ТЕОРЕМА ФАНЬ–ЦЗЫ И ВЫПУКЛЫЕ ОБОЛОЧКИ*

В. Н. Малоземов

v.malozemov@spbu.ru

12 февраля 2026 г.

1°. Рассмотрим систему линейных неравенств

$$Ax \geqslant b, \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — произвольная матрица и $b \in \mathbb{R}^m$ — произвольный вектор. Справедливо следующее утверждение (см., например, [1, с. 25]).

ТЕОРЕМА 1 (Фань-Цзы). *Система неравенств* (1) *совместна тогда и только тогда, когда любое неотрицательное решение* $u \geqslant \mathbb{O}$ *однородной системы уравнений* $A^T u = \mathbb{O}$ *удовлетворяет условию* $\langle b, u\rangle \leqslant 0$.

Эта теорема позволяет выяснить, когда выпуклые оболочки двух конечных множеств в евклидовом пространстве не имеют общих точек.

2°. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задано конечное множество $P = \{p_j\}_{j=1}^m$, $m \geqslant 2$. *Выпуклой оболочкой* множества P называется совокупность точек x вида

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda[j] p_j,$$

где коэффициенты $\lambda[j]$ неотрицательны и в сумме равны единице.

Рассмотрим два множества

$$P_1 = \{p_j\}_{j=1}^{s} \quad \text{и} \quad P_2 = \{p_j\}_{j=s+1}^{m}, \quad s \in 1 : (m-1).$$

Выпуклые оболочки этих множеств обозначим через G_1 и G_2 соответственно.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы выполнялось условие* $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, *необходимо и достаточно, чтобы нашлись вектор* $w \in \mathbb{R}^n$ *и вещественное число* β, *такие, что*

$$\begin{aligned} \langle w, p_j\rangle + \beta &\geqslant 1 \quad \text{при } j \in 1 : s,\\ \langle w, p_j\rangle + \beta &\leqslant -1 \quad \text{при } j \in (s+1) : m. \end{aligned} \tag{2}$$

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» `http://oml.cmlaboratory.com/`

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Нетрудно понять, что неравенства (2) равносильны следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \langle w, x\rangle + \beta &\geqslant 1 \quad \text{при } x \in G_1, \\ \langle w, x\rangle + \beta &\leqslant -1 \quad \text{при } x \in G_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Неравенства (3) гарантируют, что множества G_1 и G_2 не имеют общих точек.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть выполнено условие $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Покажем, что найдутся вектор $w \in \mathbb{R}^n$ и число β, при которых справедливы неравенства (2).

Предварительно перепишем эти неравенства в компактном виде. Введем вектор $\xi \in \mathbb{R}^m$ с компоненами

$$\xi[j] = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in 1 : s, \\ -1 & \text{при } j \in (s+1) : m. \end{cases}$$

Обозначим

$$a_j = \xi[j] \begin{pmatrix} p_j \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} w \\ \beta \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях неравенства (2) примут вид

$$\langle a_j, g\rangle \geqslant 1, \quad j \in 1 : m.$$

Сделаем еще одно упрощение. Введем матрицу A со строками $a_1^T, a_2^T, \ldots, a_m^T$ и вектор $b \in \mathbb{R}^m$, все компоненты которого равны единице. Придем к системе неравенств

$$Ag \geqslant b. \tag{4}$$

Итак, нужно доказать, что система (4) совместна. Допустим противное. По теореме Фань–Цзы найдется вектор $u \in \mathbb{R}^m$ со свойствами

$$A^T u = \mathbb{O}, \quad u \geqslant \mathbb{O}, \quad \langle b, u\rangle > 0.$$

В частности,

$$\sum_{j=1}^{m} u[j] a_j = \mathbb{O}.$$

Это означает, что

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{s} u[j] p_j - \sum_{j=s+1}^{m} u[j] p_j = \mathbb{O}, \\ \sum_{j=1}^{s} u[j] - \sum_{j=s+1}^{m} u[j] = 0. \end{gathered}$$

При этом $u[j] \geqslant 0$ при всех $j \in 1:m$ и

$$\sum_{j=1}^{s} u[j] + \sum_{j=s+1}^{m} u[j] > 0.$$

Введем обозначения

$$t := \sum_{j=1}^{s} u[j] = \sum_{j=s+1}^{m} u[j] > 0,$$
$$\lambda[j] = \tfrac{1}{t}\, u[j], \quad j \in 1:m.$$

Получим

$$x := \sum_{j=1}^{s} \lambda[j] p_j = \sum_{j=s+1}^{m} \lambda[j] p_j,$$
$$\sum_{j=1}^{s} \lambda[j] = 1, \quad \lambda[j] \geqslant 0 \text{ при } j \in 1:s,$$
$$\sum_{j=s+1}^{m} \lambda[j] = 1, \quad \lambda[j] \geqslant 0 \text{ при } j \in (s+1):m.$$

Отсюда следует, что точка x принадлежит как выпуклой оболочке G_1, так и выпуклой оболочке G_2. Это противоречит условию $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. При выполнении неравенств (2) необходимо $w \neq \mathbb{O}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврурин М. К., Малоземов В. Н. Экстремальные задачи с линейными ограничениями. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.