

МАТЕМАТИКА СРАЖЕНИЙ И САНКЦИЙ

**А.Л.Фрадков
ИПМаш РАН, СПбГУ
fradkov@mail.ru**

СПб семинар по оптимизации и ИИ, 09.10.25

Модель войны Осипова-Ланчестера

$$dx/dt = -\alpha y, \quad dy/dt = -\beta x$$

где x, y — количество единиц, представляющих силу каждого противника;

α, β — интенсивность (эффективность) стрельбы.

Осипов, М. (1915). Влияние численного состава сражающихся на их потери».

Военный сборник, (6-10), 378-416.

Lanchester, F.W. (1916). Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. Constable & Co., London.

Lanchester, F.W. (1914), "The principle of concentration", Engineering, October 2.

Уравнения Осипова-Ланчестера

$$\beta x(t)^2 - \alpha y(t)^2 = \beta x(0)^2 - \alpha y(0)^2,$$

или для потерь:

$$\beta (x(t)^2 - x(0)^2) = \alpha (y(t)^2 - y(0)^2)$$

где X, Y — количество единиц, представляющих силу каждого противника;

α, β — коэффициенты потерь 1-й и 2-й сторон (зависят от вооружения, опыта армий, тактики, укреплений, морального духа войск и т.д.)



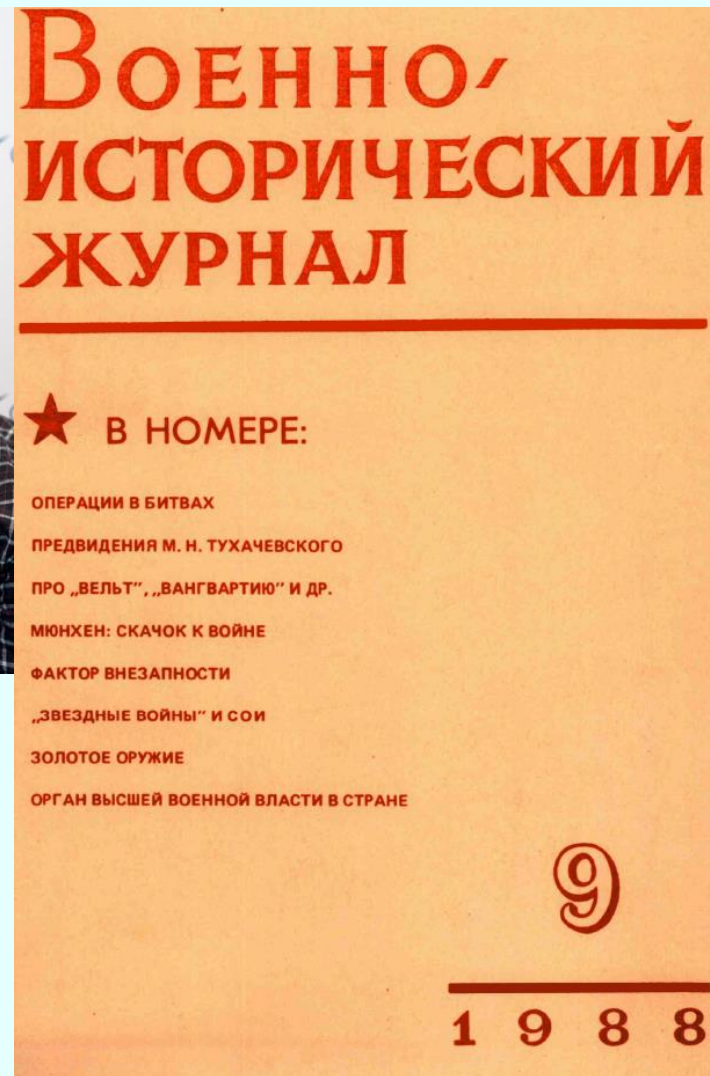
Юсупов

Рафаэль Мидхатович
(17.07.1934 - 7.11.2024)



Иванов

Владимир Петрович



**Юсупов Р.М., Иванов В.П. Математическое моделирование
в военном деле // Военно-исторический журнал. 1988, №9.**

Robert L. Helmbold

Osipov: The 'Russian Lanchester'

European Journal of Operational Research, 65(2),
1993, 278-288.

«Я очарован методологическим подходом Осипова к проверке или подтверждению этих теоретических соображений. Он довольно подробно говорит о том, какие методы он использует, и делает все возможное, чтобы объяснить их».

«...Уникальный вклад Осипова, возможно, более существенен и важен, чем вклад Ланчестера. Осипов более глубоко вникал в суть дела и имел более здравый, более научный подход и мировоззрение, что ставит его в авангарде тех, кто интересуется теорией боевых операций... Осипов фактически записывает общее математическое решение квадратичного уравнения потерь. Хотя я уверен, что Ланчестер знал это решение, он не представил его в своих трудах, а вместо этого ограничился графическими примерами.

THE INFLUENCE OF THE NUMERICAL STRENGTH OF ENGAGED FORCES ON THEIR CASUALTIES

By M. Osipov

**Originally Published in the Tzarist Russian Journal
MILITARY COLLECTION**

June-October 1915

**ВЛИЯНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ СРАЖАЮЩИХСЯ СТОРОНЪ
НА ИХЪ ПОТЕРИ**

М. ОСИПОВ

ВОЕННЫЙ СБОРНИК, 1915

**Translation of September 1991 by
Dr. Robert L. Helmbold and Dr. Allan S. Rehm
OFFICE, SPECIAL ASSISTANT FOR MODEL VALIDATION**

**US ARMY CONCEPTS ANALYSIS AGENCY
8120 WOODMONT AVENUE
BETHESDA, MARYLAND 20814-2797**



Kipp, J. W. 2004. Tracking down Russia's Lanchester. *Journal of Slavic Military Studies* 17: 257—269.

Митюков, Н.В. М.П. Осипов: к идентификации личности автора первой модели глобальных процессов / Н.В. Митюков // Историческая психология и социология истории. – 2011. – № 2. – С. 203-207.

**Михаил Павлович
Осипов (1859 - ?)**

Автор модели – генерал-майор
М.П.Осипов?

Юсупов Р.М., Иванов В.П. Из истории математического моделирования боевых действий в России (1900-1917 гг.) // Информатика и автоматизация. 2023. Т. 22 № 5, С. 947-967.

Модели военных, боевых и специальных действий.
Под редакцией академика РАН Д. А. Новикова
М.: URSS, 2025.

Новиков Д.А. Эффекты научения в моделях Осипова – Ланчестера. Управление большими системами: сборник трудов. 2025. Вып. 116. С. 135-153.

Шумов В. В. Иерархия моделей боевых действий и пограничных конфликтов. Управление большими системами: сборник трудов. 2019, Вып. 79, С.86-111.

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ СРАЖЕНИЙ

Fox W.P. Discrete combat models: Investigating the solutions to discrete forms of Lanchester's combat models // Int. J. Oper. Res. Inf. Syst. 2010. V. 1. P. 16–34.

Сазанова Л.А. Модель Ланчестера как дискретная управляемая система // Международный журнал социальных и гуманитарных наук. – 2016. – Т. 1. №1. – С. 202-204.

$$\begin{cases} x_1(k+1) - x_1(k) = -\alpha_1 x_1(k) - \beta_2 x_2(k) + \gamma_1(k); \\ x_2(k+1) - x_2(k) = -\alpha_2 x_2(k) - \beta_1 x_1(k) + \gamma_2(k). \end{cases}$$

Мягкая модель Осипова-Ланчестера

$$\begin{cases} \dot{x} = -b(x, y)y, \\ \dot{y} = -a(x, y)x, \end{cases}$$

где $a(x, y) > 0$, $b(x, y) > 0$.

В.И.Арнольд. «Жесткие» и «мягкие»
математические модели. М. МЦНМО, 2004.

Жесткая и мягкая модели войны

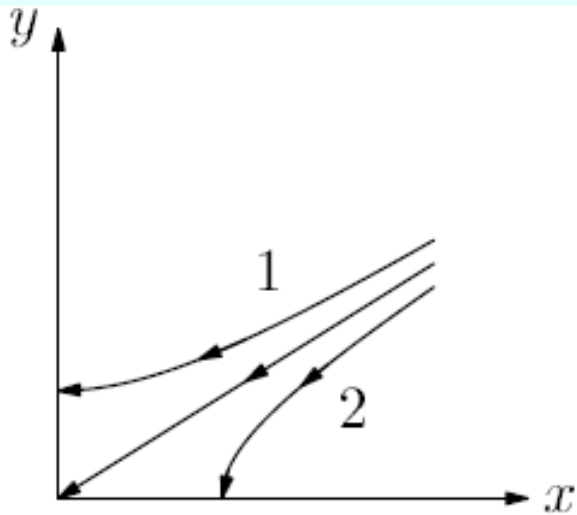


Рис. 1. Жесткая модель войны

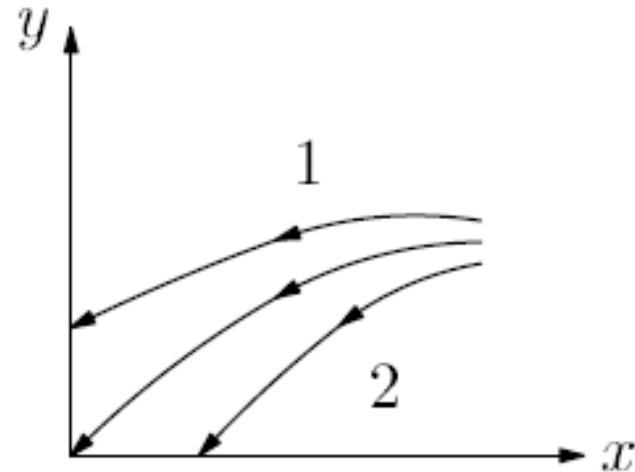
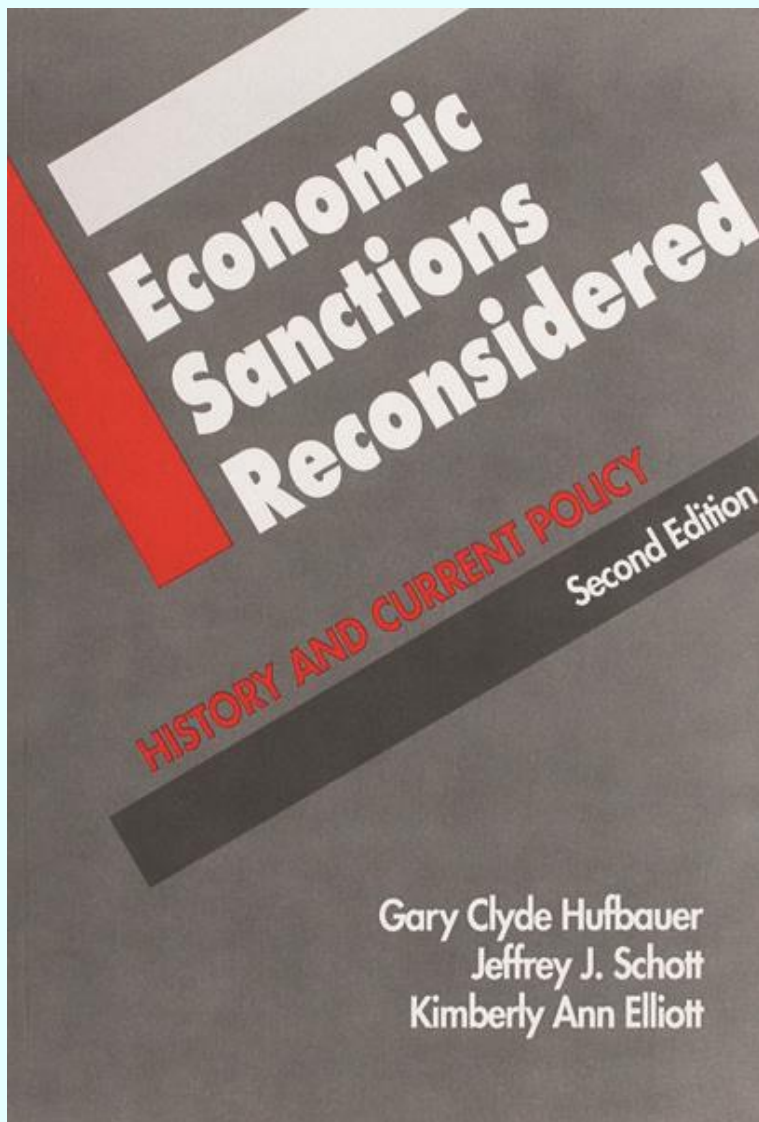


Рис. 2. Мягкая модель войны.

В.И.Арнольд. «Жесткие» и «мягкие»
математические модели. М. МЦНМО, 2004.

МАТЕМАТИКА САНКЦИЙ

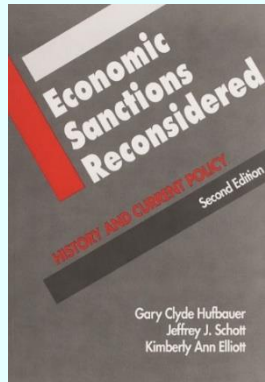
ИЗ ИСТОРИИ САНКЦИЙ



Гари Клайд Хафбауер

Hufbauer G., Shott J., Elliott K.,
Oegg B.

Economic Sanctions Reconsidered.
Third Edition. Peterson Institute
for International Economics, 2009.



ИЗ ИСТОРИИ САНКЦИЙ



Успешность санкций (по данным 1914-2007 гг.)

Цели ввода санкций	Успешные случаи	Всего случаев	% от общего числа случаев
Умеренные изменения политики	22	43	51
Смена режима и демократизация	25	80	31
Недопущение военных действий	4	19	21
Военное ослабление	9	29	31
Другие цели	10	33	30
Всего	70	204	34

L. Popova, E. Rasoulinezhad. Have Sanctions Modified Iran's Trade Policy? An Evidence of Asianization and Deuropeanization through the Gravity Model, Economies 2016, 4, 24.

Модель динамики многократных санкций и контр-санкций

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \alpha(y_n - y_{n-1}), \\ y_{n+1} = y_n + \beta(x_n - x_{n-1}), \\ n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

где x_n ; y_n – значения санкционного и контрсанкционного давления в n -й период, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – коэффициенты интенсивности.

(A.Fradkov. International Stability under Iterated Sanctions and Counter-sanctions.

Preprints of the 22th IFAC World Congress.

Yokohama, Japan, July 9-14, 2023, pp.11832-11836).

Модель динамики многократных санкций и контр-санкций

Пусть $v_n = x_n - x_{n-1}$, $w_n = y_n - y_{n-1}$. Тогда

$$\begin{cases} v_{n+1} = qv_n, \\ w_{n+1} = qw_n, \\ n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

где $q = \alpha\beta > 0$ – общий коэфф-т усиления.
 $q < 1$ – устойчивость, $q > 1$ – неустойчивость
(устойчивость: $x_n < D, y_n < D$ при $D > 0$.)

Стохастическая модель динамики многократных санкций и контр-санкций

Пусть $v_n = x_n - x_{n-1}$, $w_n = y_n - y_{n-1}$ случайны:

$$\begin{cases} v_{n+1} = (\alpha + \xi_n)w_n, \\ w_{n+1} = (\beta + \eta_n)v_n, \\ n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E\xi_n &= E\eta_n = 0, \\ E\xi_n^2 &= \sigma_x^2, E\eta_n^2 = \sigma_y^2, \quad q = (\alpha^2 + \sigma_x^2)(\beta^2 + \sigma_y^2). \\ n &= 1, 2, \dots \quad \{\xi_n\}, \{\eta_n\} \text{ независимы} \end{aligned}$$

$0 < q < 1$ – устойчивость, $q > 1$ – неустойчивость
(в средне-квадратичном)

Нелинейная «полумягкая» модель динамики многократных санкций и контр-санкций

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = \alpha_1(y_n - y_{n-1}) + f_1(y_n - y_{n-1}) \\ y_{n+1} - y_n = \alpha_2(x_n - x_{n-1}) + f_2(x_n - x_{n-1}) \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$0 \leq \frac{f_1(y)}{y} \leq \mu_1, 0 \leq \frac{f_2(x)}{x} \leq \mu_2,$$

$\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$. Пусть $q = (\alpha_1 + \mu_1)(\alpha_2 + \mu_2) > 0$ – общий коэффициент усиления.

$q < 1$ – устойчивость, $q > 1$ – неустойчивость

Модель управления динамикой многократных санкций и контрсанкций

$$\begin{cases} v_{n+1} = \alpha_n w_n, \\ w_{n+1} = \beta_n v_n, \\ n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

где $v_n = x_n - x_{n-1}$, $w_n = y_n - y_{n-1}$ — приращения санкционного и контрсанкционного давления в n -й период, $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$ — управления.

Теорема. Для любых начальных условий v_0, w_0 система

$$\begin{cases} v_{n+1} = \alpha_n w_n, \\ w_{n+1} = \beta_n v_n, \\ n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

экспоненциально устойчива, если

$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \varepsilon_n, \beta_{n+1} = \beta_n - \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, пока $\alpha_n > 0, \beta_n > 0$.

Следствие. Результат верен при учете возмущений и нелинейности модели.¹⁹

ВЫВОДЫ

1. Обе стороны конфликта несут равную ответственность за его устойчивость и неустойчивость.

2. Устойчивость процесса может быть достигнута при помощи сколь угодно малых управлений.

3. «Полумягкие» модели позволяют получать как качественные, так и количественные выводы.

REFERENCES

Fradkov A. A cybernetic view on international stability under multiple sanctions and counter-sanctions. *Cybernetics and Physics*, 2022, 11(3), pp. 165–168.

Alexander Fradkov

International Stability under Iterated Sanctions and Counter-sanctions.

Preprints of the 22th IFAC World Congress.

Yokohama, Japan, July 9-14, 2023 pp.11832-11836.

IFAC-PapersOnLine, Vol 56, Is 2, 2023, pp 11010-11014.

<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.800>