MSC 90C33

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В. Н. Малоземов[1], *А. В. Петров*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

При некоторых предположениях получено представление всех матриц, являющихся решениями обратной задачи линейной алгебры. Показано, что поиск среди этих решений матрицы с наименьшей евклидовой нормой сводится к проектированию вектора на подпространство.

Ключевые слова: линейная алгебра, обратная задача.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений вместе с сопряжённой системой

$$Hx = b, \quad u^T H = c^T. \tag{1}$$

В обратной задаче линейной алгебры векторы x, b, u, c считаются известными. Неизвестной является матрица $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Равенство

$$c^T x = u^T b =: \alpha \tag{2}$$

представляет собой необходимое условие совместности системы (1). Действительно, пусть матрица H удовлетворяет этой системе. Тогда

$$c^T x = (u^T H)x = u^T (Hx) = u^T b.$$

Отметим, что при $\alpha \neq 0$ все векторы x, b, u, c должны быть ненулевыми.

В дальнейшем предполагается, что выполнено условие (2) и что $\alpha \neq 0$. В этом случае матрица H_0 вида

$$H_0 = \frac{1}{\alpha} b c^T \tag{3}$$

будет решением системы (1). Нашей целью является описание всего множества решений данной системы.

В статье используется евклидова норма векторов и матриц.

2. Основной результат. Введём два подпространства L_0 и $\tilde{L}$:

$$L_0 = \{z \in \mathbb{R}^m \mid \langle u, z \rangle = 0\},$$
$$\widetilde{L} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle = 0\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (2) *и* $\alpha \neq 0$. *Для того чтобы матрица* $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *была решением системы* (1), *необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$H = \frac{1}{\alpha} b c^T + \sum_{k=1}^{n-1} z_k v_k^T, \tag{4}$$

где z_k — *произвольные векторы из* L_0 *и* $\{v_k\}$ — *любой базис подпространства* $\widetilde{L}$.

Доказательство. Необходимость. Возьмём решение H системы (1). Положим
$$\widetilde{H} = H - \frac{1}{\alpha} bc^T. \tag{5}$$
Очевидно, что $\widetilde{H}x = \mathbb{O}$. Значит, строки $\tilde{h}_i$ матрицы $\widetilde{H}$ принадлежат подпространству $\widetilde{L}$. Их можно разложить по любому базису $\{v_k\}$ этого подпространства:
$$\tilde{h}_i = \sum_{k=1}^{n-1} z_{ik} v_k^T, \quad i \in 1 : m.$$
Обозначим $z_k = (z_{1,k}, z_{2,k}, \ldots, z_{m,k})^T$. Тогда матрицу $\widetilde{H}$ можно представить в виде
$$\widetilde{H} = \sum_{k=1}^{n-1} z_k v_k^T. \tag{6}$$

Теперь умножим обе части равенства (5) слева на u^T. Получим $u^T\widetilde{H} = \mathbb{O}$. Далее, умножим слева на u^T обе части равенства (6). Придем к формуле
$$\sum_{k=1}^{n-1} \langle u, z_k\rangle v_k^T = \mathbb{O}^T.$$
В силу линейной независимости векторов v_k все коэффициенты $\langle u, z_k\rangle$ равны нулю. Другими словами, все векторы z_k принадлежат подпространству L_0.

Осталось объединить формулы (5) и (6).

Достаточность непосредственно следует из определений параметра α и подпространств $L_0, \widetilde{L}$.

Теорема доказана. □

3. Приложение. Теорема 1 позволяет находить решения системы (1) со специальными свойствами.

Следуя [1], рассмотрим экстремальную задачу
$$\begin{gathered} \|H\|^2 := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (h_{ij})^2 \to \min, \\ Hx = b, \quad u^T H = c^T, \quad H \in \mathbb{R}^{m\times n}. \end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, требуется найти решение системы (1) с наименьшим квадратом евклидовой нормы.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (2) *и* $\alpha \neq 0$. *Тогда задача* (7) *имеет единственное решение*
$$H^* = \frac{1}{\alpha}\left(bc^T - \left(b - \frac{\alpha u}{\|u\|^2}\right)\left(c - \frac{\alpha x}{\|x\|^2}\right)^T \right). \tag{8}$$

При этом
$$\|H^*\|^2 = \frac{1}{\alpha^2}\left(\|b\|^2\|c\|^2 - \left(\|b\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|u\|^2}\right)\left(\|c\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2}\right)\right). \tag{9}$$

Доказательство. Нормируем вектор x, положив $\hat{x} = x/\|x\|$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ введём любой ортонормированный базис вида

$$\{\hat{x}, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}. \tag{10}$$

В этом случае система векторов $\{v_1, v_2, \ldots v_{n-1}\}$ образует ортонормированный базис в подпространстве $\widetilde{L}$. Именно его мы будем использовать в представлении (4) матрицы H, удовлетворяющей ограничениям задачи (7).

Разложим вектор c по базису (10). Запишем

$$c = a_0\hat{x} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k v_k, \tag{11}$$

где $a_0 = \langle c, \hat{x}\rangle = \frac{\alpha}{\|x\|}, a_k = \langle c, v_k\rangle$. Подставим указанное выражение для c в формулу (4). Получим

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{\alpha} b\left(a_0\hat{x}^T + \sum_{k=1}^{n-1} a_k v_k^T\right) + \sum_{k=1}^{n-1} z_k v_k^T = \\ = \frac{a_0}{\alpha} b\hat{x}^T + \sum_{k=1}^{n-1}\left(z_k + \frac{a_k}{\alpha} b\right) v_k^T. \end{aligned} \tag{12}$$

В правой части равенства (12) стоит сумма одноранговых матриц. Ее можно свернуть. Воспользуемся формулой

$$A[M,N] \times P[N,N] = \sum_{k\in N} A[M,k] \times P[k,N]. \tag{13}$$

Обозначим через A матрицу со столбцами

$$\frac{a_0}{\alpha} b,\ \ z_1 + \frac{a_1}{\alpha} b, \ldots, z_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{\alpha} b$$

и через P — матрицу со строками

$$\hat{x}^T, v_1^T, \ldots, v_{n-1}^T.$$

На основании (13) придем к разложению $H = AP$.

Отметим, что матрица P является ортогональной ($PP^T = E$, где E — единичная матрица порядка n). Отсюда следует, что $HH^T = AA^T$.

Обозначим через $tr(C)$ сумму диагональных элементов квадратной матрицы C. Как известно, $\|H\|^2 = \mathrm{tr}(HH^T)$, поэтому

$$\begin{aligned} \|H\|^2 = \mathrm{tr}(HH^T) = \mathrm{tr}(AA^T) = \mathrm{tr}(A^T A) = \\ = \left(\frac{a_0}{\alpha}\right)^2 \|b\|^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\|z_k + \frac{a_k}{\alpha} b\right\|^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Возвращаясь к постановке задачи (7), приходим к выводу, что она сводится к решению экстремальной задачи вида

$$\begin{aligned} &\left\|z + \frac{a_k}{\alpha} b\right\|^2 \to \min, \\ &\langle u, z\rangle = 0,\ z \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \tag{15}$$

то есть к задаче проектирования $n-1$ точек $(-\frac{a_k}{\alpha}b)$ на подпространство L_0. Решение такой задачи известно [2, с. 217], [3, с. 52]:

$$z_k^* = \left(E - \frac{uu^T}{\|u\|^2}\right)\left(-\frac{a_k}{\alpha}b\right) = -\frac{a_k}{\alpha}\left(b - \frac{\alpha u}{\|u\|^2}\right).$$

Подставив это выражение в формулу (4), получим единственное решение задачи (7):

$$H^* = \frac{1}{\alpha}bc^T - \frac{1}{\alpha}\left(b - \frac{\alpha u}{\|u\|^2}\right)\sum_{k=1}^{n-1} a_k v_k^T. \tag{16}$$

Согласно (4) и определению a_0, имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k v_k^T = (c - a_0\hat{x})^T = \left(c - \frac{\alpha x}{\|x\|^2}\right)^T. \tag{17}$$

Значит,

$$H^* = \frac{1}{\alpha}bc^T - \frac{1}{\alpha}\left(b - \frac{\alpha u}{\|u\|^2}\right)\left(c - \frac{\alpha x}{\|x\|^2}\right)^T,$$

что соответствует представлению (8).

Вычислим $\|H^*\|^2$. Из (14) при $z_k = z_k^*$ следует, что

$$\|H^*\|^2 = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{1}{\|u\|^2}\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2.$$

Воспользуемся тем, что в силу (11) и определения a_0 справделиво равенство

$$\|c\|^2 = \frac{\alpha^2}{\|x\|^2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2.$$

Получим

$$\begin{aligned}\|H^*\|^2 &= \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{1}{\|u\|^2}\left(\|c\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2}\right) = \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\|b\|^2\left(\|c\|^2 - \left(\|c\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2}\right)\right) + \frac{1}{\|u\|^2}\left(\|c\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2}\right) = \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\|b\|^2\|c\|^2 - \frac{1}{\alpha^2}\left(\|c\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|x\|^2}\right)\left(\|b\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|u\|^2}\right).\end{aligned}$$

Это соответствует формуле (9).

Теорема доказана. □

4. Случай $\alpha = 0$**.** Раскроем скобки в формуле (8). Получим

$$H^* = \frac{bx^T}{\|x\|^2} + \frac{uc^T}{\|u\|^2} - \frac{\alpha^2 ux^T}{\|u\|^2\|x\|^2}.$$

Ясно, что при $\alpha \to 0$ матрица H^* имеет предел, равный матрице H_0 вида

$$H_0 = \frac{bx^T}{\|x\|^2} + \frac{uc^T}{\|u\|^2}. \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что при выполнении условий

$$x \neq \mathbb{O}, u \neq \mathbb{O}, \quad c^T x = u^T b = 0 \tag{19}$$

матрица H_0 является частным решением системы (1).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (19). *Для того чтобы матрица* H *была решением системы* (1), *необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$H = \frac{bx^T}{\|x\|^2} + \frac{uc^T}{\|u\|^2} + \sum_{k=1}^{n-1} z_k v_k^T, \tag{20}$$

где z_k *— произвольные векторы из* L_0 *и* $\{v_k\}$ *— любой базис пространства* $\widetilde{L}$.

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 1. Отличие лишь в том, что вместо частного решения H_0 системы (1) вида (3) нужно брать частное решение H_0 вида (18).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (19). *Тогда задача* (7) *имеет единственное решение — матрицу* H_0 *вида* (18). *При этом*

$$\|H_0\|^2 = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|c\|^2}{\|u\|^2}. \tag{21}$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2. Подставив выражение для c из формулы (11) в представление (20), получим

$$H = \left(\frac{b}{\|x\|} + \frac{a_0 u}{\|u\|^2} \right) \hat{x}^T + \sum_{k=1}^{n-1} \left(z_k + \frac{a_k u}{\|u\|^2} \right) v_k^T.$$

Минимизация $\|H\|^2$ сводится к минимизации следующей суммы

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\| z_k + \frac{a_k u}{\|u\|^2} \right\|^2$$

при ограничениях $\langle u, z_k \rangle = 0, k \in 1 : n-1$. Эта задача распадается на $n-1$ независимых подзадач

$$\begin{gathered} \left\| z_k + \frac{a_k u}{\|u\|^2} \right\|^2 \to \min, \\ \langle u, z_k \rangle = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Так как в данном случае

$$\left\| z_k + \frac{a_k u}{\|u\|^2} \right\|^2 = \|z_k\|^2 + \frac{a_k^2}{\|u\|^2},$$

то решением задач (22) при всех $k \in 1 : n-1$ является нулевой вектор. На основании (20) заключаем, что единственным решением задачи (7) будет матрица H_0 вида (18).

Формула (21) выводится непосредственно. В силу равенства $c^T u = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|H_0\|^2 &= \mathrm{tr}\left(\left(\frac{bx^T}{\|x\|^2} + \frac{uc^T}{\|u\|^2} \right) \left(\frac{xb^T}{\|x\|^2} + \frac{cu^T}{\|u\|^2} \right) \right) = \\ &= \mathrm{tr}\left(\frac{bb^T}{\|x\|^2} + \frac{\|c\|^2 uu^T}{\|u\|^4} \right) = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|c\|^2}{\|u\|^2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

5. Заключение. Решение задачи (7) в другом виде и другим методом было получено в работе [1]. Нам удалось свести эту задачу к проектированию вектора на подпространство. Упрощения связаны с разделением случаев $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$.

Теорема 2 является лишь одним из возможных приложений теоремы 1.

Список литературы

[1] Ерохин В.И. Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 587–601.

[2] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Часть I. М.: МЦНМО, 2011. 620 с.

[3] Малоземов В.Н. Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 80 с.