ОБОБЩЕНИЕ МДМ–МЕТОДА*

Г. Ш. Тамасян

g.tamasyan@ya.ru

2 октября 2025 г.

1°. Результаты доклада основаны на работах [1–3].

В пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы $s \geqslant 2$ конечных множества

$$P_k = \left\{A_{k1}, \ldots, A_{kd_k}\right\}, \quad k \in 1:s,$$

где $A_{kj} \in \mathbb{R}^n$ — элементы соответствующих множеств, $d_k \geqslant 1$. Обозначим через C_k выпуклую оболочку множества P_k, $k \in 1:s$. Рассмотрим выпуклое множество C равное сумме по Минковскому множеств C_k, $k \in 1:s$.

Требуется решить экстремальную задачу

$$\tfrac{1}{2}\left\|v\right\|^2 \to \min_{v \in C}. \tag{1}$$

Очевидно, что задача (1) имеет единственное решение v^*.

По определению выпуклой оболочки точка $v_k \in C_k$, $k \in 1:s$, допускает представление

$$v_k = \sum_{j=1}^{d_k} A_{kj}\lambda_{kj}, \tag{2}$$

где

$$\sum_{j=1}^{d_k} \lambda_{kj} = 1, \quad \lambda_{kj} \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad j \in 1:d_k. \tag{3}$$

Введем обозначения $d = \sum\limits_{k=1}^{s} d_k$,

$$\begin{aligned}
&A_k = \left[A_{k1}, \ldots, A_{kd_k}\right] \quad \text{— матрица } n \times d_k,\\
&A = \left[A_1, \ldots, A_s\right] \quad \text{— матрица } n \times d,\\
&\lambda^T = (\lambda_1^T, \ldots, \lambda_s^T) = (\underbrace{\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1d_1}}_{\lambda_1^T}, \ldots, \underbrace{\lambda_{s1}, \ldots, \lambda_{sd_s}}_{\lambda_s^T}) \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» `http://www.apmath.spbu.ru/oml/`

Тогда для любого плана v задачи (1) справедлива формула

$$v = \sum_{k=1}^{s} v_k = \sum_{k=1}^{s} A_k \lambda_k = A\lambda.$$

Здесь вектор λ удовлетворяет условиям (3). Множество таких векторов обозначим через Λ, т. е.

$$\Lambda = \Big\{ \lambda \in \mathbb{R}^d \;\Big|\; \sum_{j=1}^{d_k} \lambda_{kj} = 1, \quad \lambda_{kj} \geqslant 0, \quad k \in 1:s,\ j \in 1:d_k \Big\}.$$

Задачу (1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\,\|v\|^2 \to \min, \\ v = A\lambda, \quad \lambda \in \Lambda. \end{gathered} \tag{4}$$

Отметим одно свойство планов задачи (4).

ЛЕММА 1. *Пусть v^* — решение задачи* (4). *Для любого плана v этой задачи справедливо неравенство*

$$\langle v, v^* \rangle \geqslant \langle v^*, v^* \rangle. \tag{5}$$

2°. Наша цель — распространить МДМ-метод на решение задачи (4).

Проведем предварительный анализ ситуации. Пусть $v = A\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. При $k \in 1:s$ введем индексные множества

$$M_k^+(\lambda) = \big\{ j \in 1:d_k \mid \lambda_{kj} > 0 \big\}$$

и величины

$$\Delta_k(\lambda) = \max_{j \in M_k^+(\lambda)} \langle A_{kj}, v \rangle - \min_{j \in 1:d_k} \langle A_{kj}, v \rangle.$$

Положим

$$\Delta(\lambda) = \max_{k \in 1:s} \Delta_k(\lambda). \tag{6}$$

Очевидно, что для каждого $k \in 1:s$ имеем $\Delta_k(\lambda) \geqslant 0$, а следовательно

$$\Delta(\lambda) \geqslant 0 \quad \forall\, \lambda \in \Lambda. \tag{7}$$

ЛЕММА 2. *Возьмем произвольный план $v = A\lambda$ задачи* (4) *и её оптимальный план $v^* = A\lambda^*$. Справедливо неравенство*

$$\|v - v^*\|^2 \leqslant s\Delta(\lambda) \quad \forall\, \lambda \in \Lambda. \tag{8}$$

Доказательство. С учетом (5), (2), (3) и (6) получим

$$\|v-v^*\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, v^*\rangle + \|v^*\|^2 \overset{(5)}{\leqslant} \|v\|^2 - \langle v, v^*\rangle =$$

$$= \langle v, \sum_{k=1}^{s} A_k\lambda_k\rangle - \langle v, \sum_{k=1}^{s} A_k\lambda_k^*\rangle = \sum_{k=1}^{s}\Big[\langle v, A_k\lambda_k\rangle - \langle v, A_k\lambda_k^*\rangle\Big] \overset{(2)}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{s}\Big[\langle v, \sum_{j=1}^{d_k} A_{kj}\lambda_{kj}\rangle - \langle v, \sum_{j=1}^{d_k} A_{kj}\lambda_{kj}^*\rangle\Big] =$$

$$= \sum_{k=1}^{s}\Big[\sum_{j=1}^{d_k}\lambda_{kj}\langle v, A_{kj}\rangle - \sum_{j=1}^{d_k}\lambda_{kj}^*\langle v, A_{kj}\rangle\Big] \overset{(3)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{s}\Big[\max_{j\in M_k^+(\lambda)}\langle v, A_{kj}\rangle - \min_{j\in 1:d_k}\langle v, A_{kj}\rangle\Big] = \sum_{k=1}^{s}\Delta_k(\lambda) \overset{(6)}{\leqslant} s\Delta(\lambda).$$

Лемма доказана. □

ТЕОРЕМА 1. *Равенство* $\Delta(\lambda) = 0$ *выполняется тогда и только тогда, когда вектор* $v = A\lambda$ *является решением задачи* (4).

Доказательство. Ясно, что неравенство (8) гарантирует оптимальность вектора v при $\Delta(\lambda) = 0$.

Проверим справедливость обратного утверждения. Возьмём решение $v^* = A\lambda^*$ задачи (4) и покажем, что $\Delta(\lambda^*) = 0$. Напомним, что

$$v^* = \sum_{k=1}^{s} v_k^* = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{d_k} A_{kj}\lambda_{kj}^*,$$

где $v_k^* \in C_k$, а коэффициенты λ_{kj}^* удовлетворяют условиям (3).

Не умаляя общности будем считать, что на плане λ^* максимум в (6) достигается на индексе $\mathbf{k} \in 1:s$, т. е.

$$\Delta(\lambda^*) = \Delta_{\mathbf{k}}(\lambda^*) = \max_{j\in M_{\mathbf{k}}^+(\lambda^*)}\langle v^*, A_{\mathbf{k}j}\rangle - \min_{j\in 1:d_{\mathbf{k}}}\langle v^*, A_{\mathbf{k}j}\rangle.$$

Пусть индексы $j'_{\mathbf{k}} \in M_{\mathbf{k}}^+(\lambda^*)$ и $j''_{\mathbf{k}} \in 1:d_{\mathbf{k}}$ такие, что

$$\Delta(\lambda^*) = \langle v^*, A_{\mathbf{k}j'_{\mathbf{k}}} - A_{\mathbf{k}j''_{\mathbf{k}}}\rangle. \tag{9}$$

Введем вектор

$$\widetilde{v}_{\mathbf{k}}^* = v_{\mathbf{k}}^* - \lambda_{\mathbf{k}j'_{\mathbf{k}}}^*\big(A_{\mathbf{k}j'_{\mathbf{k}}} - A_{\mathbf{k}j''_{\mathbf{k}}}\big).$$

Очевидно, что $\widetilde{v}^*_{\mathbf{k}} \in C_{\mathbf{k}}$. Обозначим

$$\widetilde{v}^* = \widetilde{v}^*_{\mathbf{k}} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq \mathbf{k}}}^{s} v^*_i = v^* - \lambda^*_{\mathbf{k}j'_{\mathbf{k}}}\big(A_{\mathbf{k}j'_{\mathbf{k}}} - A_{\mathbf{k}j''_{\mathbf{k}}}\big).$$

Умножим $\widetilde{v}^*$ скалярно на v^*. С учетом (9) получим

$$\langle \widetilde{v}^*, v^*\rangle = \langle v^*, v^*\rangle - \lambda^*_{\mathbf{k}j'_{\mathbf{k}}}\Delta(\lambda^*).$$

Согласно лемме 1 справедливо неравенство $\langle \widetilde{v}^*, v^*\rangle \geqslant \langle v^*, v^*\rangle$, поэтому

$$-\lambda^*_{\mathbf{k}j'_{\mathbf{k}}}\Delta(\lambda^*) \geqslant 0.$$

Условие $j'_{\mathbf{k}} \in M^+_{\mathbf{k}}(\lambda^*)$ гарантирует, что $\lambda^*_{\mathbf{k}j'_{\mathbf{k}}} > 0$. Приходим к неравенству $\Delta(\lambda^*) \leqslant 0$, которое вместе с обратным неравенством $\Delta(\lambda^*) \geqslant 0$ (см. (7)) обеспечивает равенство $\Delta(\lambda^*) = 0$.

Теорема доказана. □

3°. Обратимся к описанию обобщенного МДМ-метода.

Возьмем начальное приближение $v^0 = A\lambda^0$, $\lambda^0 \in \Lambda$. Если $\Delta(\lambda^0) = 0$, то по теореме 1 вектор v^0 является решением задачи (4). В противном случае переходим к следующей итерации.

Пусть уже имеется ℓ-е приближение $v^\ell = A\lambda^\ell$, $\lambda^\ell \in \Lambda$. Опишем переход к $v^{\ell+1}$. Для каждого $k \in 1:s$ найдем индексы $j'_k \in M^+_k(\lambda^\ell)$, $j''_k \in 1:d_k$, такие, что

$$\max_{j\in M^+_k(\lambda^\ell)} \langle A_{kj}, v^\ell\rangle = \langle A_{kj'_k}, v^\ell\rangle, \qquad \min_{j\in 1:d_k} \langle A_{kj}, v^\ell\rangle = \langle A_{kj''_k}, v^\ell\rangle.$$

Вычислим $\Delta(\lambda^\ell) = \max\{\Delta_1(v^\ell), \ldots, \Delta_s(v^\ell)\}$, где

$$\Delta_k(\lambda^\ell) = \langle v^\ell, A_{kj'_k} - A_{kj''_k}\rangle, \quad k \in 1:s. \tag{10}$$

Не умаляя общности рассмотрим случай, когда $\Delta(\lambda^\ell) = \Delta_k(\lambda^\ell)$. Далее индекс k считаем фиксированным.

Если $\Delta(\lambda^\ell) = 0$, то v^ℓ — решение задачи (4). Процесс закончен.

Пусть $\Delta(\lambda^\ell) > 0$. Запишем $v^\ell = \sum\limits_{i=1}^{s} v^\ell_i$, где $v^\ell_i \in C_i$, $i \in 1:s$. Введем вектор

$$\widehat{v}^\ell_k = v^\ell_k - \lambda^\ell_{kj'_k}\big(A_{kj'_k} - A_{kj''_k}\big).$$

Ясно, что $\widehat{v}^\ell_k \in C_k$. Рассмотрим отрезок

$$v^\ell_k(t) = v^\ell_k + t\big(\widehat{v}^\ell_k - v^\ell_k\big) = v^\ell_k - t\lambda^\ell_{kj'_k}\big(A_{kj'_k} - A_{kj''_k}\big), \quad t \in [0,1].$$

В силу выпуклости множества C_k все точки $v_k^\ell(t)$ при $t \in [0,1]$ принадлежат C_k. Обозначим

$$v^\ell(t) = v_k^\ell(t) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{s} v_i^\ell = v^\ell - t\lambda_{kj'_k}^\ell \big(A_{kj'_k} - A_{kj''_k}\big). \tag{11}$$

При всех $t \in [0,1]$ вектор $v^\ell(t)$ является планом задачи (4). Выберем $t_\ell \in [0,1]$ из условия

$$\left\|v^\ell(t_\ell)\right\|^2 = \min_{t\in[0,1]} \left\|v^\ell(t)\right\|^2.$$

Положим $v^{\ell+1} = v^\ell(t_\ell)$.

Нетрудно понять, учитывая (11), что при $j \in 1:d_k$ справедливо представление

$$\lambda_{kj}^{\ell+1} = \begin{cases} \lambda_{kj}^\ell, & \text{если } j \neq j'_k \text{ и } j \neq j''_k,\\ (1-t_\ell)\lambda_{kj'_k}^\ell, & \text{если } j = j'_k,\\ \lambda_{kj''_k}^\ell + t_\ell\,\lambda_{kj'_k}^\ell, & \text{если } j = j''_k. \end{cases}$$

При этом $\lambda_{ij}^{\ell+1} = \lambda_{ij}^\ell$, если $i \in \{1:s\}\backslash\{k\}$, $j \in 1:d_i$.

Для t_ℓ можно указать явную формулу. В силу (11) и (10) имеем

$$\begin{aligned}\|v^\ell(t)\|^2 &= \|v^\ell\|^2 - 2\,t\lambda_{kj'_k}^\ell \langle A_{kj'_k} - A_{kj''_k}, v^\ell\rangle + t^2(\lambda_{kj'_k}^\ell)^2\|A_{kj'_k} - A_{kj''_k}\|^2 =\\ &= \|v^\ell\|^2 - 2\,t\lambda_{kj'_k}^\ell \Delta(\lambda^\ell) + t^2(\lambda_{kj'_k}^\ell)^2\|A_{kj'_k} - A_{kj''_k}\|^2.\end{aligned}$$

Абсолютный минимум $\|v^\ell(t)\|^2$ на $\mathbb{R}$ достигается в точке

$$\widehat{t_\ell} = \frac{\Delta(\lambda^\ell)}{\lambda_{kj'_k}^\ell \|A_{kj'_k} - A_{kj''_k}\|^2}\,.$$

Ясно, что $\widehat{t_\ell} > 0$, поэтому для точки минимума на $[0,1]$ справедлива формула

$$t_\ell = \min\{1, \widehat{t_\ell}\}.$$

Описание обобщенного МДМ-метода завершено.

Если $t_\ell = 1$, то итерацию с номером ℓ будем называть *усеченной*, если $t_\ell = \widehat{t_\ell} < 1$, то *неусеченной*.

Таким образом, метод заключается в построении двух последовательностей точек $v^\ell \in C$ и $\lambda^\ell \in \Lambda$ до тех пор, пока $\Delta(\lambda^\ell)$ не станет равной нулю (или достаточно малой).

Отметим, что МДМ-метод имеет линейную скорость сходимости [5].

Приведем две рабочие схемы (экстремального и циклического проектирования) предлагаемого метода.

Рабочая схема № 1 (экстремального проектирования)

О б щ и й ш а г. Пусть уже имеется ℓ-е приближение $v^\ell = A\lambda^\ell$.

1) Для каждого $k \in 1:s$ находим индексы $j'_k \in M_k^+(\lambda^\ell)$, $j''_k \in 1:d_k$, такие, что

$$\max_{j \in M_k^+(\lambda^\ell)} \langle A_{kj}, v^\ell \rangle = \langle A_{kj'_k}, v^\ell \rangle =: \overline{\delta}_k, \qquad \min_{j \in 1:d_k} \langle A_{kj}, v^\ell \rangle = \langle A_{kj''_k}, v^\ell \rangle =: \underline{\delta}_k.$$

2) Вычисляем $\Delta(\lambda^\ell) = \max\limits_{k \in 1:s} \Delta_k(\lambda^\ell)$, где $\Delta_k(\lambda^\ell) = \overline{\delta}_k - \underline{\delta}_k$.

3) Если $\Delta(\lambda^\ell) = 0$, то процесс закончен и v^ℓ — решение задачи (4).

4) Пусть при некотором $\mathbf{k} \in 1:s$ имеем $\Delta(\lambda^\ell) = \Delta_{\mathbf{k}}(\lambda^\ell) > 0$. Вычисляем

$$t_\ell^* = \min \left\{ \lambda^\ell_{\mathbf{k}j'_{\mathbf{k}}}, \frac{\Delta(\lambda^\ell)}{\|A_{\mathbf{k}j'_{\mathbf{k}}} - A_{\mathbf{k}j''_{\mathbf{k}}}\|^2} \right\}.$$

5) Получаем очередное приближение

$$v^{\ell+1} = v^\ell - t_\ell^* \big(A_{\mathbf{k}j'_{\mathbf{k}}} - A_{\mathbf{k}j''_{\mathbf{k}}} \big). \tag{12}$$

6) Коэффициенты вектора $\lambda^{\ell+1}$ пересчитываем по правилам:

$$\lambda_{ij}^{\ell+1} = \begin{cases} \lambda^\ell_{\mathbf{k}j'_{\mathbf{k}}} - t_\ell^*, & \text{при } i = \mathbf{k},\ j = j'_{\mathbf{k}}, \\ \lambda^\ell_{\mathbf{k}j''_{\mathbf{k}}} + t_\ell^*, & \text{при } i = \mathbf{k},\ j = j''_{\mathbf{k}}, \\ \lambda^\ell_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{13}$$

З а м е ч а н и е 1. Возможность независимого вычисления $\Delta_k(\lambda)$, $k \in 1:s$ существенно ускоряет процесс поиска $\Delta(\lambda)$ при больших значениях s.

З а м е ч а н и е 2. Очередное приближение вектора $\lambda^{\ell+1}$ отличается от предыдущего λ^ℓ всего двумя компонентами (см. (13)), а вектор $v^{\ell+1}$ целесообразно вычислять по формуле (12), нежели по определению $v^{\ell+1} = A\lambda^{\ell+1}$.

З а м е ч а н и е 3. Названия обеих схем (экстремального и циклического проектирования) взято по аналогии из названий конструкций фейеровских отображений [4, с. 110].

Рабочая схема № 2 (циклического проектирования)

О б щ и й ш а г. Пусть уже имеется ℓ-е приближение $v^\ell = A\lambda^\ell$.

1) Последовательно для каждого $k = 1 : s$ производим:

- Находим индексы $j'_k \in M_k^+(\lambda^\ell)$, $j''_k \in 1 : d_k$, такие, что

$$\max_{j \in M_k^+(\lambda^\ell)} \langle A_{kj}, v^\ell \rangle = \langle A_{kj'_k}, v^\ell \rangle =: \overline{\delta}_k, \qquad \min_{j \in 1:d_k} \langle A_{kj}, v^\ell \rangle = \langle A_{kj''_k}, v^\ell \rangle =: \underline{\delta}_k.$$

- Вычисляем $\Delta_k(\lambda^\ell) = \overline{\delta}_k - \underline{\delta}_k$.
- Если $\Delta_k(\lambda^\ell) = 0$, то переходим к очередному k.
- Если $\Delta_k(\lambda^\ell) > 0$, то переопределяем

$$v^\ell := v^\ell - t^* \big(A_{kj'_k} - A_{kj''_k} \big),$$

где $t^* = \min \left\{ \lambda^\ell_{kj'_k}, \frac{\Delta_k(\lambda^\ell)}{\|A_{kj'_k} - A_{kj''_k}\|^2} \right\}$.

- Коэффициенты вектора λ^ℓ пересчитываем по правилам:

$$\lambda^\ell_{kj} := \begin{cases} \lambda^\ell_{kj'_k} - t^*_\ell, & \text{при } j = j'_k, \\ \lambda^\ell_{kj''_k} + t^*_\ell, & \text{при } j = j''_k, \\ \lambda^\ell_{kj}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2) Вычисляем $\Delta(\lambda^\ell) = \max\limits_{k \in 1:s} \Delta_k(\lambda^\ell)$.

3) Если $\Delta(\lambda^\ell) = 0$, то процесс закончен и v^ℓ — решение задачи (4).

4) Если $\Delta(\lambda^\ell) > 0$, то полагаем $v^{\ell+1} = v^\ell$, $\lambda^{\ell+1} = \lambda^\ell$.

З а м е ч а н и е 4. Для рабочей схемы № 2 также справедливо замечание 2.

З а м е ч а н и е 5. Окончание вычислений в рабочей схеме № 2 можно немного оптимизировать. А именно, достаточно, чтобы s раз подряд обращалась в ноль оценка плана Δ_k, т. е. либо $\Delta_j(\lambda^\ell) = 0$ при всех $j = 1 : s$, а значит v^ℓ решение задачи (4); либо найдется такой индекс $j \in 2 : s$, при котором

$$\begin{aligned} &\Delta_k(\lambda^\ell) > 0 \quad \text{при} \;\; k = j - 1, \\ &\Delta_k(\lambda^\ell) = 0 \quad \text{при} \;\; k = j : s, \\ &\Delta_k(\lambda^{\ell+1}) = 0 \quad \text{при} \;\; k = 1 : (j-1), \end{aligned}$$

а тогда $v^{\ell+1} = v^\ell$ — искомое решение задачи (4).

З а м е ч а н и е 6. В рабочей схеме № 2 последовательность вычислений частных оценок Δ_k можно изменять.

З а м е ч а н и е 7. Обе рабочие схемы без существенных доработок функционирует при динамическом изменении как количества множеств C_k, так и количества элементов в их составе, т. е. при изменениях s и d_k.

4°. Вычислительные эксперименты. Известно, что в численных алгоритмах недифференцируемой оптимизации (см., например, [6–8]) задача поиска направления спуска одна из основных и трудоемких. Эта проблема сводится к поиску проекции начала координат на определенное выпуклое множество (субдифференциал, гиподифференциал). Поэтому для генерации набора множеств P_k, $k \in 1:s$, участвующих в образовании множества C (см. (1)) исследуем негладкую оптимизационную задачу.

Рассмотрим задачу ℓ_1-оптимизации:

$$f(x) := \sum_{k=1}^{s} \big|f_k(x)\big| \longrightarrow \min_{x\in\mathbb{R}^n}, \tag{14}$$

где $f_k(x) = x^T a_k - b_k$, $a_k \in \mathbb{R}^n$, $b_k \in \mathbb{R}$, $k \in 1:s$, заданы. Целевая функция задачи (14) является гиподифференцируемой [9], и при этом, её гиподифференциал принимает интересуемый нас вид (подробнее, см. [10]):

$$\mathsf{d}f(x) = \sum_{k=1}^{s} \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} -a_k \\ -f_k(x) - \big|f_k(x)\big| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_k \\ f_k(x) - \big|f_k(x)\big| \end{pmatrix} \right\}. \tag{15}$$

Таким образом, в обозначениях основной задачи (1) имеем, что множеству C соответствует $\mathsf{d}f(x)$ и оно получается в результате суммирования (по Минковскому) отрезков $C_k = \operatorname{conv} P_k$ (см., правую часть (15)).

Тестирование предлагаемых рабочих схем будем проводить на конечном итерационном методе глобального гиподифференциального спуска [11]. Опишем её принципиальную схему.

Пусть уже имеется $x^{(\ell)} \in \mathbb{R}^n$. Переход от ℓ-го приближения к $(\ell+1)$-му осуществляется следующим образом ($\ell \geqslant 0$):

1) **Вычислим направление спуска и величину шага**:

$$(v_\ell, \alpha_\ell) = \arg\min \big\{ \|v\|^2 + \alpha^2 \;\big|\; (v,\alpha) \in df\big(x^{(\ell)}\big) \big\}. \tag{16}$$

Если $\|(v_\ell, \alpha_\ell)\| = 0$, то $x^{(\ell)}$ — решение задачи. Иначе $\alpha_\ell < 0$ и переходим к следующему шагу.

2) **Очередное приближение**: $x^{(\ell+1)} = x^{(\ell)} + \frac{v_\ell}{\alpha_\ell}$.

Таким образом, на каждом этапе решается только одна задача (16), а именно, поиск проекции начала координат на множество вида (15), которое изменяется от итерации к итерации.

В связи с тем, что правила останова обеих схем различаются, то для корректного их сравнения поступим следующим образом. Обозначим через v^* «эталонное» решение задачи (16), которое было получено, например, методами квадратичного программирования [9]. Тогда, в процессе вычислений, будем замерять затрачиваемое время каждой схемой для сходимости к определенной окрестности точки v^*.

В таблице приведены результаты численного эксперимента для задачи (14) с количеством неизвестных n равном 10, 100, 500 и слагаемых s равном 100, 500, 1000 и 1500.

Эксперименты проводились в среде MATLAB®, версия R2022b. Характеристики компьютера: процессор Intel® Core™ i5-10400F CPU (2.90 GHz, 6 ядер, 12 потоков), оперативная память — 16 ГБ. Операционная система — Майкрософт® Windows® 10, версия 21H2.

Таблица

Отношение медианного значения времени решения задачи схемой № 1 к схеме № 2

n \ s	100	500	1000	1500
10	4.7	8.2	10.6	11.1
100	5.6	8.7	9.1	10.7
500	1.5	1.7	1.8	1.9

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы. Вторая схема (циклического проектирования) более предпочтительна (в разы быстрее сходится) при увеличении количества слагаемых s, но при фиксированной размерности n. Однако, указанное превосходство сокращается с увеличением размерности задачи. Также следует не забывать, что для первой схемы (экстремального проектирования) возможно существенное ускорение при использовании технологий распараллеливания (см. замечание 1), которые не применялись в данных вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В. Н. *МДМ-методу — 50 лет* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 10 ноября 2021 г. (`http://cnsa.cmlaboratory.com/reps21.shtml#1110`)

2. Малоземов В. Н., Соловьева Н. А. МДМ-метод для решения общей квадратичной задачи математической диагностики // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, 10:3 (2023), 516–529.

3. Малоземов В. Н., Соловьева Н. А. *МДМ-метод для решения общей квадратичной задачи математической диагностики* // Семинар «O & ML». Избранные доклады. 1 июня 2022 г. (`http://oml.cmlaboratory.com/reps22.shtml#0601`)

4. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 200 с.

5. Соловьева Н. А. *Линейная скорость сходимости МДМ-метода* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 29 сентября 2016 г. (`http://cnsa.cmlaboratory.com/reps16.shtml#0929`)

6. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. *Недифференцируемая оптимизация.* М.: Наука, 1981. 384 с.

7. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* М.: Наука, 1990. 432 с.

8. Малоземов В. Н., Тамасян Г. Ш. *О направлении наискорейшего спуска* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 489–501. (`https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.406`)

9. Полякова Л. Н. *Непрерывные методы безусловной минимизации гиподифференцируемых функций* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2007. № 3. С. 71–81.

10. Тамасян Г. Ш., Шульга Г. С. *Методы негладкого анализа в задаче минимизации суммы модулей от аффинных функций* // Дискретн. анализ и исслед. опер., 31:4 (2024), 168–185; *J. Appl. Industr. Math.*, 18:4 (2024), 876–886.

11. Долгополик М. В. *Метод кодифференциального спуска для кусочно-аффинных функций* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 16 мая 2019 г. (`http://cnsa.cmlaboratory.com/reps19.shtml#0516`)