

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ЗАДАЧЕ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ЛИНЕЙНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ*

В. Н. Малоземов

v.malozemov@spbu.ru

А. В. Петров

aleksandr19@rambler.ru

18 сентября 2025 г.

Рассматривается следующая экстремальная задача:

среди матриц, переводящих заданную точку x евклидова пространства размерности n в заданную точку b евклидова пространства размерности m , найти матрицу, имеющую наименьшую норму.

В докладе используется гёльдерова норма векторов и матриц, зависящая от параметра p . Показано, что при всех $p \in (1, +\infty)$ существует единственное решение поставленной задачи и выведена для него явная формула. Найдены пределы оптимальной матрицы при p , стремящемся к граничным значениям $p \rightarrow 1$ и $p \rightarrow +\infty$. Выяснено, что предельные матрицы являются решениями соответствующих предельных экстремальных задач. Однако, в отличие от случая $p \in (1, +\infty)$, единственность этих решений не гарантируется. В докладе дано описание всего множества решений негладких предельных задач.

1°. Постановка задачи. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ — заданные точки и $p \in (1, +\infty)$ — фиксированный параметр. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} \varphi_p(H) &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |h_{ij}|^p \rightarrow \min, \\ Hx &= b, \quad H \in \mathbb{R}^{m \times n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, требуется найти матрицу H с элементами $\{h_{ij}\}$, переводящую точку x в точку b и доставляющую минимум функционалу $\varphi_p(H)$.

Очевидно, что при $b = \mathbf{0}$ оптимальной будет нулевая матрица. В дальнейшем считаем, что $b \neq \mathbf{0}$. В этом случае и $x \neq \mathbf{0}$.

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML»
<http://oml.cmlaboratory.com/>

В данном докладе приводится в явном виде единственное решение H_p задачи (1) при всех $p \in (1, +\infty)$. Установлено, что матрица H_p имеет предел как при $p \rightarrow 1$, так и при $p \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{p \rightarrow 1} H_p = H_1, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} H_p = H_\infty.$$

При этом матрица H_1 является оптимальной для предельной задачи

$$\begin{aligned} \|H\|_1 &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |h_{ij}| \rightarrow \min, \\ Hx &= b, \quad H \in \mathbb{R}^{m \times n}, \end{aligned} \tag{2}$$

а матрица H_∞ — оптимальной для предельной задачи

$$\begin{aligned} \|H\|_\infty &:= \max_{i \in 1:m} \max_{j \in 1:n} |h_{ij}| \rightarrow \min, \\ Hx &= b, \quad H \in \mathbb{R}^{m \times n}. \end{aligned} \tag{3}$$

Оптимальные матрицы H_1, H_∞ в отличие от H_p при $p \in (1, +\infty)$ не будут, вообще говоря, единственными. В докладе дано полное описание всего множества решений как для задачи (2), так и для задачи (3).

При $p = 2$ (в случае евклидовой нормы векторов и матриц) задача (1) рассматривалась А.Н. Тихоновым [1] как вспомогательная при решении более общей задачи: как обеспечить совместность противоречивой системы линейных уравнений $Ax = b$ с помощью коррекции её матрицы (задача матричной коррекции). Наиболее полные результаты в этом направлении были получены в работе [2]. В работе [3] и более поздней работе [4] исследовался случай, когда евклидова норма заменяется нормой Гёльдера и более общими нормами.

В данном докладе приводится строгое математическое решение задачи (1) и предельных негладких задач (2) и (3). При этом использовались только элементарные методы [5].

2°. Декомпозиция задачи (1). Обозначим i -ю строку матрицы H через h_i и через $\|h_i\|_p$ — её норму Гёльдера,

$$\|h_i\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |h_{ij}|^p \right)^{1/p}.$$

Перепишем задачу (1) в терминах строк матрицы H :

$$\begin{aligned} \varphi_p(H) &:= \sum_{i=1}^m \|h_i\|_p^p \rightarrow \min, \\ \langle h_i, x \rangle &= b_i, \quad i \in 1:m. \end{aligned} \tag{4}$$

Нетрудно понять, что задача (4) распадается на m независимых подзадач относительно строк матрицы H . Частные задачи при $i \in 1 : m$ выглядят так:

$$\begin{aligned} \|h_i\|_p^p &:= \sum_{j=1}^n |h_{ij}|^p \rightarrow \min, \\ \langle x, h_i \rangle &= b_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $h_i^*, h_2^*, \dots, h_m^*$ — решения задач (5). Тогда матрица H^* , строками которой являются эти векторы, будет оптимальной для задачи (1). При этом

$$\varphi_p(H^*) = \sum_{i=1}^m \|h_i^*\|_p^p.$$

Вид целевой функции задачи (5) и тот факт, что она минимизируется, делает очевидным следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Элементы h_{ij}^* оптимальной матрицы H^* при всех $p \in (1, +\infty)$ должны удовлетворять двум условиям:*

- 1) *если $b_i = 0$, то $h_{ij}^* = 0$ при всех $j \in 1 : n$;*
- 2) *если $x_j = 0$, то $h_{ij}^* = 0$ при всех $i \in 1 : m$.*

Поясним второе условие. При $x_j = 0$ произведение $h_{ij}x_j$ равно нулю при любом h_{ij} . Но необходимость минимизировать целевую функцию оставляет для h_{ij} одну возможность $h_{ij}^* = 0$.

Замечание 1. Лемма справедлива и для предельной задачи (2), но не выполняется для предельной задачи (3).

3°. Решение задачи (1). Напомним, что на этапе предварительного анализа задачи (1) было сделано предположение о том, что вектор b , а вместе с ним и вектор x , ненулевые.

Введём параметр $q = \frac{p}{p-1}$. Очевидно, что пара параметров (p, q) удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Умножив его на q , получим эквивалентное соотношение

$$\frac{q}{p} + 1 = q.$$

ТЕОРЕМА 1. *Единственным решением задачи (1) является матрица H^* с элементами*

$$h_{ij}^* = \frac{b_i \cdot |x_j|^{q-1} \cdot \operatorname{sgn}(x_j)}{\|x\|_q^q}, \quad i \in 1 : m, \quad j \in 1 : n. \quad (6)$$

При этом

$$\varphi_p(H^*) = \frac{\|b\|_p^p}{\|x\|_q^p}. \quad (7)$$

Доказательство. По лемме формула (6) верна для пары индексов (i, j) , если $b_i = 0$ или $x_j = 0$. В этом случае обе части равенства (6) принимают нулевое значение. Обоснование требуется, когда $b_i \neq 0$ и $x_j \neq 0$.

Зафиксируем $i \in 1 : m$, при котором $b_i \neq 0$ и возьмем произвольный план h_i задачи (5). Так как $b_i \neq 0$, то вектор h_i ненулевой. Имеем

$$|b_i| = |\langle h_i, x \rangle| = \left| \sum_{j=1}^n h_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |h_{ij}| \cdot |x_j| \leq \|h_i\|_p \cdot \|x\|_q. \quad (8)$$

Последнее неравенство — это неравенство Гёльдера. Из (8) следует, что

$$\|h_i\|_p \geq \frac{|b_i|}{\|x\|_q}. \quad (9)$$

Предположим, что найдётся план h_i^* задачи (5), на котором неравенство (9) выполняется как равенство, то есть

$$\|h_i^*\|_p = \frac{|b_i|}{\|x\|_q}. \quad (10)$$

Очевидно, что h_i^* будет решением задачи (5). Выясним, какими свойствами обладает такой план h_i^* .

Так как $b_i \neq 0$, то $h_i^* \neq \mathbf{0}$.

Воспользуемся соотношениями (8) при $h_i = h_i^*$ и равенством (10). Запишем

$$|b_i| = \left| \sum_{j=1}^n h_{ij}^* x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |h_{ij}^*| \cdot |x_j| \leq \|h_i^*\|_p \cdot \|x\|_q = |b_i|.$$

Это возможно только тогда, когда

$$\left| \sum_{j=1}^n h_{ij}^* x_j \right| = \sum_{j=1}^n |h_{ij}^*| \cdot |x_j|, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n |h_{ij}^*| \cdot |x_j| = \|h_i^*\|_p \cdot \|x\|_q. \quad (12)$$

Формула (12) показывает, что неравенство Гёльдера на ненулевых векторах h_i^* и x выполняется как равенство. В таком случае, как известно [5, задача 8.22], при некотором положительном λ_i' справедливо соотношение

$$|h_{ij}^*|^p = \lambda_i' |x_j|^q, \quad j \in 1 : n.$$

Перепишем эту формулу в эквивалентном виде

$$|h_{ij}^*| = \lambda_i |x_j|^{q/p} = \lambda_i |x_j|^{q-1}, \quad j \in 1 : n, \quad (13)$$

где $\lambda_i = (\lambda_i')^{1/q} > 0$.

Носителем вектора называется множество индексов его ненулевых компонент. Обозначим носители векторов x , h_i и b через $J(x)$, $J(h_i)$ и $J(b)$ соответственно. В силу (13) и условия $\lambda_i > 0$ получаем

$$J(h_i^*) = J(x) \text{ при } i \in J(b). \quad (14)$$

Покажем, что

$$\operatorname{sgn}(h_{ij}^*) = \operatorname{sgn}(b_i) \cdot \operatorname{sgn}(x_j), \quad j \in J(x), \quad i \in J(b). \quad (15)$$

Перепишем равенство (11) в виде

$$\left| \sum_{j \in J(x)} h_{ij}^* x_j \right| = \sum_{j \in J(x)} |h_{ij}^*| \cdot |x_j|, \quad i \in J(b).$$

В силу (14) все величины, входящие в это равенство, ненулевые. Тогда необходимо

$$\operatorname{sgn}(h_{ij}^*) \cdot \operatorname{sgn}(x_j) = \varepsilon_i, \quad j \in J(x), \quad i \in J(b), \quad (16)$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$. Воспользуемся тем, что h_i^* — план задачи (5). Приняв во внимание (13), (15) и (16), запишем

$$b_i = \sum_{j \in J(x)} h_{ij}^* x_j = \sum_{j \in J(x)} |h_{ij}^*| \cdot |x_j| \cdot \operatorname{sgn}(h_{ij}^*) \cdot \operatorname{sgn}(x_j) = \varepsilon_i \lambda_i \sum_{j \in J(x)} |x_j|^q.$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(b_i)$ и

$$\lambda_i = \frac{|b_i|}{\|x\|_q^q}, \quad i \in J(b). \quad (17)$$

Теперь формулы (13) и (16) принимают вид

$$|h_{ij}^*| = \frac{|b_i| \cdot |x_j|^{q-1}}{\|x\|_q^q}, \quad \operatorname{sgn}(h_{ij}^*) = \operatorname{sgn}(b_i) \cdot \operatorname{sgn}(x_j)$$

Перемножив их, приходим к требуемой формуле (6) при $i \in J(b)$, $j \in J(x)$.

Для контроля можно непосредственно проверить, что матрица H^* с элементами вида (6) удовлетворяет ограничению задачи (5) и что справедливо равенство (10). Некоторых усилий требует проверка равенства (10). Вычислим

$$\|h_i^*\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |h_{ij}^*|^p \right)^{1/p} = \frac{|b_i|}{\|x\|_q^q} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^q \right)^{\frac{1}{q} \cdot \frac{q}{p}} = \frac{|b_i|}{\|x\|_q}.$$

Теорема доказана. □

4°. Предельная теорема при $p \rightarrow 1$. Чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1) от p , будем использовать обозначение H_p для оптимальной матрицы и $h_{ij}(p)$ — для её элементов. В теореме 1 указана формула для $h_{ij}(p)$ при $p \in (1, +\infty)$. Нас интересует поведение матрицы H_p при стремлении p к граничным значениям, $p \rightarrow 1$ и $p \rightarrow +\infty$. Начнем со случая $p \rightarrow 1$ ($q \rightarrow +\infty$).

Обозначим через $I(x)$ множество индексов максимальных по модулю компонент вектора x ,

$$I(x) = \{j \in 1 : n \mid |x_j| = \|x\|_\infty\}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Существует предел*

$$\lim_{p \rightarrow 1} H_p = H_1.$$

Элементы матрицы H_1 имеют вид:

$$h_{ij}(1) = \begin{cases} \frac{b_i \cdot \text{sgn}(x_j)}{\|x\|_\infty \cdot |I(x)|}, & i \in J(b), j \in I(x), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (18)$$

Предельная матрица H_1 является решением предельной задачи (2). При этом

$$\|H_1\|_1 = \frac{\|b\|_1}{\|x\|_\infty}. \quad (19)$$

Доказательство. По лемме $h_{ij}(1) = 0$, если $i \notin J(b)$ или $j \notin J(x)$. В дальнейшем считаем, что $i \in J(b)$ и $j \in J(x)$.

Перепишем формулу (6) в виде

$$h_{ij}(p) = \frac{b_i \cdot \text{sgn}(x_j)}{\|x\|_\infty} \cdot \left(\frac{|x_j|}{\|x\|_\infty} \right)^{q-1} \cdot \frac{\|x\|_\infty^q}{\|x\|_q^q}. \quad (20)$$

Имеем

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{\|x\|_\infty^q}{\|x\|_q^q} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{|x_j|}{\|x\|_\infty} \right)^q \right)^{-1} = \frac{1}{|I(x)|}. \quad (21)$$

Мы учли, что $\frac{|x_j|}{\|x\|_\infty} = 1$ при $j \in I(x)$ и $\frac{|x_j|}{\|x\|_\infty} < 1$ при $j \in J(x) \setminus I(x)$.

Далее,

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \left(\frac{|x_j|}{\|x\|_\infty} \right)^{q-1} = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in I(x), \\ 0 & \text{при } j \in J(x) \setminus I(x). \end{cases} \quad (22)$$

На основании (20), (21) и (22) приходим к формуле (18) при $i \in J(b)$. Отметим, что $h_{ij}(1) = 0$ при $i \in J(b)$ и $j \in J(x) \setminus I(x)$.

В качестве контроля этой формулы проверим, что матрица H_1 удовлетворяет ограничению предельной задачи (2) (хотя это очевидно, поскольку при всех

$p \in (1, +\infty)$ матрица H_p удовлетворяет такому ограничению). При $i \in 1 : m$ в силу (18) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n h_{ij}(1)x_j &= \sum_{j \in I(x)} \frac{b_i \cdot \operatorname{sgn}(x_j)}{\|x\|_\infty \cdot |I(x)|} \cdot x_j = \frac{b_i}{\|x\|_\infty} \sum_{j \in I(x)} \frac{|x_j|}{|I(x)|} = \\ &= b_i \sum_{j \in I(x)} \frac{1}{|I(x)|} = b_i. \end{aligned}$$

Вычислим значение целевой функции предельной задачи (2) на предельном плане H_1 :

$$\|H_1\|_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I(x)} \frac{|b_i|}{\|x\|_\infty \cdot |I(x)|} = \sum_{i=1}^m \frac{|b_i|}{\|x\|_\infty} \sum_{j \in I(x)} \frac{1}{|I(x)|} = \frac{\|b\|_1}{\|x\|_\infty}.$$

Тем самым, подтверждена справедливость формулы (19). Осталось доказать оптимальность матрицы H_1 .

Для произвольного плана H задачи (2) при всех $i \in 1 : m$ выполняется неравенство

$$|b_i| = \left| \sum_{j=1}^n h_{ij}x_j \right| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n |h_{ij}|.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\sum_{i=1}^m |b_i| \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |h_{ij}|.$$

Отсюда следует оценка снизу для целевой функции задачи (2):

$$\|H\|_1 \geq \frac{\|b\|_1}{\|x\|_\infty}.$$

В силу (19) на матрице H_1 нижняя оценка достигается. Значит, H_1 — решение задачи (2).

Теорема доказана. $\square$

В отличие от случая $p \in (1, +\infty)$ в предельном случае $p = 1$ единственность решения задачи (2) не гарантируется.

5°. Описание всего множества решений предельной задачи (2).
Справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы матрица H была решением задачи (2), необходимо и достаточно, чтобы её элементы h_{ij} допускали представление*

$$h_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} \frac{b_i \cdot \operatorname{sgn}(x_j)}{\|x\|_\infty}, & i \in J(b), j \in I(x), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (23)$$

где коэффициенты α_{ij} неотрицательны и

$$\sum_{j \in I(x)} \alpha_{ij} = 1 \quad \text{при всех } i \in J(b). \quad (24)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть H — оптимальная матрица. По теореме 2 её норма равна следующей величине

$$\|H\|_1 = \frac{\|b\|_1}{\|x\|_\infty}. \quad (25)$$

По определению она удовлетворяет ограничению задачи (2). По замечанию к лемме $h_{ij} = 0$, если $i \notin J(b)$ или $j \notin J(x)$. В дальнейшем считаем, что $i \in J(b)$ и $j \in J(x)$.

При $i \in J(b)$ имеем

$$|b_i| = \left| \sum_{j=1}^n h_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |h_{ij}| |x_j| \leq \left(\max_{j \in 1:n} |x_j| \right) \sum_{j=1}^n |h_{ij}|. \quad (26)$$

Сложим эти неравенства. В силу (25) получим

$$\|b\|_1 \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |h_{ij}| = \|x\|_\infty \|H\|_1 = \|b\|_1.$$

Отсюда следует, что оба неравенства в (26) выполняются как равенства. Значит,

$$\left| \sum_{j=1}^n h_{ij} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |h_{ij}| |x_j|, \quad i \in J(b), \quad (27)$$

$$\sum_{j=1}^n |h_{ij}| |x_j| = \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n |h_{ij}|, \quad i \in J(b), \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^n |h_{ij}| = \frac{|b_i|}{\|x\|_\infty}, \quad i \in J(b). \quad (29)$$

Отметим, что $|x_j| < \|x\|_\infty$ при $j \in J(x) \setminus I(x)$, поэтому при тех же j будет $h_{ij} = 0$ (иначе нарушается равенство (28)). Равенство (27) примет вид

$$\left| \sum_{j \in I(x)} h_{ij} x_j \right| = \sum_{j \in I(x)} |h_{ij}| |x_j|, \quad i \in J(b). \quad (30)$$

Введем индексные множества $J'_i = I(x) \cap J(h_i)$. Исключив из (30) нулевые h_{ij} , получим

$$\left| \sum_{j \in J'_i} h_{ij} x_j \right| = \sum_{j \in J'_i} |h_{ij}| |x_j|, \quad i \in J(b). \quad (31)$$

В равенстве (31) все величины h_{ij}, x_j ненулевые. Такое равенство возможно только тогда, когда $\operatorname{sgn}(h_{ij}) \cdot \operatorname{sgn}(x_j) = \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = \pm 1$. Запишем

$$b_i = \sum_{j \in J'_i} h_{ij} x_j = \varepsilon_i \sum_{j \in J'_i} |h_{ij}| \cdot |x_j|.$$

Теперь ясно, что $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(b_i)$ и что

$$\operatorname{sgn}(h_{ij}) = \operatorname{sgn}(b_i) \cdot \operatorname{sgn}(x_j), \quad j \in J'_i, \quad i \in J(b).$$

Приходим к формуле

$$h_{ij} = |h_{ij}| \cdot \operatorname{sgn}(b_i) \cdot \operatorname{sgn}(x_j), \quad j \in J'_i, \quad i \in J(b). \quad (32)$$

На самом деле, эта формула за счет h_{ij} справедлива при всех $j \in I(x)$, так как $h_{ij} = 0$ при $j \notin J(h_i)$.

Положим

$$\alpha_{ij} = \frac{|h_{ij}| \cdot \|x\|_\infty}{|b_i|}, \quad j \in I(x), \quad i \in J(b).$$

Перепишем формулу (32) в виде

$$h_{ij} = \frac{\alpha_{ij} |b_i|}{\|x\|_\infty} \operatorname{sgn}(b_i) \cdot \operatorname{sgn}(x_j) = \alpha_{ij} \frac{b_i \cdot \operatorname{sgn}(x_j)}{\|x\|_\infty}, \quad j \in I(x), \quad i \in J(b).$$

Формула (23) установлена.

По определению, коэффициенты α_{ij} неотрицательны. Они удовлетворяют условию (24). Действительно, при всех $i \in J(b)$ в силу (29) имеем

$$\sum_{j \in I(x)} \alpha_{ij} = \sum_{j \in I(x)} \frac{|h_{ij}| \|x\|_\infty}{|b_i|} = \frac{\|x\|_\infty}{|b_i|} \sum_{j \in I(x)} |h_{ij}| = 1.$$

Необходимость доказана.

Достаточность очевидна.

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Формула (18) для элементов оптимальной матрицы H_1 предельной задачи (2) получается из формулы (23) при

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{|I(x)|}, \quad i \in J(b), \quad j \in I(x).$$

6°. Предельная теорема при $p \rightarrow +\infty$. Напомним, что предельная задача при $p = +\infty$ имеет вид (3).

ТЕОРЕМА 4. *Существует предел*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} H_p = H_\infty.$$

Элементы матрицы H_∞ определяются формулой

$$h_{ij}(\infty) = \frac{b_i \cdot \operatorname{sgn}(x_j)}{\|x\|_1}, \quad i \in 1:m, \quad j \in 1:n. \quad (33)$$

Предельная матрица H_∞ является решением предельной задачи (3). При этом

$$\|H_\infty\|_\infty = \frac{\|b\|_\infty}{\|x\|_1}. \quad (34)$$

Доказательство. Очевидно, что $q \rightarrow 1$ при $p \rightarrow +\infty$.

Формула (33) при $i \in J(b)$ и $j \in J(x)$ получается из (6) в результате предельного перехода при $q \rightarrow 1$. Нужно учесть, что

$$\lim_{q \rightarrow 1} |x_j|^{q-1} = 1, \quad \text{если } j \in J(x),$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} \|x\|_q^q = \lim_{q \rightarrow 1} \left(\sum_{j \in J(x)} |x_j|^q \right) = \sum_{j \in J(x)} |x_j| = \|x\|_1.$$

В случае $i \notin J(b)$ или $j \notin J(x)$ обе части в формуле (33) равны нулю. Для правой части это очевидно (напомним, что $\operatorname{sgn}(0) = 0$). По лемме на указанных индексах $h_{ij}(p) = 0$ при всех $p \in (1, +\infty)$. Значит, и предельное значение $h_{ij}(\infty)$ равно нулю.

Проверим оптимальность матрицы H_∞ . Прежде всего отметим, что она удовлетворяет ограничению задачи (3). Действительно,

$$\sum_{j=1}^n h_{ij}(\infty) x_j = \sum_{j=1}^n \frac{b_i \cdot \operatorname{sgn}(x_j)}{\|x\|_1} \cdot x_j = \frac{b_i}{\|x\|_1} \sum_{j=1}^n |x_j| = b_i, \quad i \in 1:m.$$

Вычислим норму матрицы H_∞ :

$$\|H_\infty\|_\infty = \max_{i \in 1:m} \max_{j \in 1:n} |h_{ij}(\infty)| = \max_{i \in 1:m} \left(|b_i| \cdot \max_{j \in 1:n} \frac{1}{\|x\|_1} \right) = \frac{\|b\|_\infty}{\|x\|_1}.$$

Для произвольного плана H задачи (3) имеем

$$|b_i| = \left| \sum_{j=1}^n h_{ij} x_j \right| \leq \left(\max_{j \in 1:n} |h_{ij}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j| = \left(\max_{j \in 1:n} |h_{ij}| \right) \cdot \|x\|_1,$$

так что

$$\max_{j \in 1:n} |h_{ij}| \geq \frac{|b_i|}{\|x\|_1}, \quad i \in 1:m.$$

Отсюда следует, что

$$\|H\|_\infty = \max_{i \in 1:m} \max_{j \in 1:n} |h_{ij}| \geq \frac{\|b\|_\infty}{\|x\|_1}.$$

На плане H_∞ это неравенство выполняется как равенство. Значит, H_∞ — оптимальная матрица.

Теорема доказана. $\square$

7°. Описание всего множества решений предельной задачи (3).

Решение H_* задачи (3), найденное в предыдущем разделе, не является, вообще говоря, единственным.

ТЕОРЕМА 5. Для того чтобы матрица H с элементами h_{ij} была решением задачи (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) при $i \in I(b)$, $j \in J(x)$:

$$h_{ij} = \frac{b_i \cdot \operatorname{sgn}(x_j)}{\|x\|_1};$$

2) при $i \notin I(b)$, $j \in J(x)$:

$$\begin{cases} \sum_{j \in J(x)} h_{ij} x_j = b_i, \\ |h_{ij}| \leq \frac{\|b\|_\infty}{\|x\|_1}; \end{cases}$$

3) при $i \in 1:m$, $j \notin J(x)$: $|h_{ij}| \leq \frac{\|b\|_\infty}{\|x\|_1}.$

Доказательство. Необходимость. Пусть H — оптимальная матрица. По теореме 4,

$$\|H\|_\infty = \frac{\|b\|_\infty}{\|x\|_1}. \quad (35)$$

Так как H удовлетворяет ограничению задачи (3) и для её нормы справедливо равенство (35), то при $i \in I(b)$ имеем

$$\begin{aligned} \|b\|_\infty = |b_i| &= \left| \sum_{j \in J(x)} h_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j \in J(x)} |h_{ij}| \cdot |x_j| \leq \\ &\leq \left(\max_{j \in J(x)} |h_{ij}| \right) \sum_{j \in J(x)} |x_j| \leq \left(\max_{i \in I(b)} \max_{j \in J(x)} |h_{ij}| \right) \cdot \|x\|_1 \leq \\ &\leq \|H\|_\infty \cdot \|x\|_1 = \|b\|_\infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что все неравенства из данной цепочки выполняются как равенства. В результате получаем

$$\left| \sum_{j \in J(x)} h_{ij} x_j \right| = \sum_{j \in J(x)} |h_{ij}| \cdot |x_j|, \quad i \in I(b), \quad (36)$$

$$\sum_{j \in J(x)} |h_{ij}| \cdot |x_j| = \left(\max_{j \in J(x)} |h_{ij}| \right) \sum_{j \in J(x)} |x_j|, \quad i \in I(b), \quad (37)$$

$$\max_{j \in J(x)} |h_{ij}| = \|H\|_\infty, \quad i \in I(b). \quad (38)$$

Равенство (37) возможно только тогда, когда все величины $|h_{ij}|$ при $j \in J(x)$ равны между собой. С учётом (38) заключаем, что

$$|h_{ij}| = \|H\|_\infty = \frac{|b_i|}{\|x\|_1}, \quad i \in I(b), \quad j \in J(x). \quad (39)$$

Далее, все величины h_{ij}, x_j , входящие в равенство (36), отличны от нуля, поэтому необходимо

$$\operatorname{sgn}(h_{ij}) \cdot \operatorname{sgn}(x_j) = \varepsilon_i, \quad i \in I(b), \quad j \in J(x),$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$. Воспользуемся тем, что матрица H удовлетворяет ограничению задачи (3). Запишем

$$b_i = \sum_{j \in J(x)} h_{ij} x_j = \varepsilon_i \sum_{j \in J(x)} |h_{ij}| \cdot |x_j|, \quad i \in I(b).$$

Очевидно, что $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(b_i)$. Значит,

$$\operatorname{sgn}(h_{ij}) = \operatorname{sgn}(b_i) \cdot \operatorname{sgn}(x_j), \quad i \in I(b), \quad j \in J(x). \quad (40)$$

Перемножив равенства (39), (40), приходим к условию 1) из формулировки теоремы. Условие 2) следует из того, что H удовлетворяет ограничению задачи (3), условие 3) связано с равенством (35).

Необходимость доказана.

Достаточность. Условия 1)–3) гарантируют, что матрица H является планом задачи (3), и что для её нормы справедлива формула (35). С учётом теоремы 4 это характеризует матрицу H как оптимальную.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 3. Выяснилось, что у всех оптимальных матриц задачи (3) элементы h_{ij} с индексами $i \in I(b)$, $j \in J(x)$ имеют одинаковое по модулю значение, равное минимальному значению целевой функции (см. (39)). Альтернативная картина (чередование знаков элементов h_{ij}) определяется формулой (40).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений. // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1373–1383.
2. Горелик В.А., Ерохин В.А. Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы // Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2004. 193 с.
3. Горелик В.А., Ерохин В.А., Печенкин Р.В. Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений // Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2006. 153 с.
4. Волков В.В., Ерохин В.И., Какаев В.В., Онуфрей А.Ю. Обобщения регуляризованного метода наименьших квадратов Тихонова на векторные нормы, отличные от евклидовой // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 9. С. 1433–1443.
5. Малоземов В.Н., Машарский С.М. Элементарные методы в экстремальных задачах. СПб: Лань, 2022. 171 с.