где $|x - X_+| = \inf_{y \in X_+} \|x - y\|$. Отметим, что константа C зависит только от матрицы A .

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено условие (22). Тогда для последовательности x^k , порождаемой соотношением (21), выполняется оценка

$$|x^{k+1} - X_+| \leq \Theta |x^k - X_+|, \quad (23)$$

где $\Theta \in (0, 1)$ и принимает вид

$$\Theta = \left(1 + \frac{\lambda(\lambda - 2)}{C^2 \|A\|^2}\right)^{1/2}. \quad (24)$$

Доказательство. Так как отображение $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda - X_+$ -фейеровское, то в силу свойства 1, имеем $x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y \in X_+$. Из равенств (15) вытекает

$$r(x^k) = b - Ax^k = A(y - x^k) = AA^+ A(y - x^k) = AP(y - x^k) = Ap^k.$$

Откуда

$$\|p^k\| \geq \frac{\|r(x^k)\|}{\|A\|}.$$

В тоже время, из условия (22) вытекает, что

$$\|r(x^k)\| \geq \frac{|x^k - X_+|}{C}.$$

Таким образом, из последних двух неравенств, следует оценка (при любом $y \in X_+$)

$$\|p^k\| \geq \frac{|x^k - X_+|}{C\|A\|}. \quad (25)$$

Теперь можем перейти к выкладкам по установлению оценки (23). Выберем y из X_+ так, чтобы $\|x^k - y\| = \inf_{y \in X_+} \|x^k - y\| = |x^k - X_+|$. В силу (18), (25) и $\lambda \in (0, 2)$, имеем

$$\begin{aligned} |x^{k+1} - X_+|^2 &\leq \|x^{k+1} - y\|^2 \stackrel{(18)}{\leq} \|x^k - y\|^2 + \lambda(\lambda - 2)\|p^k\|^2 \stackrel{(25)}{\leq} \\ &\leq \|x^k - y\|^2 + \lambda(\lambda - 2) \frac{|x^k - X_+|^2}{C^2\|A\|^2} = |x^k - X_+|^2 + \lambda(\lambda - 2) \frac{|x^k - X_+|^2}{C^2\|A\|^2} = \\ &= \left(1 + \frac{\lambda(\lambda - 2)}{C^2\|A\|^2}\right) |x^k - X_+|^2 = \Theta^2 |x^k - X_+|^2. \end{aligned}$$

Осталось отметить, что $C\|A\| \geq 1$, а потому величина Θ из интервала $(0, 1)$. Действительно, подставив в левую часть неравенства (25) выражение $\|x^k - y\| \geq \|p^k\|$ (см. (16)), а в правую — $|x^k - X_+| = \|x^k - y\|$, получим

$$\|x^k - y\| \geq \|p^k\| \geq \frac{|x^k - X_+|}{C\|A\|} = \frac{\|x^k - y\|}{C\|A\|}. \quad (26)$$

Таким образом, отображение $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ порождает сходящийся процесс, а порядок ее сходимости — не ниже первого. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнено условие (22), последовательность x^k порождается соотношением (21). Тогда последовательность $\|r(x^k)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ и при этом справедлива оценка

$$\|r(x^{k+1})\| \leq \Theta_r \|r(x^k)\|. \quad (27)$$

Здесь константа $\Theta_r = \sqrt{C^2\|A\|^2 + \lambda(\lambda - 2)}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3, применительно к неравенству $\|r(x)\| \stackrel{(15)}{=} \|A(y - x)\| \leq \|A\| \cdot \|(y - x)\|$. $\square$

З а м е ч а н и е 5. Несложно убедиться, что константы Θ (см. (24)) и Θ_r взаимосвязаны по формуле

$$\Theta_r = C\|A\|\Theta.$$

Так как $C\|A\| \geq 1$ (см. (26)), а $\Theta \in (0, 1)$, то величина Θ_r теперь необязательно из интервала $(0, 1)$. Ясно, что константа Θ_r будет меньше 1 при конкретном $\lambda \in (0, 2)$, если только

$$C\|A\| \leq \sqrt{2 - (1 - \lambda)^2} \leq \sqrt{2}.$$

З а м е ч а н и е 6. Полученная для константы Θ оценка (24) имеет вид, очень близкий к виду оценок соответствующих констант, полученных ранее при исследовании сходимости фейеровских процессов (см., например, [12–14]).

Аналогичные теоремам 3 и 4, справедливы утверждения и для отображения

$$\mathcal{C}_{X_+}^\lambda(x) = [x + \lambda A^+ r(x)]_+.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнено условие (22). Тогда для последовательности x^k , порождаемой соотношением

$$x^{k+1} = [x^k + \lambda A^+ r(x^k)]_+, \quad (28)$$

выполняется оценка (23), с такой же константой Θ — (24).

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнено условие (22), последовательность x^k порождается соотношением (28). Тогда последовательность $\|r(x^k)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ и при этом справедлива оценка (27).

7°. Экспериментальное исследование сходимости отображений $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$. Авторами было проделано большое количество разнообразных экспериментов с совместными и несовместными системами вида (19), однако ниже будут приведены результаты решения только *совместных* систем.

Генерация тестовых задач. Для генерации совместной системы

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

осуществлялись следующие шаги:

- 1) С помощью генератора псевдослучайных чисел строилась матрица A размерности $m \times n$ и вектор $x^* \in \mathbb{R}_+^n$.
- 2) Вычисляется вектор $b = Ax^*$.

Результаты расчетов. В нижеприведенных таблицах приведены результаты расчетов для задач с количеством неизвестных $n \in \{100, 500, 750\}$ и уравнений $m = \gamma n$, $\gamma \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95\}$. В них представлено медианное значение количества итераций, требуемых алгоритмам для решения 1000 сгенерированных примеров при фиксированных n и m . В первоначальных экспериментах, в соответствии с замечанием 1, на ранг матрицы A не было наложено никаких ограничений, кроме условия $A \neq 0$. Расчеты подтвердили работоспособность исследуемых алгоритмов и справедливость установленных теоретических утверждений. Были также рассмотрены СЛАУ, не имеющие неотрицательного решения. С их помощью была экспериментально проверена справедливость леммы 3. В последующих экспериментах, результаты которых представлены ниже, матрицы всех исследуемых систем имели полный строчный ранг, СЛАУ были совместны и имели неотрицательное решение.

В качестве начального приближения всегда бралась точка $x^0 = \mathbf{0}$.

Расчеты прекращались при выполнении одного из правил останова:

- 1) $x^k \geq \mathbf{0}$; 2) $\|r(x^k)\| < \varepsilon$; 3) исчерпан лимит по итерациям (MaxIter).

Значения соответствующих параметров были приняты следующими:
MaxIter = 3000 — верхняя граница по количеству итераций, $\varepsilon = 10^{-11}$.

В таблицах *серым цветом* выделены результаты расчетов для процесса $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$.

В таблицах 1 и 2 приведены результаты расчетов при $\lambda = 1$. Из них следует, что последовательность приближений, построенная с помощью отображения $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$ сходится значительно быстрее, чем для отображения $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$.

Т а б л и ц а 1

**Медианное значение количества шагов
для процессов $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$ при $\lambda = 1$**

$n \backslash \gamma$	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
100	4	5	24	71	183	310
	26	36	64	144	357	596
500	5	6	30	94	288	580
	31	43	78	192	562	1112
750	5	6	32	99	310	673
	32	45	82	202	605	1300

Т а б л и ц а 2

**Отношение медианного значения количества шагов
для процесса $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$ к $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$ при $\lambda = 1$**

$n \backslash \gamma$	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
100	6.5	7.2	2.7	2.03	1.95	1.92
500	6.2	7.2	2.6	2.04	1.95	1.92
750	6.4	7.5	2.6	2.04	1.95	1.93

В таблицах 3–5 приведены результаты, полученные при «оптимальном» значении параметра λ . Здесь под «оптимальным» понимается такое значение, при котором итерационный процесс сходиллся за наименьшее число шагов. Поиск оптимального значения производился перебором значений параметра λ от 0 до 2 с шагом в 0.005.

Т а б л и ц а 3

Медианное значение количества шагов
для процессов $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$ при оптимальном λ

$n \backslash \gamma$	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
100	3	3	4	4	6	6
	5	12	24	59	220	271
500	4	4	4	6	11	12
	6	18	26	101	356	569
750	4	4	5	6	11	14
	6	19	33	111	375	725

Т а б л и ц а 4

Отношение медианного значения количества шагов
для процесса $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$ к $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ при оптимальном λ

$n \backslash \gamma$	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
100	1.7	4	6	15	32	45
500	1.5	4.5	6	16	34	47
750	1.5	4.8	7	19	36	52

Т а б л и ц а 5

Оптимальное значение параметра релаксации
для процессов $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$

$n \backslash \gamma$	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
100	1.1	1.17	1.25	1.55	1.725	1.8
	1.775	1.85	1.95	1.775	1.9	1.925
500	1.075	1.18	1.275	1.575	1.75	1.8
	1.725	1.85	1.975	1.8	1.925	1.95
750	1.075	1.15	1.25	1.575	1.75	1.8
	1.725	1.85	1.975	1.8	1.925	1.95

В таблице 6 представлены результаты вычислительного эксперимента по исследованию количества шагов итерационных процессов $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$ и условий их завершения в зависимости от значения параметров λ и γ при $n = 100$. Первое число в ячейке — количество шагов, а число в скобках — количество процессов, завершенных по условию $x^k \geq 0$, выраженное в процентах.

Т а б л и ц а 6

Количество шагов и процент процессов $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X_+}^\lambda$,
завершенных по условию $x^k \geq 0$

$\lambda \backslash \gamma$	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95
0.1	184 (3)	190 (0)	724 (0)	1641 (0)	2989 (0)	3000 (0)
	184 (3)	189 (0)	752 (0)	1713 (0)	3000 (0)	3000 (0)
0.2	88 (2)	90 (0)	363 (0)	828 (0)	1475 (0)	2200 (0)
	88 (2)	90 (0)	393 (0)	906 (0)	1620 (0)	2401 (0)
0.3	55 (3)	57 (0)	229 (0)	532 (0)	913 (0)	1434 (0)
	55 (3)	57 (0)	258 (0)	612 (0)	1053 (0)	1658 (0)
0.4	39 (4)	40 (0)	154 (0)	365 (0)	644 (0)	934 (0)
	39 (4)	41 (0)	186 (0)	445 (0)	775 (0)	1139 (0)
0.5	29 (2)	30 (0)	117 (0)	283 (0)	475 (0)	730 (0)
	29 (2)	34 (0)	150 (0)	365 (0)	616 (0)	931 (0)
0.6	2 (97)	23 (5)	97 (0)	207 (0)	378 (0)	570 (0)
	22 (2)	27 (0)	131 (0)	286 (0)	518 (0)	789 (0)
0.7	2 (100)	13 (56)	72 (0)	189 (0)	297 (0)	464 (0)
	17 (0)	21 (0)	105 (0)	280 (0)	442 (0)	674 (0)
0.8	2 (100)	4 (56)	60 (0)	138 (0)	232 (0)	372 (0)
	13 (3)	18 (0)	100 (0)	219 (0)	372 (0)	610 (0)
0.9	2 (100)	3 (99)	38 (0)	113 (0)	198 (0)	311 (0)
	10 (2)	14 (0)	76 (0)	205 (0)	344 (0)	541 (0)
1.0	2 (100)	3 (100)	29 (5)	88 (0)	147 (0)	254 (0)
	8 (2)	12 (0)	74 (0)	180 (0)	290 (0)	493 (0)
1.1	2 (100)	3 (100)	7 (80)	64 (0)	124 (0)	188 (0)
	8 (90)	10 (0)	65 (0)	157 (0)	276 (0)	416 (0)
1.2	2 (100)	3 (100)	5 (99)	39 (28)	87 (0)	151 (0)
	2 (100)	12 (62)	61 (0)	141 (0)	245 (0)	399 (0)
1.3	2 (100)	3 (100)	4 (100)	6 (94)	32 (49)	84 (25)
	2 (100)	3 (92)	51 (0)	135 (0)	221 (0)	350 (0)
1.4	2 (100)	3 (100)	5 (100)	6 (100)	5 (95)	4 (80)
	2 (100)	3 (100)	51 (0)	122 (0)	205 (0)	350 (0)
1.5	2 (100)	3 (100)	5 (100)	5 (100)	4 (100)	3 (100)
	2 (100)	3 (100)	43 (6)	113 (0)	202 (0)	318 (0)
1.6	2 (100)	3 (100)	4 (100)	5 (100)	4 (100)	3 (100)
	2 (100)	3 (100)	41 (23)	107 (0)	179 (0)	295 (0)
1.7	2 (100)	3 (100)	5 (100)	4 (100)	3 (100)	3 (100)
	2 (100)	3 (100)	45 (73)	91 (0)	180 (0)	277 (0)
1.8	2 (100)	3 (100)	5 (100)	4 (100)	3 (100)	3 (100)
	2 (100)	3 (100)	38 (99)	92 (7)	171 (0)	280 (0)
1.9	2 (100)	3 (100)	5 (100)	4 (100)	4 (100)	3 (100)
	2 (100)	3 (100)	35 (100)	127 (89)	185 (4)	258 (0)

Полученные данные свидетельствуют о существовании связи количества шагов и условий завершения. Наименьшее количество шагов обоих итерационных процессов наблюдается при остановке вычислений по условию $x^k \geq 0$, что очень похоже на получение решения за конечное число шагов в фейеровских процессах решения систем линейных неравенств с зеркальной релаксацией (см., например, [13]).

Зависимость исследуемых параметров от λ носит сложный характер, но можно отметить, что меньшее число шагов наблюдается вблизи оптимальных значений параметра релаксации.

С увеличением значений параметра γ возрастает количество шагов для процесса $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$, а для процесса $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$ — при значениях параметра релаксации меньших оптимального.

Область значений параметров λ и γ связанных с условием завершения $x^k \geq 0$ для процесса $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$ шире соответствующей области для процесса $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$.

В целом представленные результаты свидетельствуют о преимуществе процесса $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$ над $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$.

8°. Заключение.

- Введены новые фейеровские отображения $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$.
- Доказана линейная скорость сходимости последовательностей x^k и $\|r(x^k)\|$, порожденных фейеровскими отображениями $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$. Найдены соответствующие оценки констант асимптотики для x^k и $\|r(x^k)\|$.
- Экспериментально установлено, что количество шагов в итерационных процессах $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$ и $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$ зависит от значения параметра релаксации λ , а оптимальные значения указанного параметра для обоих процессов лежат в интервале $(1, 2)$.
- Количество итераций обоих итерационных процессов в большей степени зависит от числа линейно независимых строк матрицы A , чем от количества неизвестных.
- Количество шагов итерационного процесса, построенного на отображении $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$, существенно меньше, чем количество шагов итерационного процесса, построенного на отображении $\mathcal{C}_{X+}^\lambda$, при всех значениях параметра λ , включая «оптимальные» для каждого из процессов значения.
- Наименьшее количество шагов обоих итерационных процессов наблюдается при остановке вычислений по условию $x^k \geq 0$, что очень похоже на получение решения за конечное число шагов в фейеровских процессах решения систем линейных неравенств с зеркальной релаксацией (см., например [13]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ерохин В.И., Лаптев А.Ю., Лисицын Н.В.** Согласование материального баланса крупного нефтеперерабатывающего завода в условиях неполных данных // Изв. РАН. ТИСУ. 2010. № 2. С. 130–140.
2. **Kuzichkin N., Erohin V., Lisitsyn N.** Reconciliation of Experimental Data for Balance Calculation In Chemical-Technological Systems // Advanced Chemical Engineering Research. 2013. Vol. 2. Iss. 4. P. 98–105.
3. **Дэннис Дж., мл., Шнабель Р.** Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440 с.
4. **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с.
5. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
6. **Лоусон Ч., Хенсон Р.** Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. 232 с.
7. **Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
8. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990, 432 с.
9. **Еремин И.И.** Обобщение релаксационного метода Моцкина–Агмона // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. вып. 2. С. 183–187.
10. **Еремин И.И., Мазуров В.Д.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979. 205 с.
11. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993, 248 с.
12. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: УрО РАН, 1998. 248 с.
13. **Васин В.В., Еремин И.И.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 200 с.
14. **Еремин И.И.** Фейеровские методы для задач выпуклой и линейной оптимизации // Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009, 199 с.

15. **Еремин И.И., Попов Л.Д.** Фейеровские процессы теории и практике: обзор последних результатов // Изв. вузов. Матем. 2009. № 1. С. 44–65.
16. **Васин В.В.** Итерационные фейеровские процессы в некорректных задачах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 6. С. 963–974.
17. **Васин В.В.** Решение нелинейных обратных задач на основе регуляризованного модифицированного метода Гаусса–Ньютона // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2022. Т. 504. С. 47–50.
18. **Васин В.В.** Итерационные процессы фейеровского типа в задаче условной квадратичной минимизации // р. ИММ УрО РАН. 2023. Т. 29. № 3. С. 26–41.
19. **Бердникова Е.А., Попов Л.Д.** О применении декомпозиции при реализации фейеровских методов решения больших систем линейных неравенств на МВС-100 // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений: Сб. науч. тр. / Екатеринбург. ИММ УрО РАН. 2000. Вып. 4. С. 51–62.
20. **Еремин И.И., Попов Л.Д.** Параллельные фейеровские методы для сильно структурированных систем линейных неравенств и уравнений // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений: Сб. науч. тр. / Екатеринбург. ИММ УрО РАН. 2002. Вып. 6. С. 57–82.
21. **Еремин И.И., Соколинская И.М.** Фейеровские итерационные процессы для несобственных задач линейного программирования // Математические структуры и моделирование. 2002. Вып. 9. С. 1–17.
22. **Бердникова Е.А., Еремин И.И., Попов Л.Д.** Распределенные фейеровские процессы для систем линейных неравенств и задач линейного программирования // Автомат. и телемех. 2004. № 2. С. 16–32.
23. **Ершова А.В., Соколинская И.М.** Параллельный алгоритм решения задачи сильной отделимости на основе фейеровских отображений // Выч. мет. программирование. 2011. Т. 12. № 4. С. 423–434.
24. **Нурминский Е.А.** Фейеровские алгоритмы с адаптивным шагом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 5. С. 791–801.
25. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 3. С. 354–375.
26. **Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991. 448 с.
27. **Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.** Линейное программирование. М.: МЦНМО, 2020. 412 с.