КОСАЯ ПРОЕКЦИЯ*

В. Н. Малоземов
v.malozemov@spbu.ru

А. В. Петров
aleksndr19@rambler.ru

12 февраля 2026 г.

Пусть b, u — векторы из $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию

$$\alpha := u^T b \neq 0.$$

Введем подпространство $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle = 0\}$.

Косой проекцией вектора $c \in \mathbb{R}^n$ вдоль вектора b на подпространство L называется точка $\hat{c}$ вида $\hat{c} = c + \lambda b$, принадлежащая L.

Из уравнения $\langle u, c + \lambda b \rangle = 0$ находим

$$\lambda = -\frac{\langle u, c \rangle}{\langle u, b \rangle}.$$

Значит,

$$\hat{c} = c - b\frac{\langle u, c \rangle}{\alpha} = c - \frac{(bu^T)c}{\alpha} = (E - \frac{1}{\alpha}bu^T)c,$$

где E — единичная матрица порядка n. Обозначив

$$B = E - \frac{1}{\alpha}bu^T,$$

придем к формуле $\hat{c} = Bc$. Матрица B называется матрицей косого проектирования.

При $b = u$ матрица B становится матрицей ортогонального проектирования

$$P = E - \frac{uu^T}{\|u\|^2}.$$

Точка $c_0 = Pc$ является ортогональной проекцией вектора c на подпространство L.

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» http://oml.cmlaboratory.com/

Нетрудно строго доказать, что c_0 — единственное решение экстремальной задачи

$$\begin{aligned} \|x-c\|^2 &\to \min, \\ \langle u, x\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Для этого достаточно воспользоваться неравенством Коши–Буняковского. Действительно, пусть вектор x удовлетворяет ограничению задачи (1), то есть пусть $x \in L$. Имеем

$$\langle u, x-c\rangle = -\langle u, c\rangle.$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$|\langle u, c\rangle|^2 = |\langle u, x-c\rangle|^2 \leqslant \|u\|^2\|x-c\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\|x-c\|^2 \geqslant \frac{|\langle u, c\rangle|^2}{\|u\|^2}. \tag{2}$$

Как известно, равенство в неравенстве (2) достигается тогда и только тогда, когда

$$x - c = \lambda u.$$

Умножив скалярно на u, получим $-\langle u, c\rangle = \lambda\|u\|^2$, так что

$$\lambda = -\frac{\langle u, c\rangle}{\|u\|^2}.$$

Вектор

$$c_0 = c + \lambda u = c - u\frac{\langle u, c\rangle}{\|u\|^2} = c - \frac{uu^T}{\|u\|^2}c = \left(E - \frac{uu^T}{\|u\|^2}\right)c = Pc$$

будет единственным решением задачи (1). При этом

$$\|c_0 - c\|^2 = \frac{|\langle u, c\rangle|^2}{\|u\|^2} =: \mu. \tag{3}$$

Вернемся к матрице B и укажем её основные свойства.

1) $u^TB = \mathbb{O}$, $Bb = \mathbb{O}$.

2) Вектор Bx принадлежит подпространству L при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

3) Равенство $Bx = x$ справедливо тогда и только тогда, когда $x \in L$. В частности, $Bc_0 = c_0$.

4) Равенство $Bx = \mathbb{O}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x = \lambda b$ при некотором вещественном λ.

Свойство 1 следует из определений матрицы B и числа α.

Свойство 2 основано на равенстве $u^T B = \mathbb{O}$.

В свойстве 3 используется формула

$$Bx = \left(E - \frac{1}{\alpha} b u^T\right) x = x - \frac{1}{\alpha} b(u^T x). \tag{4}$$

Если $x \in L$, то $Bx = x$. Наоборот, пусть $Bx = x$. По свойству 2 имеем $Bx \in L$. Значит, и $x \in L$.

Свойство 4 проверяется так. Если $Bx = \mathbb{O}$, то, согласно (4), $x = \lambda b$, где $\lambda = \frac{1}{\alpha}(u^T x)$. То, что $B(\lambda b) = \mathbb{O}$, очевидно в силу свойства 1.

Рассмотрим экстремальную задачу, тесно связанную с задачей (1):

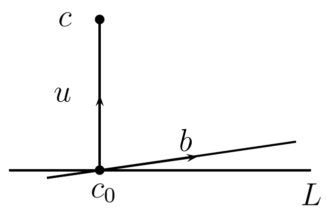
$$Q(x) := \|Bx - c\|^2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}. \tag{5}$$

ТЕОРЕМА 1. *Множеством решений задачи* (5) *служит прямая*

$$x = c_0 + \lambda b, \tag{6}$$

где $c_0 = Pc$ *и* λ *— произвольное вещественное число.*

Доказательство. См. рисунок.



Напомним, что $Bc_0 = c_0$, поэтому

$$Q(c_0) = \|Bc_0 - c\|^2 = \|c_0 - c\|^2.$$

Согласно (3), $Q(c_0) = \mu$. Вместе с тем, в силу свойства 2 матрицы B, неравенства (2) и определения μ имеем $Q(x) \geqslant \mu$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Значит, c_0 — решение задачи (5).

Теперь возьмём вектор x вида (6). Запишем

$$Q(x) = \|B(c_0 + \lambda b) - c\|^2 = \|c_0 - c\|^2 = \mu.$$

Получили, что x — решение задачи (5).

Наоборот, пусть x — решение задачи (5). В силу единственности ортогональной проекции точки c на L необходимо $Bx = c_0$. Из равенства $B(x - c_0) = \mathbb{O}$ по свойству 4 матрицы B следует, что $x - c_0 = \lambda b$ при некотором вещественном λ, то есть $x = c_0 + \lambda b$.

Теорема доказана. $\square$

По существу, получено решение вырожденной квадратичной задачи.