

ЧЕБЫШЕВСКАЯ ПРОЕКЦИЯ ТОЧКИ НА МНОГОГРАННОЕ МНОЖЕСТВО*

В. И. Зоркальцев

vizork@mail.ru

Н. А. Соловьева

4vinyo@gmail.com

11 декабря 2025 г.

1°. Зададим матрицу A размера $m \times n$, в каждой строке которой есть ненулевые элементы. Возьмем произвольный вектор b из $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}.$$

Это выпуклое многогранное множество. Будем считать, что для заданных A и b множество X непусто.

Поставим задачу: требуется минимизировать чебышевскую норму на многогранном множестве X ,

$$\max_{j=1,\dots,n} |x[j]| \rightarrow \min_{x \in X}. \quad (1)$$

Решение этой задачи может быть не единственным. Задачу (1) можно свести к задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n A[i, j]x[j] &\geq b[i], \quad i = 1, \dots, m, \\ \alpha + x[j] &\geq 0, \quad \alpha - x[j] \geq 0, \quad j \in 1 : n. \end{aligned}$$

ПРИМЕР. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим многогранное множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x[2] \geq 1\}$$

(см. рис. 1). Найдём чебышевскую проекцию начала координат на X :

$$\max\{|x[1]|, |x[2]|\} \rightarrow \min_{x \in X}.$$

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML»
<http://oml.cmlaboratory.com/>

Перепишем последнюю задачу в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \min, \\ x[2] &\geq 1, \\ \alpha + x[1] &\geq 0, \quad \alpha - x[1] \geq 0, \\ \alpha + x[2] &\geq 0, \quad \alpha - x[2] \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Переменными здесь являются α , $x[1]$, $x[2]$. Опишем все множество решений задачи (2):

$$\alpha = 1, \quad x[2] = 1, \quad x[1] \in [-1, 1].$$

Ясно, что, к примеру, концы отрезка решений проигрывают в содержательности точке

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

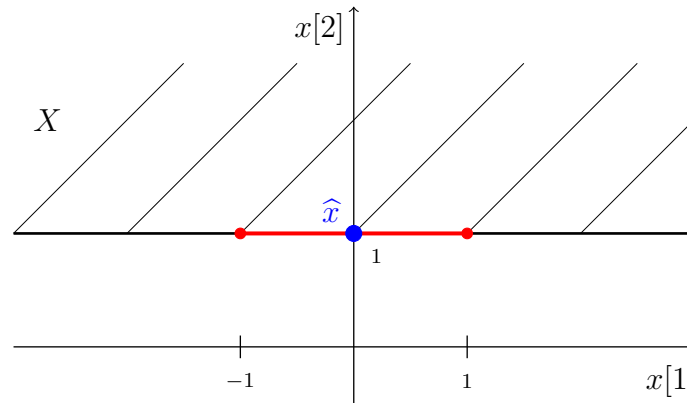


Рис. 1

Чтобы выбрать среди всех чебышевских проекций в некотором смысле самую естественную, в статье В. И. Зоркальцева [1] предлагается действовать следующим образом. На всем множестве решений активным является ограничение–неравенство $x[2] = 1$. Зафиксируем значение $x[2] = 1$ и будем минимизировать $|x[1]|$:

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \min, \\ x[2] &= 1, \\ \alpha + x[1] &\geq 0, \quad \alpha - x[1] \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Решение этой задачи выглядит так:

$$\alpha = 0, \quad x[1] = 0.$$

В результате объединения решений двух последовательных задач линейного программирования (2) и (3) получится такая чебышевская проекция начала координат на многогранное множество: $x[1] = 0$, $x[2] = 1$. Заметим, что это решение совпадает с вектором $\hat{x}$.

2°. В дальнейшем нам потребуется понятие *минимального набора активных ограничений*. Проиллюстрируем его с помощью простого примера.

ПРИМЕР. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} x[1] + x[2] &\rightarrow \min, \\ x[1] - x[2] &\geq -2, \end{aligned} \tag{4}$$

$$-x[1] + x[2] \geq -2, \tag{5}$$

$$x[1] + x[2] \geq 2. \tag{6}$$

Множество планов X изображено на рис. 2. Любая точка замкнутого отрезка с концами M и L является оптимальным планом. В точке M активными ограничениями являются неравенства (5), (6) (точка выделена красным цветом). В точке L активными ограничениями являются неравенства (4), (6) (точка выделена красным цветом). Во всех остальных точках отрезка, кроме концов, активно лишь третье ограничение (6). Решением задачи с минимальным набором активных ограничений является произвольная точка отрезка $[M, L]$, кроме концов. Заметим, что оптимальные планы с минимальным набором активных ограничений — это относительно внутренние точки множества решений (на рис. 2 выделены синим цветом).

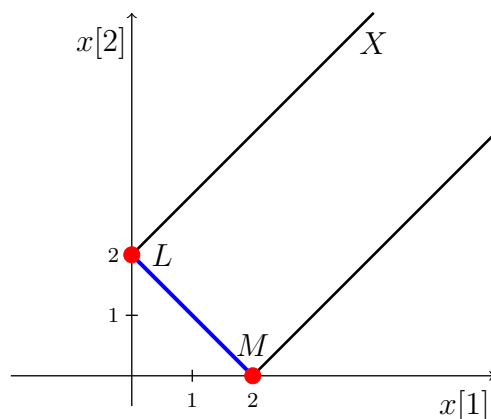


Рис. 2

3°. Перейдем к описанию метода вычисления наиболее содержательной чебышевской проекции начала координат на многогранное множество. Алгоритм состоит в последовательном решении задач линейного программирования с номерами $k = 1, \dots, K$. Общее количество K задач определяется в ходе работы алгоритма.

Все множество $(1 : n)$ индексов разбивается на два непересекающихся подмножества,

$$(1 : n) = J^{(k)} \cup N^{(k)}, \quad J^{(k)} \cap N^{(k)} = \emptyset.$$

Компоненты вектора x с индексами $j \in N^{(k)}$ зафиксируем, а компоненты x с индексами $j \in J^{(k)}$ будем варьировать. Задача линейного программирования с номером k выглядит так:

$$\alpha \rightarrow \min, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^n A[i, j]x[j] \geq b[i], \quad i = 1, \dots, m, \tag{8}$$

$$\alpha + x[j] \geq 0, \quad \alpha - x[j] \geq 0, \quad j \in J^{(k)}, \tag{9}$$

$$x[j] = \hat{x}[j], \quad j \in N^{(k)}. \tag{10}$$

Величины $\hat{x}[j]$, $j \in N^{(k)}$, берутся с предыдущего этапа вычислений. Переменными в задаче являются $x[j]$, $j \in J^{(k)}$, и α .

Положим $k = 1$. Множество индексов $(1 : n)$ разобьем на два непересекающихся подмножества:

$$J^{(1)} = (1 : n), \quad N^{(1)} = \emptyset, \quad (1 : n) = J^{(1)} \cup N^{(1)}.$$

Естественно, что на первой итерации зафиксированных переменных еще нет, $N^{(1)} = \emptyset$. Поэтому задача (7)–(10) при $k = 1$ примет вид

$$\alpha \rightarrow \min, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^n A[i, j]x[j] \geq b[i], \quad i = 1, \dots, m, \tag{12}$$

$$\alpha + x[j] \geq 0, \quad \alpha - x[j] \geq 0, \quad j \in J^{(1)}. \tag{13}$$

Переменными здесь являются величины α и $x[j]$, $j \in J^{(1)}$. Для любого $x \in X$ найдется достаточно большое α , при котором справедливы неравенства (13). То есть, множество планов задачи (11)–(13) непусто. Целевая функция ограничена снизу нулем. Значит, задача (11)–(13) имеет решение x^* , α^* .

На решении x^* , α^* обязательно будет активно по крайней мере одно ограничение–неравенство вида (13). Предположим противное:

$$\alpha^* + x^*[j] > 0, \quad \alpha^* - x^*[j] > 0, \quad j \in J^{(1)}. \quad (14)$$

Пара x^* , α^* принадлежит множеству планов, поэтому $Ax^* \geq b$. На основании формулы (14) имеем

$$\alpha^* > \max_{j \in J^{(1)}} \{|x^*[j]|\}.$$

Рассмотрим новый план задачи (11)–(13) x^* , $\tilde{\alpha}$, где

$$\tilde{\alpha} = \max_{j \in J^{(1)}} \{|x^*[j]|\} < \alpha^*.$$

Вектор x^* и число $\tilde{\alpha}$ удовлетворяют ограничениям (12) и (13). Получен план задачи (11)–(13) со строго меньшим значением целевой функции, что противоречит оптимальности x^* , α^* . Таким образом, на любом решении x^* , α^* задачи (11)–(13) будет активно хотя бы одно из ограничений–неравенств вида (13).

Если решение задачи единственно, положим $x^{(1)} := x^*$, $\alpha^{(1)} := \alpha^*$. Рассмотрим случай, когда оптимальный план не единственный. Заметим, что величина α^* на всех оптимальных планах одинакова. Примем $\alpha^{(1)} := \alpha^*$. Выберем среди всех решений x^* вектор с минимальным набором активных ограничений–неравенств вида (13), положим $x^{(1)} := x^*$.

В конце первой итерации имеем оптимальный план $x^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$ задачи (11)–(13), на котором будет активно по крайней мере одно ограничение–неравенство вида (13).

Допустим, что алгоритм сделал k шагов ($k \geq 1$). Перейдем к описанию итерации с номером $k + 1$.

Уже имеется решение задачи (7)–(10) с предыдущей, k -й, итерации — вектор $x^{(k)}$ и число $\alpha^{(k)}$. Для пары $x^{(k)}$, $\alpha^{(k)}$ активно по меньшей мере одно ограничение–неравенство вида (9). (В противном случае величину $\alpha^{(k)}$ можно было бы уменьшить, оставаясь в множестве планов задачи (7)–(10), что противоречит оптимальности $\alpha^{(k)}$.) Кроме того, известны $\hat{x}[j]$ при всех $j \in N^{(k)}$.

Введем обозначения для множеств активных ограничений–неравенств (9) на решении $x^{(k)}$ задачи с k -й итерации:

$$M^{(k)} = \{j \in J^{(k)} \mid x^{(k)}[j] = -\alpha^{(k)} \text{ или } x^{(k)}[j] = \alpha^{(k)}\}.$$

Множество $M^{(k)}$ непусто. Набор индексов $M^{(k)}$ исключим из множества $J^{(k)}$ и добавим к множеству $N^{(k)}$:

$$\begin{aligned} J^{(k+1)} &= J^{(k)} \setminus M^{(k)}, \\ N^{(k+1)} &= N^{(k)} \cup M^{(k)}. \end{aligned}$$

Зафиксируем значения переменных

$$\widehat{x}[j] = x^{(k)}[j], \quad j \in M^{(k)}. \quad (15)$$

Если множество $J^{(k+1)}$ пусто, то $J^{(k)} = M^{(k)}$. Значит,

$$N^{(k+1)} = N^{(k)} \cup M^{(k)} = N^{(k)} \cup J^{(k)} = (1 : n).$$

Величины $\widehat{x}[j]$ при $j \in N^{(k)}$ известны с предыдущей итерации, величины $\widehat{x}[j]$ при $j \in M^{(k)}$ определены равенством (15). Таким образом, имеются все значения $\widehat{x}[j]$, $j \in 1 : n$. Полагаем $K = k$. Алгоритм заканчивает работу, на выходе получен вектор $\widehat{x}$.

Допустим теперь, что $J^{(k+1)} \neq \emptyset$. В данный момент $\widehat{x}[j]$ известны при всех $j \in N^{(k+1)} = N^{(k)} \cup M^{(k)}$. Значения $\widehat{x}[j]$, $j \in N^{(k)}$, взяты с предыдущей итерации, а значения $\widehat{x}[j]$, $j \in M^{(k)}$, определены равенством (15).

Поставим экстремальную задачу

$$\alpha \rightarrow \min, \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^n A[i, j]x[j] \geq b[i], \quad i = 1, \dots, m, \quad (17)$$

$$\alpha + x[j] \geq 0, \quad \alpha - x[j] \geq 0, \quad j \in J^{(k+1)}, \quad (18)$$

$$x[j] = \widehat{x}[j], \quad j \in N^{(k+1)}. \quad (19)$$

Решение задачи (16)–(19) с минимальным набором активных ограничений вида (18) обозначим $x^{(k+1)}$, $\alpha^{(k+1)}$.

Итерация с номером $k+1$ закончена. В конце итерации, кроме $x^{(k+1)}$, $\alpha^{(k+1)}$, известны значения $\widehat{x}[j]$ при $j \in N^{(k+1)}$.

Описание алгоритма завершено.

Поскольку при всех k множество $M^{(k)}$ непусто, мощность множества $J^{(k)}$ строго убывает от итерации к итерации. Значит, через конечное число шагов обязательно возникнет ситуация, когда $M^{(k)} = J^{(k)}$ и, следовательно, $J^{(k+1)} = \emptyset$. Это будет последний этап вычислений по алгоритму.

Вектор $\widehat{x}$, полученный в результате работы описанного алгоритма, предлагается назвать *чебышевской проекцией начала координат в $\mathbb{R}^n$ на многогранное множество X* .

4°. Проиллюстрируем работу алгоритма на примере.

Пусть многогранное множество X в пространстве $\mathbb{R}^3$ задано неравенствами вида $Ax \geq b$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $k = 1$. Зададим

$$J^{(1)} = \{1, 2, 3\}, \quad N^{(1)} = \emptyset.$$

Поставим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^3 A[i, j]x[j] &\geq b[i], \quad i = 1, \dots, 5, \\ \alpha + x[j] &\geq 0, \quad \alpha - x[j] \geq 0, \quad j \in J^{(1)}. \end{aligned}$$

Множество ее решений описывается соотношениями

$$\alpha = 1, \quad x[1] \in [-1, 1], \quad x[2] = 1, \quad x[3] = 1.$$

Выберем относительно внутреннюю точку грани, на которой достигается экстремальное значение целевой функции $\alpha = 1$. Это и будет оптимальный вектор $x^{(1)}$ с минимальным набором активных ограничений. Можно, к примеру, взять

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этом $\alpha^{(1)} = 1$. Первая итерация завершена.

Положим $k = 2$. Множество активных ограничений примет вид

$$M^{(1)} = \{2, 3\}.$$

Следовательно,

$$J^{(2)} = J^{(1)} \setminus M^{(1)} = \{1\}, \quad N^{(2)} = N^{(1)} \cup M^{(1)} = \{2, 3\}.$$

Зафиксируем значения

$$\hat{x}[2] = x^{(1)}[2] = 1, \quad \hat{x}[3] = x^{(1)}[3] = 1.$$

Так как $J^{(2)} \neq \emptyset$, вычисления продолжаются.

Запишем экстремальную задачу

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^3 A[i, j]x[j] &\geq b[i], \quad i = 1, \dots, 5, \\ \alpha + x[j] &\geq 0, \quad \alpha - x[j] \geq 0, \quad j \in J^{(2)}, \\ x[j] &= \hat{x}[j], \quad j \in N^{(2)}. \end{aligned}$$

Подробнее,

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^3 A[i, j]x[j] &\geq b[i], \quad i = 1, \dots, 5, \\ \alpha + x[1] &\geq 0, \quad \alpha - x[1] \geq 0, \\ x[2] &= 1, \quad x[3] = 1. \end{aligned}$$

Единственное решение этой задачи выглядит так:

$$\alpha = 0, \quad x[1] = 0, \quad x[2] = 1, \quad x[3] = 1.$$

Примем

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этом $\alpha^{(2)} = 0$. Вторая итерация завершена.

Положим $k = 3$. Множество активных ограничений примет вид

$$M^{(2)} = \{1\}.$$

Следовательно,

$$J^{(3)} = J^{(2)} \setminus M^{(2)} = \emptyset, \quad N^{(3)} = N^{(2)} \cup M^{(2)} = \{1, 2, 3\}.$$

Зафиксируем значение

$$\hat{x}[1] = x^{(2)}[1] = 0.$$

Алгоритм завершил работу, построен вектор

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Зоркальцев В. И. *Чебышевские проекции на полиэдр*. Журнал вычислительной и прикладной математики. Том 136. № 2 (2021). С. 17–33.
2. Зоркальцев В. И. *Проекции точки на полиэдр*. Журнал вычислительной математики и математической физики. Том 53. № 1 (2013). С. 4–19.