О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ МАТРИЦЫ МАТРИЦАМИ МЕНЬШЕГО РАНГА*

А. В. Петров
aleksndr19@rambler.ru

10 октября 2026 г.

Рассматривается задача наилучшего приближения в норме Гёльдера вещественной матрицы произвольного ненулевого ранга матрицами меньшего ранга. Получена явная конструкция оптимального приближения в виде произведения исходной матрицы и проектора, соответствующего решению вспомогательной экстремальной задачи.

1. Введение. Обозначим через $\mathbb{R}^{m\times n}$ множество прямоугольных матриц, имеющих m строк и n столбцов. Напомним, что строчным рангом матрицы $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется максимальное число её линейно независимых строк, а столбцовым рангом — максимальное число её линейно независимых столбцов. Известно, что строчный ранг равен столбцовому рангу (см., например, [1, с. 15]). Их общее значение называется рангом матрицы F и обозначается $\operatorname{rank}(F)$.

В пространстве матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$ для $H = (h_{ij})$ введём норму Гёльдера с параметром $p > 1$,

$$\|H\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |h_{ij}|^p\right)^{1/p}.$$

Пусть матрица $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ имеет ранг $r \geqslant 1$. Обозначим

$$\mathcal{M}_{r-1} := \{Z \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid \operatorname{rank}(Z) \leqslant r-1\}.$$

Рассмотрим задачу наилучшего приближения матрицы F матрицами меньшего ранга:

$$\|F - Z\|_p \to \min_{Z\in\mathcal{M}_{r-1}}. \tag{1}$$

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» http://oml.cmlaboratory.com/

Задача наилучшего приближения матриц матрицами меньшего ранга в покомпонентных и смешанных нормах исследовалась ранее в [2, 3]. В работе [3] для матриц полного столбцового ранга n рассмотрен, в частности, случай уменьшения ранга на единицу в равномерной покомпонентной норме $\|H\|_\infty = \max\limits_{i,j} |h_{ij}|$. В работе [4] для квадратной невырожденной матрицы приведена явная конструкция наилучшего приближения матрицей ранга не выше $n-1$ в той же норме. В настоящей работе условие полного столбцового ранга не предполагается: исходная матрица может иметь произвольный ненулевой ранг r. Для этого случая получено необходимое и достаточное условие оптимальности, дающее полное описание множества наилучших приближений в виде произведения исходной матрицы и проектора. При этом установлено, что любая оптимальная матрица имеет ранг $r-1$.

2. Вспомогательные результаты. С параметром $p > 1$ связан сопряжённый параметр $q = \frac{p}{p-1}$. Очевидно, что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Отсюда следуют эквивалентные равенства

$$q = (q-1)p, \quad p = (p-1)q, \quad (p-1)(q-1) = 1. \tag{2}$$

В пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ будем использовать нормы Гёльдера с параметрами p и q. Обозначим

$$S_q := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\|_q = 1\}, \quad S_p := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\|_p = 1\}.$$

Каждому вектору $w \in S_q$ сопоставим сопряжённый вектор $\xi(w) \in \mathbb{R}^n$ с компонентами

$$\xi(w)_j = |w_j|^{q-1} \operatorname{sign}(w_j), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где полагаем $\operatorname{sign}(0) = 0$. Вектор $\xi(w)$ обладает следующими свойствами:

$$\langle \xi(w), w \rangle = 1, \quad \|\xi(w)\|_p = 1.$$

Действительно, в силу (3) имеем $\langle \xi(w), w \rangle = \sum_{j=1}^n |w_j|^q = 1$. Также в силу (2) и (3) имеем

$$\|\xi(w)\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |w_j|^{(q-1)p} \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^n |w_j|^q \right)^{1/p} = 1.$$

Следовательно, $\xi(w) \in S_p$, и формула (3) задаёт отображение $\xi : S_q \to S_p$. Каждому вектору $u \in S_p$ сопоставим вектор $w \in \mathbb{R}^n$ с компонентами

$$w_j = |u_j|^{p-1} \operatorname{sign}(u_j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда в силу (2) имеем

$$|w_j|^{q-1}\operatorname{sign}(w_j) = |u_j|^{(p-1)(q-1)}\operatorname{sign}(u_j) = |u_j|\operatorname{sign}(u_j) = u_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В силу (2) имеем

$$\|w\|_q = \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j|^p\right)^{1/q} = 1.$$

Таким образом, $w \in S_q$ и $\xi(w) = u$, поэтому отображение $\xi : S_q \to S_p$ сюръективно. Его инъективность следует из строгой монотонности функции $\varphi(t) := |t|^{q-1}\operatorname{sign}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ при $q > 1$. Следовательно, отображение $\xi : S_q \to S_p$ является биекцией.

Обозначим

$$V_0 := \{u \in \mathbb{R}^n \mid Fu = \mathbb{O}\}, \quad V_1 := V_0^{\perp},$$
$$S_q(V_1) := \{w \in S_q \mid \xi(w) \in V_1\}.$$

Поскольку $V_0 = \ker F$, то $V_1 = (\ker F)^{\perp} = \operatorname{Im} F^T$, $\dim V_1 = \operatorname{rank}(F) = r$.

Введём вспомогательную экстремальную задачу

$$\|Fw\|_p \to \min_{w \in S_q(V_1)}. \tag{4}$$

ЛЕММА 1. *Задача* (4) *имеет решение* w^*. *При этом*

$$\varepsilon^* := \|Fw^*\|_p > 0.$$

Доказательство. Поскольку $\dim V_1 = r \geqslant 1$, существует вектор $u \in V_1$ такой, что $\|u\|_p = 1$. В силу биективности отображения ξ существует единственный вектор $w \in S_q$ такой, что $\xi(w) = u$. Поэтому $w \in S_q(V_1)$ и множество $S_q(V_1)$ непусто.

Проверим существование оптимального вектора w^*. Множество S_q компактно. Отображение $\xi : S_q \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, а подпространство V_1 замкнуто. Поэтому множество $S_q(V_1) = \xi^{-1}(V_1)$ замкнуто в S_q и, следовательно, компактно. По теореме Вейерштрасса непрерывная функция $\|Fw\|_p$ достигает на $S_q(V_1)$ минимума в некотором $w^* \in S_q(V_1)$.

Обозначим $\xi^* := \xi(w^*)$ и покажем, что $\varepsilon^* > 0$. Предположим противное: $\|Fw^*\|_p = 0$. Тогда $Fw^* = 0$, то есть $w^* \in V_0$. С другой стороны, поскольку $w^* \in S_q(V_1)$, имеем $\xi^* \in V_1 = V_0^{\perp}$. Следовательно, $\langle w^*, \xi^* \rangle = 0$, что противоречит равенству $\langle w^*, \xi^* \rangle = 1$. Значит, $\varepsilon^* > 0$.

Лемма доказана. □

Замечание 1. Задача (4) может быть сведена к задаче минимизации по r переменным на единичной сфере.

Сделаем замену переменной $u = \xi(w)$. В силу биективности отображения ξ имеем $\xi\big(S_q(V_1)\big) = \{u \in V_1 \mid \|u\|_p = 1\}$. Поэтому задача (4) эквивалентна задаче:

$$\|F\xi^{-1}(u)\|_p \to \min_{u \in V_1,\, \|u\|_p = 1}. \tag{5}$$

Выберем ортонормированный базис подпространства V_1 и составим из его векторов столбцы матрицы $Q \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Тогда любой вектор $u \in V_1$ единственным образом представляется в виде $u = Qa$, $a \in \mathbb{R}^r$. Поскольку Q имеет полный столбцовый ранг, для $a \neq \mathbb{O}$ имеем $Qa \neq \mathbb{O}$. Поэтому любой вектор $u \in V_1 \cap S_p$ можно представить в виде

$$u = \frac{Qa}{\|Qa\|_p}, \quad a \neq \mathbb{O}.$$

Следовательно, задача (5) эквивалентна задаче:

$$\left\| F\xi^{-1}\left(\frac{Qa}{\|Qa\|_p}\right)\right\|_p \to \min_{a \in \mathbb{R}^r,\, a \neq \mathbb{O}}. \tag{6}$$

Для любого $a \neq \mathbb{O}$ положим $\widehat{a} = \frac{a}{\|a\|_2}$. Тогда $\|\widehat{a}\|_2 = 1$ и

$$\frac{Q\widehat{a}}{\|Q\widehat{a}\|_p} = \frac{Qa}{\|Qa\|_p}.$$

Следовательно, значение целевой функции при такой нормировке не изменяется. Поэтому задача (6) эквивалентна задаче:

$$\left\| F\xi^{-1}\left(\frac{Qa}{\|Qa\|_p}\right)\right\|_p \to \min_{a \in \mathbb{R}^r,\, \|a\|_2 = 1}. \tag{7}$$

Тем самым вспомогательная экстремальная задача сводится к минимизации непрерывной функции на компактной сфере, что позволяет применять численные методы оптимизации. Затем из найденного решения a^* восстанавливаются векторы

$$u^* = \frac{Qa^*}{\|Qa^*\|_p}, \quad w^* = \xi^{-1}(u^*).$$

ЛЕММА 2. *Для любой матрицы $Z \in \mathcal{M}_{r-1}$ существует вектор $w_0 \in V_2 \cap S_q(V_1)$, где $V_2 := \{u \in \mathbb{R}^n \mid Zu = \mathbb{O}\}$.*

Доказательство. Для размерности подпространства V_0 справедлива формула

$$\dim V_0 = n - r =: d. \tag{8}$$

Аналогичная формула имеет место и для подпространства V_2

$$\dim V_2 = n - \operatorname{rank}(Z). \tag{9}$$

Из (8), (9) и условия $\operatorname{rank}(Z) \leqslant r - 1$ следует, что

$$\dim V_2 \geqslant n - (r-1) = n - r + 1 = d + 1. \tag{10}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $d = 0$. Из (8) получаем, что $V_0 = \{\mathbb{O}\}$, то есть $V_1 = V_0^{\perp} = \mathbb{R}^n$. Из (10) следует, что $\dim V_2 \geqslant 1$. Таким образом, $V_2 \neq \{\mathbb{O}\}$. Выберем ненулевой вектор $w \in V_2$ и нормируем его условием $\|w\|_q = 1$. Так как $V_1 = \mathbb{R}^n$, то автоматически $\xi(w) \in V_1$. Следовательно, утверждение леммы верно в случае $d = 0$.

Пусть теперь $d \geqslant 1$. Из (10) следует, что существует подпространство $L \subset V_2$ такое, что $\dim L = d + 1$.

Рассмотрим в пространстве L единичную сферу

$$S(L) = \{x \in L \mid \|x\|_2 = 1\}.$$

Для $x \in S(L)$ определим $w(x) := \frac{x}{\|x\|_q}$. Тогда

$$w(x) \in L \subset V_2, \quad \|w(x)\|_q = 1. \tag{11}$$

Пусть P_{V_0} — оператор ортогонального проектирования на подпространство V_0. Определим отображение $f : S(L) \to V_0$ следующим образом

$$f(x) := P_{V_0}\xi(w(x)).$$

Отображение $w : S(L) \to S_q$ непрерывно, поскольку функция $\|x\|_q$ непрерывна и положительна для всех $x \in S(L)$. Кроме того, $w(-x) = -w(x)$. Отображение $\xi : S_q \to \mathbb{R}^n$ в силу определения (3) непрерывно и нечётно, а оператор P_{V_0} линейный и непрерывный. Следовательно, отображение $f : S(L) \to V_0$ непрерывно и нечётно, то есть $f(-x) = -f(x)$.

Поскольку $\dim L = d+1$, сфера $S(L)$ является d-мерной сферой. Кроме того, $\dim V_0 = d$, поэтому после выбора ортонормированных базисов пространств L и V_0 отображение f можно рассматривать как непрерывное отображение $\mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$.

По теореме Борсука—Улама [5, с. 273] существует вектор $x_0 \in S(L)$ такой, что $f(x_0) = f(-x_0)$. Поскольку f нечётно, то $f(-x_0) = -f(x_0)$. Следовательно, $f(x_0) = \mathbb{O}$. Обозначим $w_0 := w(x_0)$, $\xi_0 := \xi(w_0)$. Из равенства $f(x_0) = \mathbb{O}$ следует, что $P_{V_0}\xi_0 = \mathbb{O}$. Поэтому $\xi_0 \in V_0^{\perp} = V_1$. Вместе с (11) это даёт $w_0 \in V_2 \cap S_q(V_1)$.

Лемма доказана. □

3. Основной результат. Для произвольных $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\|xy^T\|_p = \|x\|_p \, \|y\|_p. \tag{12}$$

Действительно,

$$\|xy^T\|_p^p = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |x_i y_j|^p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p \right).$$

Возводя обе части равенства в степень $\frac{1}{p}$, получаем (12).

Введём квадратную матрицу B вида

$$B = E_n - w^*(\xi^*)^T,$$

где E_n — единичная матрица порядка n. Поскольку $(\xi^*)^T w^* = 1$, имеем

$$B^2 = (E_n - w^*(\xi^*)^T)^2 = E_n - w^*(\xi^*)^T = B.$$

Следовательно, B является матрицей проектора (в общем случае косого).

Далее нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 3. *Пусть* $Z = FB$. *Тогда* $\operatorname{rank}(Z) = r - 1$.

Доказательство. Поскольку $(\xi^*)^T w^* = 1$, имеем

$$Zw^* = FBw^* = \mathbb{O}. \tag{13}$$

Покажем, что $Zx = \mathbb{O}$ для любого $x \in V_0$. Возьмём $x \in V_0$. Запишем

$$\langle \xi^*, x \rangle = 0 \Longrightarrow Bx = x \Longrightarrow Zx = Fx = \mathbb{O}.$$

Так как $\operatorname{rank} F = r$, то $\dim V_0 = n - r$. Значит, найдутся линейно независимые векторы $x_1, \ldots, x_{n-r} \in V_0$ (при $r = n$ этот набор пуст), удовлетворяющие условию

$$Zx_i = \mathbb{O}. \tag{14}$$

К ним в силу (13) можно добавить вектор $x_{n-r+1} = w^*$. При этом $w^* \notin V_0$. Действительно, для любого $x \in V_0$ имеем $\langle \xi^*, x \rangle = 0$, тогда как $\langle \xi^*, w^* \rangle = 1$. Следовательно, система векторов $x_i, i = 1, \ldots, n - r + 1$ линейно независима. В силу (13) и (14) для всех этих векторов выполняется равенство $Zx_i = \mathbb{O}$. Отсюда следует, что

$$n - r + 1 \leqslant \dim \ker Z = n - \operatorname{rank} Z,$$

то есть $\operatorname{rank} Z \leqslant r - 1$.

Вместе с тем, $FB = F - (Fw^*)(\xi^*)^T$, или

$$F = Z + (Fw^*)(\xi^*)^T.$$

Значит, $\operatorname{rank} F \leqslant \operatorname{rank} Z + 1$, так что $\operatorname{rank} Z \geqslant r - 1$. Приходим к равенству $\operatorname{rank} Z = r - 1$. □

ТЕОРЕМА 1. *Матрица $Z^* \in \mathcal{M}_{r-1}$ является решением задачи* (1) *тогда и только тогда, когда $Z^* = FB$, где матрица B построена по некоторому решению задачи* (4). *При этом* $\operatorname{rank}(Z^*) = r - 1$ *и*

$$\|F - Z^*\|_p = \varepsilon^*. \tag{15}$$

Доказательство. Достаточность. Проверим, что для произвольной матрицы $Z \in \mathcal{M}_{r-1}$ выполняется неравенство $\|F - Z\|_p \geqslant \varepsilon^*$. По лемме 2 существует вектор $w_0 \in S_q(V_1)$ такой, что $Zw_0 = \mathbb{O}$. Следовательно, $(F - Z)w_0 = Fw_0$.

По неравенству Гёльдера, применённому к каждой строке матрицы $F - Z$, имеем

$$\|(F - Z)w_0\|_p \leqslant \|F - Z\|_p \|w_0\|_q.$$

Поскольку $\|w_0\|_q = 1$, то

$$\|F - Z\|_p \geqslant \|(F - Z)w_0\|_p = \|Fw_0\|_p. \tag{16}$$

Так как $w_0 \in S_q(V_1)$, а w^* является решением задачи (4), то

$$\|Fw_0\|_p \geqslant \|Fw^*\|_p = \varepsilon^*. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что $\|F - Z\|_p \geqslant \varepsilon^*$.

Пусть теперь $Z^* = FB$. По лемме 3 имеем $\operatorname{rank}(Z^*) = r - 1$, и поэтому $Z^* \in \mathcal{M}_{r-1}$. Покажем, что выполняется равенство (15). Действительно,

$$\|F - Z^*\|_p = \|Fw^*(\xi^*)^T\|_p = \|Fw^*\|_p \|\xi^*\|_p = \varepsilon^*.$$

Следовательно, на матрице $Z^* \in \mathcal{M}_{r-1}$ достигается минимальное значение ε^*. Необходимость. Пусть Z — произвольное решение задачи (1). Из доказанной достаточности следует, что минимальное значение задачи (1) равно ε^*. Следовательно, $\|F - Z\|_p = \varepsilon^*$.

По лемме 2 существует вектор $w_0 \in S_q(V_1)$ такой, что $Zw_0 = \mathbb{O}$. Следовательно, $(F - Z)w_0 = Fw_0$. В силу неравенства Гёльдера и определения ε^* получаем

$$\varepsilon^* = \|F - Z\|_p \geqslant \|(F - Z)w_0\|_p = \|Fw_0\|_p \geqslant \varepsilon^*.$$

Таким образом, все неравенства обращаются в равенства. В частности, $\|Fw_0\|_p = \varepsilon^*$, поэтому w_0 является решением задачи (4). Обозначим $w^* := w_0, \xi^* := \xi(w^*)$.

Положим $H = F - Z$ и обозначим её строки через h_i^T, $i = 1, \ldots, m$. Поскольку $\|w^*\|_q = 1$, по неравенству Гёльдера для каждой строки имеем

$$|h_i^T w^*| \leqslant \|h_i\|_p.$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{m} |h_i^T w^*|^p = \|Hw^*\|_p^p = \|H\|_p^p = \sum_{i=1}^{m} \|h_i\|_p^p.$$

Следовательно, выполняются равенства

$$|h_i^T w^*| = \|h_i\|_p, \quad i = 1, \ldots, m.$$

При $p > 1$ условие равенства в неравенстве Гёльдера при $\|w^*\|_q = 1$ означает, что

$$h_i = (h_i^T w^*)\xi^*, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Поэтому

$$H = (Hw^*)(\xi^*)^T.$$

Так как $Hw^* = Fw^*$, получаем

$$F - Z = Fw^*(\xi^*)^T.$$

Отсюда получаем

$$Z = F(E_n - w^*(\xi^*)^T) = FB.$$

По лемме 3 $\operatorname{rank}(Z) = r - 1$.

Теорема доказана. □

4. Приложения. Рассмотрим задачу матричной коррекции системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающую, в частности, при обработке результатов измерений. Вопросы оптимальной матричной коррекции несовместных СЛАУ, в том числе одноранговой, исследовались в работах [6, 7]. В работе [8] для задачи локализации источника рассмотрен метод Total L_p-Norm Optimization, основанный на одновременной коррекции матрицы коэффициентов и правой части СЛАУ.

Пусть дана несовместная система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{18}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$.

Задача коррекции системы (18) состоит в нахождении поправок $\Delta A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\Delta b \in \mathbb{R}^m$, при которых скорректированная система

$$(A + \Delta A)x = b + \Delta b \tag{19}$$

становится совместной.

Введём расширенную матрицу $F = [A, b] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ и матрицу коррекции $\Delta = [\Delta A, \Delta b]$. Поскольку исходная система (18) несовместна, имеем

$$\operatorname{rank}[A, b] = \operatorname{rank} A + 1.$$

Если положить $w = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$, то условие (19) принимает однородный вид

$$(F + \Delta)w = \mathbb{O}. \tag{20}$$

Это означает, что совместность скорректированной системы (19) эквивалентна существованию вектора с ненулевой последней компонентой, удовлетворяющего условию (20). Рассмотрим связанную с этой задачей задачу минимальной коррекции расширенной матрицы, понижающей её ранг на единицу.

Пусть $\operatorname{rank} F = r \geqslant 1$. Рассмотрим следующую задачу нахождения коррекции с минимальной нормой Гёльдера, понижающей ранг матрицы на единицу:

$$\|\Delta\|_p \to \min_{\substack{\Delta\in\mathbb{R}^{m\times(n+1)} \\ \operatorname{rank}(F+\Delta)\leqslant r-1}}. \tag{21}$$

После замены $Z = F + \Delta$ задача (21) принимает вид задачи (1).

При применении теоремы 1 к расширенной матрице F обозначения V_1, $S_q(V_1)$, w^* и ξ^* понимаются относительно пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Согласно теореме 1, оптимальная коррекция имеет явный вид

$$\Delta^* = -Fw^*(\xi^*)^T,$$

а скорректированная матрица равна

$$Z^* = F + \Delta^* = F - Fw^*(\xi^*)^T.$$

При этом $\operatorname{rank} Z^* = r - 1$ и

$$\|\Delta^*\|_p = \min_{\substack{\Delta\in\mathbb{R}^{m\times(n+1)} \\ \operatorname{rank}(F+\Delta)\leqslant r-1}} \|\Delta\|_p = \min_{w\in S_q(V_1)} \|Fw\|_p.$$

Следовательно, любая оптимальная коррекция расширенной матрицы, понижающая её ранг на единицу, является одноранговой. Действительно, по

теореме 1 она представима в виде $\Delta^* = -Fw^*(\xi^*)^T$, причём $\|Fw^*\|_p = \varepsilon^* > 0$ и $\|\xi^*\|_p = 1$. Поэтому $\operatorname{rank}(\Delta^*) = 1$. Следует отметить, что понижение ранга расширенной матрицы само по себе не гарантирует совместности скорректированной системы.

Если последняя компонента w^* отлична от нуля, то можно положить

$$x^* = -\frac{1}{w^*_{n+1}} \begin{pmatrix} w^*_1 \\ \vdots \\ w^*_n \end{pmatrix}.$$

Тогда скорректированная система

$$(A + \Delta A^*)x^* = b + \Delta b^*$$

является совместной. Если $w^*_{n+1} = 0$, то совместность скорректированной системы не гарантируется и требует отдельной проверки.

Рассматриваемая задача имеет также статистическую интерпретацию. Предположим, что наблюдаемая матрица F представима в виде $F = Z + E$, где Z — неизвестная матрица ранга не выше $r - 1$, а $E = (e_{ij})$ — матрица ошибок измерений.

Пусть элементы e_{ij} независимы и имеют одинаковое обобщённое гауссовское распределение с плотностью

$$\rho(e) = C_{p,\sigma} \exp\left\{-\left|\frac{e}{\sigma}\right|^p\right\}, \quad p > 1,$$

где $\sigma > 0$ — параметр масштаба.

Тогда при фиксированных p и σ функция правдоподобия имеет вид

$$L(Z) = C \exp\left\{-\frac{\|F - Z\|_p^p}{\sigma^p}\right\}.$$

Следовательно, оценка максимального правдоподобия матрицы Z в классе матриц ранга не выше $r - 1$ определяется решением задачи (1).

При $p = 2$ данная модель соответствует гауссовскому распределению ошибок и методу наименьших квадратов. При $1 < p < 2$ распределения имеют более тяжёлые “хвосты”, чем гауссовское, а при $p > 2$ — более лёгкие.

Таким образом, использование нормы Гёльдера при $p > 1$ позволяет рассматривать различные статистические модели ошибок измерений.

Благодарности. Автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю проф. В.Н. Малозёмову за проявленный интерес, консультации и замечания к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В.Н. Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция. СПб.: Изд-во С.-Петербургского Университета, 1997. 72 с.

2. A. Pinkus. On Best Rank n Matrix Approximations. // Linear Algebra Appl. 2012, V. 437, P. 2179–2199.

3. I. Georgieva, C. Hofreither. On best uniform approximation by low-rank matrices. // Linear Algebra and its Applications. 2017, V. 518, P. 159–176.

4. Малозёмов В.Н. Пример двумерного альтернанса. // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (DHA & CAGD). Избранные доклады. 26 декабря 2013 г. С. 384–386.

5. Виро О.Я., Иванов О. А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. Элементарная топология. М.: Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО), 2010. 446 с.

6. Ерохин В.И. Оптимальная матричная коррекция и регуляризация несовместных линейных моделей. // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2002. Т. 9, № 2. С. 41–77.

7. Ерохин В.И. Свойства оптимальной одноранговой коррекции матриц коэффициентов несовместных неоднородных линейных моделей. // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2002. Т. 9, № 1. С. 33–60.

8. J.-A. Luo, C.-C. Xue, Y.-J. Rong, S.-T. Han. A Total L_p-Norm Optimization for Bearing-Only Source Localization in Impulsive Noise with SαS Distribution. // Sensors. 2021. Vol. 21, No. 19. Article 6471. DOI: 10.3390/s21196471.