

Новый алгоритм решения системы линейных неравенств, основанный на ускоренном фейеровском процессе поиска неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений

Ерохин Владимир Иванович,¹ д.ф.м.н, проф., vka@mil.ru

Тамасян Григорий Шаликович^{1,2} к.ф.м.н., доц.

¹Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия,

²Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия



Семинар по оптимизации, машинному обучению
и искусственному интеллекту «O&ML»

27 ноября 2025 г.

Семинар O&ML

2 ноября 2023 г.

Доклад В. И. Ерохина

["Новое фейеровское отображение для решения систем линейных алгебраических уравнений с условием неотрицательности".](#)

9 марта 2023 г.

Доклад В. И. Ерохина

["Шаговая регрессия и рекуррентный метод наименьших квадратов: постановка задач, использование в машинном обучении, алгоритм Гревилля и его обращение как возможный инструмент реализации".](#)

19 декабря 2024 г.

Доклад В. И. Ерохина

["Итерационное отображение фейеровского типа для решения системы линейных алгебраических уравнений с двухсторонними ограничениями".](#)

13 марта 2025 г.

Доклад В. И. Ерохина

["Быстрый фейеровский алгоритм решения системы линейных неравенств".](#)

22 мая 2025 г.

Доклад В. И. Ерохина и Г. Ш. Тамасяна

["Ускоренный фейеровский процесс поиска неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений".](#)

Статьи и конференции

Erokhin V. *A method for solving a dual pair of linear programming problems based on the fast Fejér type algorithm for finding a nonnegative solution to a system of linear algebraic equations.* **MOTOR-2024**, Omsk, Russia, June 30 - July 6, 2024.

Erokhin V., Tamasyan G., Stepenko N. *Fejér type algorithm for finding a nonnegative solution to a system of linear algebraic equations.* **MOTOR-2025**, Novosibirsk, Russia, July 7-11, 2025.

Ерохин В. И., Тамасян Г. Ш., Степенко Н. А. Ускоренный фейеровский процесс поиска неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений // Труды института математики и механики УрО РАН, 2025, Т. 31, № 3, С. 121–137.

Ерохин В. И., Тамасян Г. Ш. Быстрый фейеровский алгоритм решения системы линейных неравенств // Процессы управления и устойчивость. Том 12. № 2: Материалы V Международной конференции «Устойчивость и процессы управления», посвященной 95-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В. И. Зубова (Санкт-Петербург, 6 – 10 октября 2025 г.) / науч. редактор тома Н. В. Смирнов. СПб.: Издательский Дом Федоровой Г.В., 2025, С. 159-160.

Ерохин В. И., Тамасян Г. Ш. Новый алгоритм решения системы линейных неравенств, основанный на ускоренном фейеровском процессе поиска неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений. Ч. 1 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. (в печати)

Постановка задачи

Дана система линейных неравенств

$$Ax \leq b,$$

где $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x = (x_j) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^m$,
 $0 < \text{rank } A \leq n < m$.

Целью исследования является построение алгоритма решения системы $Ax \leq b$, относящегося к классу *фейеровских* алгоритмов и обладающий в данном классе более высокой скоростью сходимости.



M -фейеровские отображения

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi : D \rightarrow D$ — некоторое отображение. Обозначим символом M множество неподвижных точек отображения φ , т.е. $M = \{x \in D \mid \varphi(x) = x\}$. Символом $\|\cdot\|$ обозначим евклидову векторную норму.

Определение

Отображение φ называется M -фейеровским, если множество M непусто и выполняется строгое неравенство

$$\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\| \quad \forall x \in D \setminus M, \forall y \in M.$$

Класс M -фейеровских отображений будем обозначать символом $\mathcal{F}_M$.

Плюсы, минусы и мотивация исследования $\mathcal{F}_M$

Сильные стороны (слабость – медленная сходимость)

▷ для теории и методов математического программирования:

- «легкий» итерационный шаг $x^k = \varphi(x^{k-1})$ – без обращения матриц, одномерного поиска и решения вспомогательных задач математического программирования;
 - простота декомпозиции, способность обработки динамических данных: (основана на «исчислении» класса $\mathcal{F}_M$) :

$$\varphi_j(x) \in F_{M_j}, M = \bigcap M_j \neq \emptyset, \lambda_j > 0, \sum \lambda_j = 1 \Rightarrow$$

$$\varphi(x) = \sum \lambda_j \varphi_j(x) \in \mathcal{F}_M, \psi(x) = \varphi_1(\varphi_2(\dots \varphi_m(x) \dots)) \in \mathcal{F}_M$$
 - решение задач математического программирования высокой размерности;
 - параллельные вычисления;
 - **глобальная сходимость** (см. Определение);
 - **линейная скорость сходимости** (в силу Леммы Хоффмана);
 - устойчивость к ошибкам округления, самоисправляемость;
 - возможность адаптации к решению широкого круга задач, в том числе поиска псевдорешений несовместных систем линейных уравнений, неравенств и несобственных задач математического программирования;
- ▷ для приложений:
- решение балансовых проблем: экономических, энергетических, химико-технологических.

M -фейеровские отображения: Основные свойства («исчисление»)

СВОЙСТВО 1.

Пусть $\{x^k\}$ построена с помощью $\phi \in F_M$. Тогда если $\{x^k\} \cap M = \emptyset$, то $x^k \rightarrow \bar{x} \in M$, иначе $\exists k \in \mathbb{N} \mid x^k, x^{k+1}, \dots \in M$.

СВОЙСТВО 2.

Пусть $\phi_\lambda(x) = \lambda\phi(x) + (1 - \lambda)x$, $\lambda \in (0, 1)$, $\phi \in F_M$. Тогда $\phi_\lambda \in F_M$.

СВОЙСТВО 3.

Пусть $\phi_j \in F_M$, $\phi(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \phi_j(x)$, $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$. Тогда $\phi \in F_M$.

СВОЙСТВО 4.

Пусть $\phi_j \in F_{M_j}$, $\phi(x) = \phi_1(\phi_2(\dots(\phi_m(x))\dots))$, $M = \bigcap_{j=1}^m M_j \neq \emptyset$. Тогда $\phi \in F_M$.

Базовые конструкции отображений класса $\mathcal{F}_M$

Отображение π_L , основанное на проекции точки на полупространство

$$L = \{x \mid \ell(x) = a^\top x - \beta \leq 0\}, \quad a, x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^1, \quad a \neq 0,$$

$$\pi_L(x) = x - \frac{\lambda[\ell(x)]_+ a}{a^\top a} \quad \lambda \in (0, 2), \quad [\cdot]_+ - \text{операция}$$

положительной срезки.

Отображение π_X , основанное на проекции точки на множество решений совместной системы линейных алгебраических уравнений

$$X = \{x \mid Ax = b\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad b \neq 0,$$

$$\pi_X(x) = x + A^+(b - Ax) \quad A^+ - \text{псевдообратная матрица.}$$

Отображения $\pi_{X+}, \mathcal{A}_{X+}^\lambda \quad (\lambda \in (0, 2))$

$$X_+ = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad b \neq 0,$$

$$\pi_{X_+}(x) = |x + A^+(b - Ax)|, \quad \mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x) = |x + \lambda A^+(b - Ax)|.$$

Теоретические свойства отображения $\mathcal{A}_{X+}^\lambda(x)$

- $\mathcal{A}_{X+}^\lambda \in \mathcal{F}_{X+}$ при всех $\lambda \in (0, 2)$.
- Для последовательности $\{x^k\}$ порождаемой отображением $\mathcal{A}_{X+}^\lambda$, выполняются неравенства

$$\rho(x^{k+1}, X_+) \leq \Theta \rho(x^k, X_+), \quad \|r(x^{k+1})\| \leq \Theta_r \|r(x^k)\|$$

где $\rho(x, X_+) := \inf_{y \in X_+} \|x - y\|$, $r(x) = b - Ax$,
 $\Theta = \left(1 + \frac{\lambda(\lambda-2)}{C^2 \|A\|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\Theta_r = (C^2 \|A\|^2 + \lambda(\lambda-2))^{\frac{1}{2}}$, C – Константа Хоффмана, $\|\cdot\|$ – в зависимости от контекста, а евклидова векторная норма (евклидова или спектральная матричная норма).

- Пусть x – некоторый вектор, $d(x) = A^+ r(x)$, $\hat{x} = A^+ b$. Если выполняются условия $\boxed{d(x) \leq 0, \hat{x}^\top d(x) > 0}$, система $Ax = b, x \geq 0$ несовместна, вектор $u = (A^+)^T d(x)$ является решением альтернативной системы.

- Если $z = x^k + d(x^k) \geq 0$, то z – решение системы $Ax \leq b$, полученное за *конечное* число шагов $k + 1$.



Базовые конструкции класса $\mathcal{F}_M$ для решения систем линейных неравенств $Ax \leq b$

Применительно к i -му неравенству системы $Ax \leq b$ отображение $\pi_L(x)$ может быть записано в виде

$$\varphi_i(x) = x - \lambda_i \frac{\left[\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j - b_i \right]_+}{\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2} \cdot \begin{bmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \in (0, 2).$$

На основе отображения $\pi_L(x)$ с использованием «исчисления» класса $\mathcal{F}_M$ можно построить отображения *взвешенного*, *последовательного* и *экстремального* проектирования:

$$\varphi^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi_j(x), \quad \alpha_j > 0, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1,$$

$$\varphi^{(2)}(x) = \varphi_1(\varphi_2(\dots \varphi_m(x) \dots)),$$

$$\varphi^{(3)}(x) = \varphi_{i^*}(x), \quad \text{где } i^* \left| \left[\sum_{j=1}^n a_{i^*,j} x_j - b_{i^*} \right]_+ = \max_{i=1,\dots,m} \left[\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j - b_i \right]_+ \right|.$$



http://oml.cmlaboratory.com/pdf/2023/Erohin_VI_9mar2023.pdf

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – некоторая матрица, $\text{rank } A = r \leq \min\{m, n\}$. *Псевдообратной* к матрице A будем называть матрицу $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$, для которой выполняются

уравнения Пенроуза:

$$AA^+A = A,$$

$$A^+AA^+ = A^+,$$

$$(AA^+)^\top = AA^+,$$

$$(A^+A)^\top = A^+A.$$

Утверждение 1. Для любой матрицы A псевдообратная матрица A^+ существует и является единственной.

Блочное псевдообращение матрицы $\begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ I_m - AB \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} B &= A^+(I_m + A^{+\top}A^+)^{-1} = (I_n + A^+A^{+\top})^{-1}A^+ = \\ &= A^\top(I_m + AA^\top)^{-1} = (I_n + A^\top A)^{-1}A^\top = \\ &= V_\ell S_\ell U_\ell^\top, \end{aligned}$$

где $U_\ell \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$, $V_\ell \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$, $S_\ell = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\ell)$ – элементы сингулярного разложения $A = U_\ell S_\ell V_\ell^\top$ (столбцы матриц U_ℓ , V_ℓ – ортонормированы, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_\ell > 0$, $\ell = \text{rank } A$), $S_\ell = \text{diag}(s)$, $s = (s_j = \frac{\sigma_j}{1+\sigma_j^2}) \in \mathbb{R}^\ell$.

Сведение системы $Ax \leq b$ к системе

$$(I_m - AA^+)u = (I_m - AA^+)b, u \geq 0 \quad (*)$$

1. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. Отыскание нормальных решений в задачах линейного программирования // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1766—1786.

2. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. Применение теорем об альтернативах к нахождению нормальных решений линейных систем // Изв. вузов. Матем. 2001. № 12. С. 21—31.

$$Ax = b - u, \quad u \geq 0. \quad (1)$$

Пусть система (1) совместна. Запишем ее нормальное (относительно x) решение

$$x = A^+(b - u). \quad (2)$$

Объединяя (1) и (2), получим

$$AA^+(b - u) = b - u, \quad u \geq 0 \Leftrightarrow (*).$$

Теорема 1. Система $Ax \leq b$ эквивалентна системе

$$(I_m - AA^+)u = (I_m - AA^+)b, u \geq 0$$

1. $Ax \leq b$ совместна $\Rightarrow \exists u \geq 0 : (I_m - AA^+)u = (I_m - AA^+)b$

Пусть система $Ax \leq b$ совместна. Тогда эквивалентная система $Ax = b - u, u \geq 0$, где $u \in \mathbb{R}^m$, также совместна (и разрешима относительно x и u): $x = A^+(b - u) + (I_n - A^+A)\Delta x$, где I_n – единичная матрица порядка n , $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор. Но тогда $Ax = b - u, u \geq 0 \Leftrightarrow AA^+(b - u) = b - u, u \geq 0 \Leftrightarrow (I_m - AA^+)u = (I_m - AA^+)b, u \geq 0$, где I_m – единичная матрица порядка m .

2. $(I_m - AA^+)u = (I_m - AA^+)b, u \geq 0$ совместна $\Rightarrow \exists x : Ax \leq b$

Пусть система $(I_m - AA^+)u = (I_m - AA^+)b, u \geq 0$ совместна, $x = A^+(b - u) + (I_n - A^+A)\Delta x$, где $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Тогда $Ax = AA^+(b - u) = b - u \leq b$, т.е. x — решение системы $Ax \leq b$.

Связь решений альтернативных систем

• В соответствии с теоремой Александрова–Фань-Цзи, система, альтернативная $Ax \leq b$, имеет вид

$$p^\top A = 0, \quad p^\top b > 0, \quad p \leq 0, \quad (3)$$

где $p \in \mathbb{R}^m$ – некоторый вектор.

• В соответствии с леммой Минковского–Фаркаша, система, альтернативная (1), имеет вид

$$q^\top (I_m - AA^+) \leq 0, \quad q^\top (I_m - AA^+)b > 0, \quad (4)$$

где $q \in \mathbb{R}^m$ – некоторый вектор.

▷ **Лемма.** Если q – решение системы (3), то $p = (I_m - AA^+)q$ – решение системы (4).

Отображение $\mathcal{A}_{U_+}^\lambda$

Пусть

$$r(u) = (I_m - AA^+)b - (I_m - AA^+)u,$$

$$U_+ = \{u : (I_m - AA^+)u = (I_m - AA^+)b, u \geq 0\},$$

$$\mathcal{A}_{U_+}^\lambda(u) = |u + \lambda(I_m - AA^+)(b - u)| : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m.$$

Справедливы утверждения:

- $\mathcal{A}_{U_+}^\lambda \in \mathcal{F}_{U_+}$ при всех $\lambda \in (0, 2)$.
- Пусть последовательность $\{u^k\}$ построена по правилу $u^0 \in \mathbb{R}_+^m \setminus U_+$; $u^{k+1} = \mathcal{A}_{U_+}^\lambda(u^k)$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда справедливы неравенства

$$\rho(u^{k+1}, U_+) \leq \Theta \rho(u^k, U_+), \|r(u^{k+1})\| \leq \Theta_r \|r(u^k)\|,$$

где

$$0 \leq \Theta = \left(1 + \frac{\lambda(\lambda - 2)}{C^2 \gamma^2}\right)^{1/2} < 1, \Theta_r = C\gamma\Theta, \gamma = \|I_m - AA^+\|.$$

Алгоритм, основанный на преобразовании $\mathcal{A}_{U+}^\lambda(u)$

▷ *Инициализация:*

- Задать A, b . Вычислить матрицу A^+ и векторы $\hat{x} = A^+b$, $h = b - A\hat{x}$.

- Если $h = 0$, то $x^* = \hat{x}$ – решение системы $Ax \leq b$, работу алгоритма закончить.

- Если $h \leq 0$, $h \neq 0$, то система $Ax \leq b$ несовместна, работу алгоритма закончить.

- Задать вектор $u_0 \in \mathbb{R}_+^m$ и параметр релаксации $\lambda \in (0, 2)$.

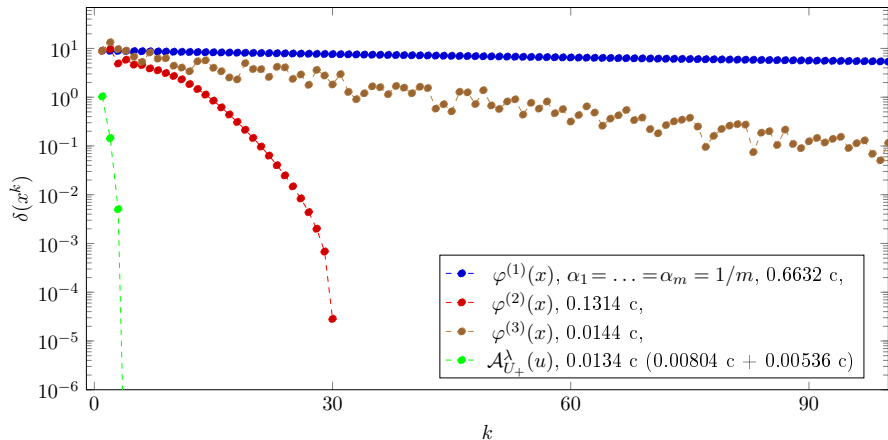
▷ *Итерационный шаг:* для $k = 1, 2, \dots$ выполнить:

- Вычислить $v^k = b - u^k$, $x^k = A^+v^k$, $r^k = v^k - x^k$. Если $r^k \leq 0$ и $h^\top r^k > 0$, то система $Ax \leq b$ несовместна, работу алгоритма закончить.

- Вычислить $y^k = u^k + r^k$. Если $y^k \geq 0$, то вектор $x^* = x^k$ является решением системы $Ax \leq b$, работу алгоритма закончить.

- Положить $u^{k+1} = |y^k + (\lambda - 1)r^k|$.

Реальный пример, связанный задачей сведения материального баланса химического предприятия: $n = 136$, $m = 285$, $b = 1$, $U_+ \neq \emptyset$, $u^0 = 10 \cdot \mathbf{1}$, $\lambda = \lambda_i = 1.6$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$; $\delta(x) = \max_{i=1, \dots, m} \left[\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j - b_i \right]_+$



Перспективы

$$(Ax = b, x \geq 0, c^T x \rightarrow \min) \rightarrow \begin{cases} Ax = b, x \geq 0, \\ A^T u \leq c, \\ c^T x = b^T u \end{cases}$$

$$(Ax = b, x \geq 0, x^\top x \rightarrow \min) \rightarrow \begin{cases} Ax^{k+1} = b, x^{k+1} \geq 0, \\ A^\top u \leq x^k, \\ x^{k\top} x^{k+1} = b^\top u \end{cases}$$

Спасибо за внимание !
Вопросы ?