Узкий коридор устойчивых решений в расширенной модели Осипова–Ланчестера с постоянной суммарной численностью

Сергей Салищев

aifoundry.org

сентябрь 2026

Постановка задачи

Книга «Узкий коридор» [1] описывает баланс сил государства и общества, но не даёт математической модели.

Классическая модель Осипова–Ланчестера [2, 3]: $R(t), B(t) \geq 0$ — силы двух сторон (государства и общества), α — коэффициент воздействия R на B, β — воздействия B на R. При $\alpha > 0$, $\beta > 0$ она описывает взаимное истощение и *не имеет устойчивых решений*.

Цель: расширить модель на все знаки α, β так, чтобы

- при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ поведение не менялось;
- при $\alpha \leq 0$ или $\beta \leq 0$ появились устойчивые режимы (кооперация).

Обзор литературы

- Осипов–Ланчестер и расширения на партизанские / многосторонние конфликты [4, 5, 6].
- Динамика протестов [7]; дискретная модель взаимных санкций на тех же уравнениях [8]; структурно-демографические циклы [9].
- Дифференциальные игры с ростом [10, 11]; репликатор / Лотка–Вольтерра [12, 13, 14].
- Мягкие модели в социальных науках [15]; уравнение Риккати [16].

Замкнутая система с постоянной суммой и полной классификацией устойчивых режимов, по-видимому, нова.

Модель

Классическая система:

$$\dot{R} = -\beta B, \qquad \dot{B} = -\alpha R.$$

Расширение с постоянной суммарной численностью $N = R + B$:

$$\dot{R} = -\beta B + \mu R, \qquad \dot{B} = -\alpha R + \mu B, \qquad N = \mathrm{const},$$

где нормализующая обратная связь

$$\mu(t) = \frac{\alpha R + \beta B}{N}.$$

При $\mu \equiv 0$ возвращается классическая модель: параметры α, β сохраняют смысл.

Редукция к уравнению Риккати

Лемма (Динамика доли и отношения)

Пусть $x = R/N \in [0,1]$ *и* $y = R/B$ *(при* $B > 0$*). Тогда*

$$\dot{x} = \alpha x^2 - \beta(1-x)^2, \qquad \dot{y} = \alpha y^2 - \beta.$$

При $\alpha \neq 0$ *равновесие*

$$y_* = \sqrt{\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|}, \qquad x_* = \frac{\sqrt{|\beta|}}{\sqrt{|\alpha|} + \sqrt{|\beta|}}$$

существует во внутренней точке iff $\alpha\beta > 0$.

Уравнения для x и y не зависят от μ: относительная динамика та же, что в классической модели. Кроме того, уравнение для x симметрично: если x — решение при (α, β), то $1 - x$ — решение при (β, α).

Явные решения

Теорема (Решения для $y = R/B$)

Уравнение $\dot{y} = \alpha y^2 - \beta$ интегрируется в элементарных функциях при любом сочетании знаков.

- $\alpha > 0$, $\beta > 0$: *равновесие y_* неустойчиво; решение за конечное время уходит к 0 или ∞.*
- $\alpha < 0$, $\beta < 0$: $y(t) \to y_*$ *монотонно, определено при всех $t \geq 0$.*
- $\alpha\beta < 0$: *решение достигает границы за конечное время (тангенс).*
- *Вырожденные случаи $\alpha = 0$ или $\beta = 0$: линейный / рациональный закон.*

Классификация устойчивых режимов

Теорема (Классификация)

Для системы с $R, B \geq 0$, $N > 0$*:*

1. *Область* $R, B \geq 0$ *инвариантна iff* $\alpha \leq 0$, $\beta \leq 0$.
2. *Внутреннее равновесие асимптотически устойчиво при* $\alpha < 0$, $\beta < 0$ *и неустойчиво при* $\alpha > 0$, $\beta > 0$.
3. $\alpha = 0$, $\beta < 0$*: устойчива граница* $B = 0$*;* $\alpha < 0$, $\beta = 0$*: устойчива* $R = 0$ *(сходимость* $O(1/t)$*).*
4. *Если* $\alpha > 0$ *или* $\beta > 0$*, почти все решения достигают границы за конечное время.*

Три устойчивых режима: «демократия», «автократия», «анархия».

Робастность: буферная динамика

Пусть параметры меняются во времени. Тогда даже небольшой выход за границу устойчивого квадранта ($\alpha > 0$ или $\beta > 0$) меняет режим: решение за конечное время достигает границы. Определим условия сохранения режима «демократии».

Следствие (Буферная динамика)

Пусть после нормировки времени $\alpha(t), \beta(t) \in [-1, 0]$ и они отталкиваются от обоих концов этого отрезка со скоростью $\eta > 0$, находясь в буферах ширины $\theta \in (0, 1/2)$. Тогда доля x сохраняет отступ ε от границ 0 и 1:

$$0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{\theta}}{1 + \sqrt{\theta}}.$$

Для устойчивости достаточно, чтобы ни один канал не вырождался.

Робастность при ограниченных возмущениях

Параметры — постоянная часть плюс возмущение: $\alpha(t) = \alpha_* + \delta_\alpha(t)$, $\beta(t) = \beta_* + \delta_\beta(t)$, где $\alpha_*, \beta_* < 0$, $|\delta_\alpha| \le \bar{\delta}_\alpha$, $|\delta_\beta| \le \bar{\delta}_\beta$, $\bar{\delta} := \bar{\delta}_\alpha + \bar{\delta}_\beta$. При заданном отступе ε положим

$$\psi := x - x_*, \qquad m := \min\{x_* - \varepsilon,\ 1 - \varepsilon - x_*\}, \qquad \gamma := 2 \min_{x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} \big(|\alpha_*| x + |\beta_*|(1-x)\big)$$

— отклонение доли, запас вокруг равновесия и скорость возврата к нему.

Теорема (Робастность)

Если выполнено неравенство коридора $\gamma\, m > \bar{\delta}(1-\varepsilon)^2$, то решения с $|\psi(0)| \le m$ остаются в $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, и

$$|\psi(t)| \le e^{-\gamma t}|\psi(0)| + \frac{\bar{\delta}(1-\varepsilon)^2}{\gamma}\big(1 - e^{-\gamma t}\big).$$

Оценка следует из дифференциальной формы неравенства Гронуолла [17]. Допустимое множество — *подквадрант*, а не узкий коридор.

Премия кооперации

Возврат к абсолютным размерам: классическая система как линейная,

$$\dot{z} = Sz, \qquad z = \begin{pmatrix} R \\ B \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема (Экспоненциальная премия кооперации)

- *При* $\alpha < 0$, $\beta < 0$: $\|z(t)\| \sim e^{\sqrt{|\alpha||\beta|}\,t}$.
- *При* $\alpha = 0$ *или* $\beta = 0$: *рост не быстрее линейного.*
- *Пусть* $\tilde{z}$ *— решение при вырожденных параметрах* ($\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = 0$). *Разрыв растёт экспоненциально:* $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log\bigl(\|z(t)\|/\|\tilde{z}(t)\|\bigr) = \sqrt{|\alpha||\beta|} > 0$.

Темп роста — среднее геометрическое каналов. Чего он стоит, модель сама не говорит: это отдельное допущение.

Стоимость кооперации: ключевое допущение

Производится (следствие теоремы): темп роста $\sqrt{|\alpha_*||\beta_*|}$ — среднее геометрическое каналов. **Расходуется** (*постулируется*): сумма $|\alpha_*| + |\beta_*|$. Оба канала черпаются из одной популяции (государство комплектуется из общества), поэтому расходы на рост складываются.

$$q := \frac{\sqrt{|\alpha_*||\beta_*|}}{|\alpha_*| + |\beta_*|} = \frac{y_*}{1 + y_*^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Что обосновано математически, а что выбрано

- При вырождении канала стоимость обязана остаться положительной: односторонняя кооперация ресурс потребляет, но роста не даёт. Само среднее геометрическое стоимостью быть не может.
- Сумма — простейшая такая функция, но её вид из модели не следует.
- Качественный вывод от выбора не зависит: для любой симметричной однородной стоимости, положительной при вырождении (скажем, $\max(|\alpha_*|, |\beta_*|)$), q максимально при балансе и падает с дисбалансом; меняются лишь численные границы.

Требование роста — это ограничение дисбаланса

Потребуем, чтобы рост на единицу стоимости был не ниже заданного: $q \geq \underline{q}$, где $0 < \underline{q} \leq 1/2$.
Величина $q = y_*/(1 + y_*^2)$ зависит только от дисбаланса y_*, не меняется при замене $y_* \mapsto 1/y_*$ (симметрия сторон) и максимальна при $y_* = 1$. Поэтому множество $\{q \geq \underline{q}\}$ — отрезок, симметричный относительно баланса:

$$\frac{1}{\bar{y}} \leq y_* \leq \bar{y}, \qquad \bar{y} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\underline{q}^2}}{2\underline{q}}.$$

Это область достаточного роста: требование ограничивает *отношение* каналов, но не их размер. При $\underline{q} \to 1/2$ она стягивается к диагонали $|\alpha_*| = |\beta_*|$ ($\bar{y} \to 1$), при $\underline{q} \to 0$ раскрывается на весь квадрант ($\bar{y} \to \infty$).

Узкий коридор

Следствие (Клин устойчивого роста)

Пусть дисбаланс каналов ограничен числом $\bar{y} \geq 1$, а возмущения — числом $\bar{\delta}$. Они вырезают из квадранта клин

$$\frac{1}{\bar{y}^2} \leq \frac{|\beta_*|}{|\alpha_*|} \leq \bar{y}^2, \qquad \min\big(|\alpha_*|, |\beta_*|\big) > \underline{c} := \bar{\delta}\,\frac{(1+2\bar{y})^2}{4(1+\bar{y})}.$$

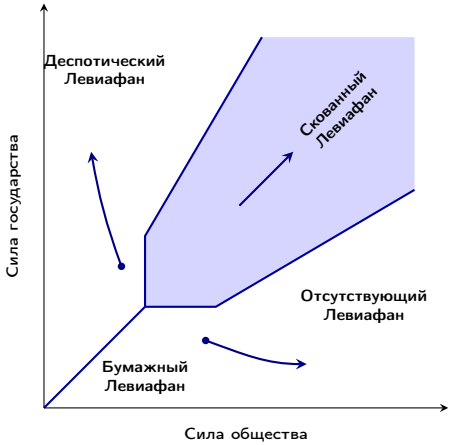
Тогда доля сохраняет отступ $\bar{\varepsilon} = 1/(2(1+\bar{y}))$, а суммарная численность растёт: $N(t) \geq N(0)e^{\nu t}$, где $\nu = \gamma/2 - \bar{\delta} > 0$ и

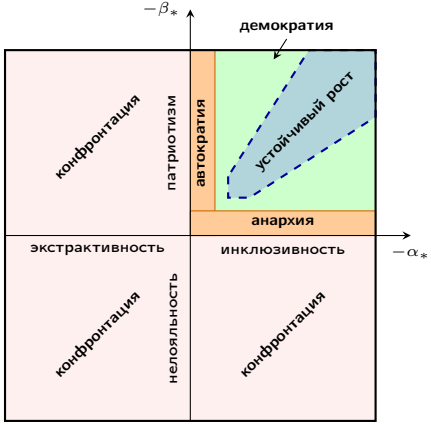
$$\gamma = 2\big[\min(|\alpha_*|, |\beta_*|)(1-\bar{\varepsilon}) + \max(|\alpha_*|, |\beta_*|)\,\bar{\varepsilon}\big]$$

— скорость возврата при отступе $\bar{\varepsilon}$.

Здесь $\bar{y}$ — требование роста с предыдущего слайда определяющее отступ $\bar{\varepsilon}$, чем сильнее дисбаланс, тем ближе x_* к концу отрезка $[0, 1]$. Коридор определяют два независимых параметра: рост задаёт $\bar{y}$ и раскрывает клин, возмущения задают $\bar{\delta}$ и усекают его у начала координат.
Вывод: узость — цена роста, а не устойчивости.

Качественная картина





Историческая колея: переход только через диагональ

Дисбаланс $y_* = \sqrt{|\beta_*|/|\alpha_*|}$ делит устойчивый квадрант диагональю $y_* = 1$: при $y_* > 1$ перевес у государства (ближе к «автократии»), при $y_* < 1$ — у общества (ближе к «анархии»).
Наблюдение. Непрерывный путь параметров из одной половины в другую обязан пересечь диагональ — линию максимального роста на единицу стоимости ($q = 1/2$). Обойти её можно лишь двумя способами, и оба означают катастрофу:

- через вырождение канала ($\alpha_* = 0$ или $\beta_* = 0$) — то есть через сам крайний режим;
- через выход из квадранта ($\alpha > 0$ или $\beta > 0$) — конфронтацию, где идет убывание абсолютной популяции.

Смена типа режима поэтому требует либо прохождения через состояние максимального роста, либо срыва: без роста система остаётся на своей стороне диагонали — эффект исторической колеи.
Предположение (за пределами модели): такие переходы и наблюдаются при быстром восстановительном росте после потрясений.

Что дальше: когда ресурс исчерпывается

Премия кооперации существует, пока есть чем её оплачивать; исторически рост питал технический прогресс.

Вывод модели: нет ресурсов — нет роста — нет «демократии». Если требуемый рост не обеспечен ресурсами, пара каналов лежит в дополнении клина

$$q \le \underline{q} \quad \Longleftrightarrow \quad y_* \le \frac{1}{\bar{y}} \quad \text{или} \quad y_* \ge \bar{y},$$

то есть один канал подавляет другой. Равновесие там ещё устойчиво, но прижато к границе доли, запас до неё мал, а в пределе $\alpha_* \to 0$ или $\beta_* \to 0$ режим становится «автократией» или «анархией».

Что происходит с обществом дальше, эта модель не говорит: N в ней постоянна, а α, β заданы извне и от состояния ресурса не зависят. Этому посвящена отдельная работа (сейчас на рецензировании), где уровень коллективной организации не задаётся извне, а определяется самой динамикой ресурса и населения:

S. Salishev, R. Avros, O. Granichin, Z. Volkovich. *Collective Organization as an Endogenous Variable in Resource–Population Dynamics.*

Заключение

- Расширение Осипова–Ланчестера с $N = \mathrm{const}$ описывает и конфронтацию, и кооперацию; редукция к Риккати даёт полную классификацию.
- Три устойчивых режима: «демократия» ($\alpha, \beta < 0$), «автократия» ($\alpha = 0$, $\beta < 0$), «анархия» ($\alpha < 0$, $\beta = 0$).
- Робастность требует лишь того, чтобы каждый канал был сильнее возмущений: и $|\alpha_*|$, и $|\beta_*|$ должны превышать порог, растущий с их размером. Это даёт квадрант устойчивости, сдвинутый от начала координат, а не узкий коридор; *узость* появляется только из требования роста при заданной стоимости.
- Премия кооперации экспоненциальна и максимальна при балансе $|\alpha| \approx |\beta|$ — математическое чтение «узкого коридора» [1, 18].
- Если один из каналов кооперации обращается в нуль, устойчивым становится уже не внутреннее равновесие, а граница: все решения сходятся к «автократии» ($B = 0$) или «анархии» ($R = 0$). Поэтому «демократия» — не конечное состояние, к которому система приходит раз и навсегда: «конца истории» [19] в модели нет.

Литература

[1] D. Acemoglu и J. A. Robinson. *The Narrow Corridor: States, Societies, and the Fate of Liberty*. 2019.
[2] F. W. Lanchester. *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm*. 1916.
[3] R. L. Helmbold. "Osipov: The 'Russian Lanchester'". В: *European Journal of Operational Research* 65.2 (1993).
[4] S. J. Deitchman. "A Lanchester Model of Guerrilla Warfare". В: *Operations Research* 10.6 (1962).
[5] M. Kress, J. P. Caulkins, G. Feichtinger и др. "Lanchester model for three-way combat". В: *European Journal of Operational Research* 264.1 (2018).
[6] M. Kress. "Lanchester Models for Irregular Warfare". В: *Mathematics* 8.5 (2020).
[7] V. A. Volpert. "Mathematical model of repressive response to collective action and protest waves". В: *Journal of Theoretical Biology* 595 (2024).
[8] A. L. Fradkov. *Dynamics and Stability under Iterated Sanctions and Counter-sanctions*. 2022. arXiv: 2207.07855 [math.OC].
[9] P. Turchin. *Historical Dynamics: Why States Rise and Fall*. 2003.
[10] E. J. Dockner, S. Jørgensen, N. V. Long и др. *Differential Games in Economics and Management Science*. 2000.
[11] D. W. K. Yeung и L. A. Petrosyan. *Subgame Consistent Economic Optimization: An Advanced Cooperative Dynamic Game Analysis*. 2012.
[12] I. M. Bomze. "Lotka–Volterra equation and replicator dynamics: new issues in classification". В: *Biological Cybernetics* 72.5 (1995).
[13] J. Hofbauer и K. Sigmund. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. 1998.
[14] W. H. Sandholm. *Population Games and Evolutionary Dynamics*. 2010.
[15] V. I. Arnold. *"Zhestkie" i "myagkie" matematicheskie modeli ["Hard" and "soft" mathematical models]*. 2000.
[16] V. I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. 3-е изд. 1992.
[17] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3-е изд. 2002.
[18] D. Acemoglu и J. A. Robinson. *Why Nations Fail: The Origins of Power, Prosperity, and Poverty*. 2012.
[19] F. Fukuyama. *The End of History and the Last Man*. 1992.