О НЕРАВЕНСТВЕ ГЁЛЬДЕРА*

В. Н. Малоземов А. В. Петров
v.malozemov@spbu.ru aleksndr19@rambler.ru

16 октября 2025 г.

Неравенство Гёльдера является классическим неравенством, содержащим параметр. Оно используется, в частности, при решении экстремальных задач [1]. При этом существенно не только само неравенство, но и условие обращения его в равенство. В экстремальных задачах такое условие играет роль критерия оптимальности.

Доказательство неравенства Гельдера, приведенное в книге [2, с. 140], по существу, неполное. Не учитывается наличие у вектора нулевых компонент. В этом докладе дается более аккуратное доказательство.

Нам потребуется норма Гёльдера вектора $x \in \mathbb{R}^n$ с компонентами $\{x_k\}$. Она определяется так:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p > 0.$$

ТЕОРЕМА. *При $p > 1$ для ненулевых векторов x и y из $\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q, \tag{1}$$

где $q = \frac{p}{p-1}$. Неравенство (1) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда компоненты векторов x и y при некотором $\lambda > 0$ связаны соотношением

$$|x_k|^p = \lambda |y_k|^q \text{ для всех } k \in 1 : n. \tag{2}$$

Неравенство (1) называется *неравенством Гёльдера.* В него, кроме параметра p, входит параметр q. Из определения q следует, что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{3}$$

---

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» http://oml.cmlaboratory.com/

Ключевую роль при доказательстве неравенства Гёльдера играет неравенство Юнга

$$a^{1/p} \cdot b^{1/q} \le \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b, \tag{4}$$

справедливое для произвольных неотрицательных чисел a и b. Если одно из чисел a, b равно нулю, то неравенство (4) тривиально. Пусть a и b — положительные числа. В силу строгого возрастания функции $\ln(t)$ на полуоси $(0, +\infty)$ неравенство (4) эквивалентно следующему:

$$\ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) \ge \ln\left(a^{1/p} \cdot b^{1/q}\right) = \frac{1}{p}\ln(a) + \frac{1}{q}\ln(b).$$

Полученное неравенство

$$\ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) \ge \frac{1}{p}\ln(a) + \frac{1}{q}\ln(b)$$

верно в силу строгой вогнутости функции $\ln(t)$ на $(0, +\infty)$. Таким образом, установлена справедливость неравенства (4) для всех неотрицательных чисел a и b.

Если $a = b$, то неравенство (4) согласно (3) становится равенством. Покажем, что верно и обратное утверждение: из равенства

$$a^{1/p} \cdot b^{1/q} = \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \tag{5}$$

следует, что $a = b$. Это очевидно, если одно из чисел a, b равно нулю.
В случае, когда a и b - положительные числа, вывод о том, что $a = b$ основан на равенстве

$$\ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) = \frac{1}{p}\ln(a) + \frac{1}{q}\ln(b),$$

эквивалентном (5), и свойстве *строгой* вогнутости функции $\ln(t)$ на полуоси $(0, +\infty)$.

Значит, неравенство Юнга (4) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $a = b$.

Переходим к доказательству теоремы. Так как векторы x и y ненулевые, то неравенство (1) можно переписать в эквивалентном виде

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p}\right)^{1/p} \cdot \left(\frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}\right)^{1/q} \le 1. \tag{6}$$

Введём обозначения

$$a_k = \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p}, \quad b_k = \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Числа a_k и b_k неотрицательны при всех $k \in 1:n$ и

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} b_k = 1. \tag{7}$$

По неравенству Юнга имеем

$$a_k^{1/p} \cdot b_k^{1/q} \le \frac{1}{p} a_k + \frac{1}{q} b_k, \quad k \in 1:n. \tag{8}$$

Сложим эти неравенства. Учитывая (3) и (7), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{1/p} \cdot b_k^{1/q} \le \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{9}$$

Неравенство (9) представляет собой другую форму записи неравенства (6), эквивалентного неравенству (1). Поэтому из справедливости неравенства (9) следует справедливость неравенства Гёльдера (1).

Осталось показать, что условие (2) является необходимым и достаточным для того, чтобы неравенство Гёльдера реализовалось как равенство. Предварительно отметим, что условие (2) равносильно другому условию

$$a_k = b_k, \quad k \in 1:n. \tag{10}$$

Действительно, пусть при некотором $\lambda > 0$ справедливы равенства (2). Сложим эти равенства. Получим

$$\|x\|_p^p = \lambda \|y\|_q^q,$$

так что

$$\lambda = \frac{\|x\|_p^p}{\|y\|_q^q}.$$

Условие (2) принимает вид

$$|x_k|^p = \frac{\|x\|_p^p}{\|y\|_q^q} \cdot |y_k|^q, \quad k \in 1:n. \tag{11}$$

Поделив это равенство на $\|x\|_p^p$, придем к (10).

Наоборот, пусть выполнено условие (10). Тогда справедлива формула (11). Положив $\lambda = \|x\|_p^p / \|y\|_q^q$, получим (2).

Вернёмся к условию (2). Допустим, что оно выполняется. Тогда выполняется и условие (10). Неравенства (8) и (9) становятся равенствами. Равенством станет также неравенство (6) и, как следствие, неравенство Гёльдера (1), которое представляет собой другую форму записи неравенства (6). Таким образом, при выполнении условия (2) неравенство Гёльдера реализуется как равенство.

Наоборот, пусть неравенство Гёльдера выполняется как равенство. Тогда неравенство (6) станет равенством. Как следствие, неравенство в (9) будет реализовано как равенство. Но это возможно только тогда, когда все неравенства (8) станут равенствами. Последнее гарантирует, что выполняется условие (10), а значит, и эквивалентное ему условие (2).

Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В.Н., Петров А.В. *Предельные теоремы в задаче об оптимальном линейном преобразовании* // Семинар «O&ML». Избранные доклады. 18 сентября 2025 г.

2. Малоземов В.Н., Машарский С.М. Элементарные методы в экстремальных задачах. 4-е изд. СПб.: Издательство «Лань», 2023. 172 с.