

# МОДИФИЦИРОВАННЫЙ MDM-АЛГОРИТМ: СХОДИМОСТЬ И ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ\*

А. В. Плоткин

avplotkin@gmail.com

6 ноября 2025 г.

Обозначим через  $G$  выпуклую оболочку некоторого конечного множества точек в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Рассматривается задача нахождения точки из  $G$  с наименьшей евклидовой нормой. На решение этой задачи ориентирован MDM-алгоритм [1, 2]. Иногда MDM-алгоритм сходится медленно (возникает эффект «пилы»). Предпринимаются попытки уменьшить количество итераций MDM-алгоритма за счет работы с «пилами». В этом докладе развиваются идеи, представленные в [3]. Излагается доработанный вариант модифицированного MDM-алгоритма. Доказывается его сходимость, проводятся численные эксперименты.

1°. Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  заданы  $m$  точек,

$$H = \{a_i\}_{i=1}^m.$$

Выпуклую оболочку множества  $H$  обозначим  $G$ . Ставится экстремальная задача

$$\|v\|^2 \rightarrow \min_{v \in G}. \quad (1)$$

Очевидно, что задача (1) имеет единственное решение  $v^*$ .

Обозначим через  $A$  матрицу со столбцами  $a_1, \dots, a_m$ . Тогда любой вектор  $v$  из выпуклой оболочки  $G$  множества  $H$  допускает представление  $v = Ap$ , где

$$p \geq \mathbb{O}, \quad \sum_{i=1}^m p[i] = 1. \quad (2)$$

Множество векторов  $p$ , удовлетворяющих условию (2), обозначим  $P$ . Введем носитель вектора коэффициентов  $p$  — индексное множество  $M_+(p)$  вида

$$M_+(p) = \{i \in 1 : m \mid p[i] > 0\}.$$

---

\*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML»  
<http://oml.cmlaboratory.com/>

Отметим, что  $M_+(p) \neq \emptyset$  для любого  $p \in P$ .

Величина

$$\Delta(p) = \max_{i \in M_+(p)} \langle a_i, v \rangle - \min_{i \in 1:m} \langle a_i, v \rangle,$$

где  $v = Ap$ ,  $p \in P$ , называется *оценкой плана  $v$* . Оценка плана всегда неотрицательна. Действительно,

$$\Delta(p) \geq \max_{i \in M_+(p)} \langle a_i, v \rangle - \min_{i \in M_+(p)} \langle a_i, v \rangle \geq 0.$$

В докладах [1], [2] были доказаны следующие утверждения.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** При любом  $v = Ap$ ,  $p \in P$ , справедливо неравенство

$$\|v - v_*\|^2 \leq \|v\|^2 - \|v^*\|^2.$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** При любом  $v = Ap$ ,  $p \in P$ , справедливо неравенство

$$\|v - v_*\|^2 \leq \Delta(p).$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 3.** Равенство  $\Delta(p) = 0$ ,  $p \in P$  достигается тогда и только тогда, когда вектор  $v = Ap$  является решением задачи (1).

**2°.** Приведем описание модифицированного MDM-алгоритма решения задачи (1).

Возьмем начальное приближение  $v_0 = Ap_0$ ,  $p_0 \in P$ .

Пусть уже имеется  $k$ -е приближение  $v_k = Ap_k$ ,  $p_k \in P$ . Опишем  $k$ -ю итерацию алгоритма, на которой происходит построение  $v_{k+1}$ .

Обозначим

$$x_k = \max_{i \in M_+(p_k)} \langle a_i, v_k \rangle, \quad y_k = \min_{i \in 1:m} \langle a_i, v_k \rangle.$$

Оценка плана  $v_k = Ap_k$  может быть записана в виде

$$\Delta_k := \Delta(p_k) = x_k - y_k.$$

Если  $\Delta_k = 0$ , то согласно утверждению 3 вектор  $v_k$  является решением задачи (1). Процесс закончен.

Допустим, что  $\Delta_k > 0$ . Максимум  $x_k$  величин  $\langle a_i, v_k \rangle$  по  $i \in M_+(p_k)$  может достигаться на нескольких индексах одновременно. Обозначим

$$I_k^{max} = \left\{ i \in M_+(p_k) \mid \langle a_i, v_k \rangle = x_k \right\}.$$

Минимум  $y_k$  величин  $\langle a_i, v_k \rangle$  по  $i \in 1 : m$  может достигаться на нескольких индексах одновременно. Обозначим

$$I_k^{min} = \left\{ i \in 1 : m \mid \langle a_i, v_k \rangle = y_k \right\}.$$

Выберем по одному индексу из множеств  $I_k^{max}$  и  $I_k^{min}$ :

$$i'_k = \arg \min_{i \in I_k^{max}} p_k[i] \quad \text{и} \quad i''_k = \arg \min_{i \in I_k^{min}} p_k[i].$$

Пусть

$$p'_k = p_k[i'_k] \quad \text{и} \quad p''_k = p_k[i''_k].$$

Ясно, что  $p'_k > 0$ . Если  $p''_k = 0$ , то следующее приближение  $v_{k+1}$  найдем принципиальным MDM-алгоритмом [1], выбрав индексы  $i'_k$  и  $i''_k$ . В противном случае,  $p''_k > 0$ , а значит

$$p_k[i] > 0 \quad \text{при всех} \quad i \in I_k^{min}.$$

Рассмотрим направление

$$s_k = a_{i''_k} - \frac{1}{|I_k^{min}|} \sum_{i \in I_k^{min}} a_i.$$

Покажем, что оно является ненулевым. Предположим, напротив, что  $s_k = \mathbb{O}$ . Тогда

$$a_{i''_k} = \frac{1}{|I_k^{min}|} \sum_{i \in I_k^{min}} a_i.$$

Умножим обе части последнего равенства на  $v_k$ , получим

$$\langle a_{i''_k}, v_k \rangle = \frac{1}{|I_k^{min}|} \sum_{i \in I_k^{min}} \langle a_i, v_k \rangle.$$

Это равносильно тому, что

$$x_k = \frac{1}{|I_k^{min}|} \sum_{i \in I_k^{min}} y_k.$$

Последнее равенство означает, что  $x_k = y_k$ . Но этот факт противоречит положительности оценки  $\Delta_k = x_k - y_k$ .

Рассмотрим отрезок

$$v_k(t) = v_k - ts_k, \quad t \in [0, p'_k].$$

Коэффициенты  $p_k(t)$  разложения вектора  $v_k(t)$  по столбцам матрицы  $A$  выглядят следующим образом:

$$p_k(t)[i] = \begin{cases} p_k[i] & \text{при } i \neq i'_k, i \notin I_k^{min}, \\ p_k[i] - t & \text{при } i = i'_k, \\ p_k[i] + \frac{t}{|I_k^{min}|} & \text{при } i \in I_k^{min}. \end{cases}$$

В силу выпуклости множества  $G$  все точки  $v_k(t)$  этого отрезка принадлежат  $G$ .

Найдем значение  $t_k$ , минимизирующее норму вектора  $v_k(t)$  на заданном отрезке:

$$t_k = \arg \min_{t \in [0, p'_k]} \|v_k(t)\|^2.$$

Тогда следующее приближение  $v_{k+1}$  возьмем равным  $v_k(t_k)$ .

Укажем явную формулу для вычисления  $t_k$ . Запишем выражение для  $\|v_k(t)\|^2$ . Имеем

$$\|v_k(t)\|^2 = \|v_k - ts_k\|^2 = \|v_k\|^2 - 2t\langle v_k, s_k \rangle + t^2\|s_k\|^2.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \langle v_k, s_k \rangle &= \left\langle v_k, a_{i'_k} - \frac{1}{|I_k^{min}|} \sum_{i \in I_k^{min}} a_i \right\rangle = \\ &= \langle a_{i'_k}, v_k \rangle - \frac{1}{|I_k^{min}|} \sum_{i \in I_k^{min}} \langle a_i, v_k \rangle = \\ &= x_k - \frac{1}{|I_k^{min}|} \sum_{i \in I_k^{min}} y_k = x_k - y_k = \Delta_k. \end{aligned}$$

С учетом последней формулы получим

$$\|v_k(t)\|^2 = \|v_k\|^2 - 2t\Delta_k + t^2\|s_k\|^2.$$

Глобальный минимум квадратичной функции одной переменной  $\|v_k(t)\|^2$  на  $\mathbb{R}$  достигается в точке

$$\hat{t}_k = \frac{\Delta_k}{\|s_k\|^2}.$$

Ясно, что  $\hat{t}_k > 0$ . Значит,

$$t_k = \min\{p'_k, \hat{t}_k\}.$$

Если  $\hat{t}_k \leq p'_k$ , то итерацию метода будем называть *неусеченной*, в этом случае  $t_k = \hat{t}_k$ . Если  $\hat{t}_k > p'_k$ , то итерацию метода будем называть *усеченной*, в этом случае  $t_k = p'_k$ .

Описание модифицированного MDM-алгоритма завершено.

Некоторые итерации представленного метода могут быть выполнены по схеме принципиального MDM-алгоритма. Такие итерации тоже могут быть *усеченными* или *неусеченными*.

**3°.** Представленный алгоритм строит последовательность  $v_0, v_1, \dots$  точек из  $G$ . Если она конечна, то последний ее элемент является решением задачи (1). Вообще говоря, последовательность  $\{v_k\}$  бесконечна. Такая ситуация возникает, когда

$$\Delta_k > 0 \quad \text{при всех} \quad k = 0, 1, \dots$$

Далее будем рассматривать случай бесконечной последовательности  $\{v_k\}$ .

Отметим важное свойство алгоритма. На каждой итерации выполняется условие  $t_k > 0$ , значит

$$\|v_{k+1}\|^2 = v_k(t_k) < v_k(0) = \|v_k\|^2.$$

То есть последовательность  $\{\|v_k\|\}$  является строго убывающей. В частности, это означает, что бесконечная последовательность  $\{\|v_k\|\}$  имеет предел.

Далее, приведем оценку убывания функции на неусеченных итерациях.

**ЛЕММА 1.** Пусть  $k$ -я итерация алгоритма является неусеченной, тогда выполняется оценка

$$\|v_k\|^2 - \|v_{k+1}\|^2 \geq \frac{\Delta_k^2}{d^2}, \quad (3)$$

где  $d$  — диаметр конечного множества  $H$ .

**Доказательство.** По определению неусеченной итерации имеем

$$v_{k+1} = v_k(t_k) = v_k(\hat{t}_k) = v_k - \frac{\Delta_k}{\|s_k\|^2} s_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|v_{k+1}\|^2 &= \left\| v_k - \frac{\Delta_k}{\|s_k\|^2} s_k \right\|^2 = \\ &= \|v_k\|^2 - 2 \frac{\Delta_k}{\|s_k\|^2} \langle v_k, s_k \rangle + \frac{\Delta_k^2}{\|s_k\|^4} \|s_k\|^2 = \\ &= \|v_k\|^2 - 2 \frac{\Delta_k}{\|s_k\|^2} \Delta_k + \frac{\Delta_k^2}{\|s_k\|^2} = \\ &= \|v_k\|^2 - \frac{\Delta_k^2}{\|s_k\|^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|v_k\|^2 - \|v_{k+1}\|^2 = \frac{\Delta_k^2}{\|s_k\|^2}. \quad (4)$$

Напомним определение направления  $s_k$ :

$$s_k = a_{i'_k} - \frac{1}{|I_k^{min}|} \sum_{i \in I_k^{min}} a_i.$$

В последней формуле имеем  $a_{i'_k} \in G$  и  $\frac{1}{|I_k^{min}|} \sum_{i \in I_k^{min}} a_i \in G$ . Значит, норма их разности не превосходит диаметра множества  $H$ :

$$\|s_k\| \leq d.$$

Очевидно, что тогда

$$\frac{1}{\|s_k\|} \geq \frac{1}{d}.$$

Приняв во внимание последнюю формулу и (4), получим требуемую оценку (3).  $\square$

Для доказательства сходимости нам потребуется следующая лемма.

**ЛЕММА 2.** *Множество неусеченных итераций в модифицированном MDM-алгоритме бесконечно.*

**Доказательство.** Допустим противное, что, начиная с некоторого номера  $k_1$ , все последующие итерации будут усеченными. Пусть  $k > k_1$ . Если итерация была совершена по принципиальной схеме, то

$$|M_+(p_{k+1})| = |M_+(p_k)|.$$

Если же итерация была совершена по новой схеме, то

$$|M_+(p_{k+1})| = |M_+(p_k)| - 1.$$

Так как размер носителя не может бесконечно убывать, то усеченных итераций по новой схеме конечное число. Значит, начиная с некоторого номера, все итерации являются усеченными по принципиальной схеме. Невозможность данного факта доказана, например, в [2].  $\square$

Теперь докажем основной результат о сходимости модифицированного MDM-алгоритма.

**ТЕОРЕМА.** *Последовательность  $\{v_k\}$ , построенная модифицированным MDM-алгоритмом, сходится к  $v_*$ .*

**Доказательство.** По лемме 2 существует бесконечная подпоследовательность неусеченных итераций. Пусть это будут  $k_j$ -е итерации,  $j = 1, 2, \dots$ . На основании леммы 1 имеем

$$\|v_{k_j}\|^2 - \|v_{k_j+1}\|^2 \geq \frac{\Delta_k^2}{d^2}. \quad (5)$$

Так как последовательность норм  $\{\|v_k\|\}$  сходится, то правая часть неравенства (5) стремится к нулю при  $j \rightarrow \infty$ . Значит,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_{k_j} \rightarrow 0.$$

Воспользовавшись утверждением 1, получим

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|v_{k_j} - v^*\| \rightarrow 0.$$

Отсюда, в частности, получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|v_{k_j}\| \rightarrow \|v^*\|.$$

Тогда и для всей сходящейся последовательности норм  $\{\|v_k\|\}$  имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k\| \rightarrow \|v^*\|.$$

Осталось воспользоваться утверждением 1, чтобы получить требуемый результат.  $\square$

**4°.** Данные для численных экспериментов будем генерировать следующим образом. Сначала выберем  $m$  точек  $b_1, \dots, b_m$  равномерно из  $n$ -мерного куба  $[-1, 1]^n$ . Далее точки  $a_i$  множества  $H$  зададим по формуле

$$a_i = (1 + 10^{-2}b_i[1], b_i[2], \dots, b_i[n]), \quad i \in 1 : m.$$

Множество, построенное таким образом, является очень сложным примером для методов нахождения ближайшей точки. Впервые такой метод генерации был рассмотрен в [4], а дальше использовался, например, в [5].

В качестве  $n$  будем брать значения из множества  $\{3, 10, 30, 50\}$ , а в качестве  $m$  значения из множества  $\{10^4, 2 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^4\}$ . Для каждой рассматриваемой пары  $(n, m)$  было сгенерировано 100 тестовых задач.

На рисунках 1–4 представлено сравнение среднего времени работы принципиального и модифицированного вариантов МДМ-алгоритма. Оба метода были релизованы на языке `Python` с использованием библиотеки `NumPy`. Критерием останова являлось выполнение неравенства  $\Delta_k < 10^{-4}$ .

Из графиков видно, что удается достичь небольшого преимущества на задачах большой размерности.

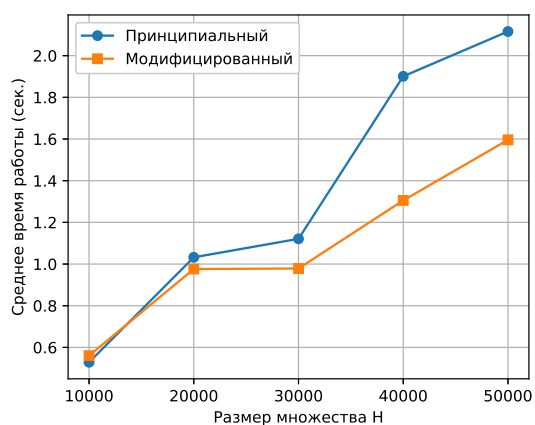


Рис. 1. Сравнение времени работы  
при  $n = 3$

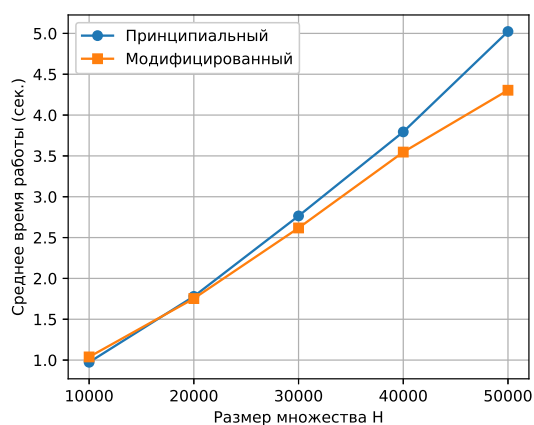


Рис. 2. Сравнение времени работы  
при  $n = 10$

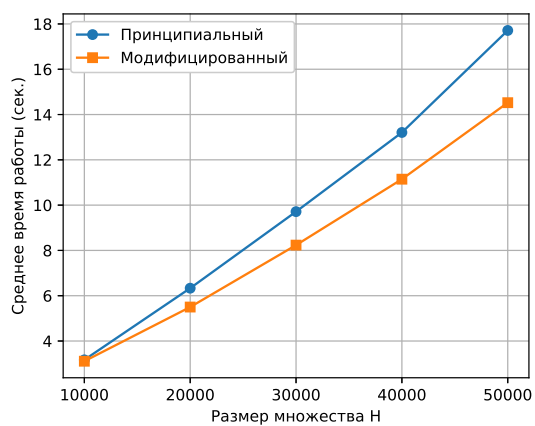


Рис. 3. Сравнение времени работы  
при  $n = 30$

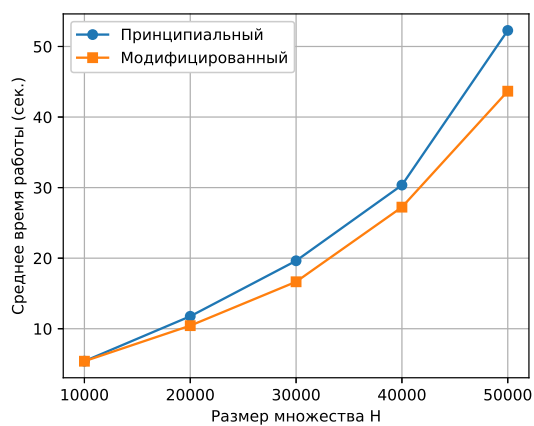


Рис. 4. Сравнение времени работы  
при  $n = 50$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В. Н. *MDM-методы — 50 лет* // Семинар «О & ML». Литература. Публикации участников семинара.  
(<http://oml.cmlaboratory.com/literatura.shtml>)
2. Малоземов В. Н., Плоткин А. В., Соловьева Н. А. *Универсальность MDM-алгоритма* // Семинар «О & ML». Избранные доклады. 27 февраля 2025 г. (<http://oml.cmlaboratory.com/rep25.shtml#0227>)
3. Плоткин А. В., Соловьева Н. А. *Модифицированный MDM-алгоритм* // Семинар «О & ML». Избранные доклады. 27 марта 2025 г.  
(<http://oml.cmlaboratory.com/rep25.shtml#0327>)
4. Wolfe P. *Finding the nearest point in a polytope* // Mathematical Programming. 1976. Vol. 11, no. 1, pp. 128–149.
5. Dolgopolik M. V. *An efficient acceleration technique for methods for finding the nearest point in a polytope and computing the distance between two polytopes* // arXiv preprint: 2205.04553.2022.