О СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

В. Н. Малоземов — v.malozemov@spbu.ru
А. В. Петров — aleksndr19@rambler.ru

16 октября 2025 г.

Рассматривается система, состоящая из пары сопряженных систем линейных алгебраических уравнений

$$Hx = b, \quad u^T H = c^T, \tag{1}$$

с нестандартной точки зрения. Считается, что известны ненулевые векторы x, c из $\mathbb{R}^n$ и b, u из $\mathbb{R}^m$. Неизвестной является матрица $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$. В докладе при некоторых предположениях дано описание всего множества решений системы (1).

1°. Введем обозначения:
E — единичная матрица порядка m;
B — квадратная матрица вида

$$B = E - \frac{1}{\alpha} b u^T,$$

где $\alpha = u^T b$. Очевидно, что

$$u^T B = \mathbb{O}^T. \tag{2}$$

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполнено условие*

$$c^T x = u^T b = \alpha, \tag{3}$$

причём $\alpha \neq 0$. Для того, чтобы матрица H удовлетворяла системе уравнений (1)*, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$H = \frac{1}{\alpha} b c^T + B \sum_{k=1}^{n-1} z_k v_k^T, \tag{4}$$

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» http://oml.cmlaboratory.com/

где $z_k \in \mathbb{R}^m$ *— произвольные векторы и* $\{v_k\}$ *— базис линейного подпространства* $L = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x\rangle = 0\}$.

Доказательство. Достаточность. Обозначим через H_0 первое слагаемое в правой части равенства (4), и через H_1 — второе слагаемое, так что $H = H_0 + H_1$. По определению α имеем $u^T H_0 = c^T$. В силу (3) справедливо равенство $H_0 x = b$. Значит, матрица H_0 удовлетворяет системе уравнений (1). Что касается матрицы H_1, то $u^T H_1 = \mathbb{O}^T$ в силу (2) и $H_1 x = \mathbb{O}$ по определению векторов v_k. Приходим к заключению, что любая матрица H вида (4) удовлетворяет системе уравнений (1).
Необходимость. Пусть H — решение системы (1). Построим подходящий базис $\{v_k\}$. Возьмём вектор w, удовлетворяющий условию $\langle w, x\rangle = 1$ (позднее мы уточним его выбор) и представим матрицу H в виде

$$H = bw^T + \tilde{H}. \tag{5}$$

Тогда $\tilde{H}x = \mathbb{O}$. Отсюда следует, что строки $\tilde{h}_i$ матрицы $\tilde{H}$ принадлежат подпространству L. Их можно разложить по базису $\{v_k\}$ этого подпространства:

$$\tilde{h}_i = \sum_{k=1}^{n-1} z_{ik} v_k^T, \quad i \in 1:m. \tag{6}$$

Обозначим $z_k = (z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{mk})^T$. Тогда матрицу $\tilde{H}$ можно представить в виде

$$\tilde{H} = \sum_{k=1}^{n-1} z_k v_k^T.$$

В силу (5) получаем

$$H = bw^T + \sum_{k=1}^{n-1} z_k v_k^T. \tag{7}$$

Далее, должно выполняться равенство

$$c^T = u^T H = \alpha w^T + \sum_{k=1}^{n-1} u^T (z_k v_k^T).$$

Так как $\alpha \neq 0$, и, по ассоциативности, $u^T(z_k v_k^T) = (u^T z_k) v_k^T$, то

$$w^T = \frac{1}{\alpha}\left(c^T - \sum_{k=1}^{n-1} (u^T z_k) v_k^T\right).$$

Выбор вектора w сделан. Равенство $w^T x = 1$ следует из определений α и $\{v_k\}$.

Подставим выражение для w^T в (7). Запишем

$$H = \frac{1}{\alpha} bc^T - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} (u^T z_k) b v_k^T + \sum_{k=1}^{n-1} z_k v_k^T =$$
$$= \frac{1}{\alpha} bc^T + \sum_{k=1}^{n-1} (z_k - \frac{1}{\alpha}(u^T z_k) b) v_k^T.$$

По ассоциативности, $(u^T z_k)b = b(u^T z_k) = (bu^T) z_k$, поэтому

$$H = \frac{1}{\alpha} bc^T + \sum_{k=1}^{n-1} (E - \frac{1}{\alpha} bu^T) z_k v_k^T =$$
$$= \frac{1}{\alpha} bc^T + B \sum_{k=1}^{n-1} z_k v_k^T.$$

Теорема доказана. □

Замечание. Условие $c^T x = u^T b$ является необходимым для совместности системы (1). Это следует из равенства $u^T(Hx) = (u^T H)x$.

2°. В теореме 1 можно использовать любой базис $\{v_k\}$ подпространства L. Возьмем ортонормированный базис. Нормируем вектор x, положив $\hat{x} = x/\|x\|$. Очевидно, что система векторов

$$\{\hat{x}, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} \tag{8}$$

будет ортонормированным базисом в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Разложим вектор c по базису (8):

$$c = a_0 \hat{x} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k v_k,$$

где $a_0 = \langle c, \hat{x} \rangle = \frac{\alpha}{\|x\|}$, $a_k = \langle c, v_k \rangle$. Подставив это выражение для c в формулу (4), получим

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\alpha} b(a_0 \hat{x}^T + \sum_{k=1}^{n-1} a_k v_k^T) + B \sum_{k=1}^{n-1} z_k v_k^T = \\ &= \frac{a_0}{\alpha} b \hat{x}^T + \sum_{k=1}^{n-1} (B z_k + \frac{a_k}{\alpha} b) v_k^T. \end{aligned} \tag{9}$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и система векторов* (8) *образует ортонормированный базис в пространстве* $\mathbb{R}^n$. *Тогда матрицу* H *можно представить в виде*

$$H = AP, \tag{10}$$

где $A = A[M, N]$ *— матрица со столбцами*

$$\frac{a_0}{\alpha} b,\ Bz_1 + \frac{a_1}{\alpha} b, \dots, Bz_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{\alpha} b$$

и $P = P[N, N]$ *— ортогональная матрица со строками*

$$\hat{x}^T,\ v_1^T, \dots, v_{n-1}^T.$$

Доказательство. В правой части равенства (9) стоит сумма одноранговых матриц. Её можно свернуть. Воспользуемся формулой

$$A[M, N] \times P[N, N] = \sum_{k=1}^{n} A[M, k] \times P[k, N]. \tag{11}$$

Очевидно, что разложение (10) следует из (9) и (11). Столь же очевидна ортогональность матрицы P, то есть равенство $PP^T = E$.

Теорема доказана. □

3°. В случае, когда все компоненты вектора x отличны от нуля, можно построить базис подпространства L из векторов, носители которых состоят только из двух индексов.

В качестве v_k, $k \in 1 : n-1$, возьмем вектор с компонентами

$$v_k[j] = \begin{cases} x[j+1] & \text{при } j = k, \\ -x[j] & \text{при } j = k+1. \end{cases}$$

Матрица со строками $v_1^T,\ v_2^T, \dots, v_{n-1}^T$ выглядит так:

$$V = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & & & \\ & x_3 & -x_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x_n - x_{n-1} \end{bmatrix}$$

(указаны только ненулевые элементы).

Проверим, что все v_k принадлежат L. Имеем

$$\langle v_k, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} v_k[j] \times x[j] = v_k[k] \times x[k] + v_k[k+1] \times x[k+1] =$$
$$= x[k+1] \times x[k] - x[k] \times x[k+1] = 0.$$

Линейная независимость системы $\{v_k\}$ следует из того, что определитель матрицы V без последнего столбца отличен от нуля.