ЛИНЕЙНАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ MDM-МЕТОДА*

А. В. Плоткин avplotkin@gmail.com

Н. А. Соловьева 4vinyo@gmail.com

17 октября 2026 г.

MDM-метод [1, 2] решает задачу поиска ближайшей к началу координат точки выпуклой оболочки конечного множества. Линейная скорость сходимости этого метода исследована в работе [3]. Предложенное авторами доказательство опирается на предварительный выход итераций на опорную гиперплоскость и последующий технически сложный анализ предельного поведения угла. Линейная скорость сходимость MDM-метода также следует из более общего результата, полученного в работе [4] для широкого класса задач выпуклой оптимизации. Здесь авторы используют нетривиальный геометрический аппарат, основанный на понятии пирамидальной ширины. В настоящей статье предлагается элементарное доказательство линейной скорости сходимости MDM-метода.

1°. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы m точек,

$$H = \{a_i\}_{i=1}^m.$$

Выпуклую оболочку множества H обозначим G. Ставится экстремальная задача

$$\|v\|^2 \to \min_{v \in G}. \tag{1}$$

Очевидно, что задача (1) имеет единственное решение v_*.

Обозначим через A матрицу со столбцами $a_1, \ldots, a_m$. Тогда любой вектор v из выпуклой оболочки G множества H допускает представление $v = Ap$, где

$$p \geqslant \mathbb{O}, \quad \sum_{i=1}^m p[i] = 1. \tag{2}$$

Множество векторов p, удовлетворяющих условию (2), обозначим P. Введем носитель вектора коэффициентов p — индексное множество $M_+(p)$ вида

$$M_+(p) = \{i \in 1 : m \mid p[i] > 0\}.$$

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» http://oml.cmlaboratory.com/

Отметим, что $M_+(p) \neq \varnothing$ для любого $p \in P$.

Величина

$$\Delta(p) = \max_{i \in M_+(p)} \langle a_i, v \rangle - \min_{i \in 1:m} \langle a_i, v \rangle,$$

где $v = Ap$, $p \in P$, называется *оценкой плана* v. Оценка плана всегда неотрицательна. Действительно,

$$\Delta(p) \geqslant \max_{i \in M_+(p)} \langle a_i, v \rangle - \min_{i \in M_+(p)} \langle a_i, v \rangle \geqslant 0.$$

Из результатов доклада [2] следуют приведенные ниже утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для $p \in P$ равенство $\Delta(p) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда вектор $v = Ap$ является решением задачи* (1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *При любом $v = Ap$, $p \in P$, справедливо неравенство*

$$\|v - v_*\|^2 \leqslant \|v\|^2 - \|v_*\|^2 . \tag{3}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *При любом $v = Ap$, $p \in P$, справедливо неравенство*

$$\|v\|^2 - \|v_*\|^2 \leqslant 2\Delta(p). \tag{4}$$

Следующая теорема усиливает оценку (4) при малых значениях $\Delta(p)$.

ТЕОРЕМА 1. *При любом $v = Ap$, $p \in P$, справедливо неравенство*

$$\|v\|^2 - \|v_*\|^2 \leqslant C\Delta(p)^2, \tag{5}$$

где C — положительная константа, зависящая только от множества H.

Доказательство. Число возможных носителей $M_+(p)$ конечно. Достаточно для каждого такого носителя M найти константу C_M, при которой неравенство (5) выполняется для всех $p \in P$ с носителем $M_+(p) = M$. Тогда в качестве общей константы C можно взять максимум по всем константам C_M.

Зафиксируем носитель M. Чтобы описать возможные перемещения плана $v = Ap$ с таким носителем, рассмотрим линейную оболочку

$$L_M = \operatorname{lin}\{a_i - a_j \mid i, j \in M\}.$$

Выделим составляющую плана, которая остается неизменной при этих перемещениях. Для этого рассмотрим ортогональное дополнение $L_M^\perp$. Все точки a_i, $i \in M$, при ортогональном проектировании на $L_M^\perp$ дают одну и ту же проекцию z_M. Тогда для любого $p \in P$ с носителем M вектор $v = Ap$ имеет ортогональное разложение

$$v = u + z_M, \quad u \in L_M, \quad z_M \in L_M^\perp, \quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|z_M\|^2 .$$

Оценим $\|u\|$ через $\Delta(p)$. Покажем, что существует константа $\alpha_M > 0$ такая, что

$$\|u\| \leqslant \alpha_M \Delta(p). \tag{6}$$

Если $L_M = \{\mathbb{O}\}$, то $u = \mathbb{O}$ и можно взять $\alpha_M = 1$. Далее будем считать, что $L_M \neq \{\mathbb{O}\}$. Имеем

$$\Delta(p) \geqslant \max_{i,j \in M} \langle v, a_i - a_j \rangle = \max_{i,j \in M} \langle u, a_i - a_j \rangle \geqslant \beta_M \|u\|,$$

где

$$\beta_M = \min_{\substack{w \in L_M \\ \|w\|=1}} \max_{i,j \in M} \langle w, a_i - a_j \rangle > 0.$$

Минимум достигается, поскольку целевая функция непрерывна, а множество $L_M \cap \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| = 1\}$ непусто и компактно. Покажем, что $\beta_M > 0$. Так как $\max\{\langle w, a_i - a_j \rangle, \langle w, a_j - a_i \rangle\} \geqslant 0$, то имеем $\beta_M \geqslant 0$. Если $\beta_M = 0$, то существует вектор w единичной длины, для которого одновременно выполняется $w \in L_M$ и $w \in L_M^{\perp}$, что невозможно. Осталось положить $\alpha_M = \frac{1}{\beta_M}$, чтобы получить требуемое неравенство (6).

Воспользуемся константой α_M для построения C_M. Имеем

$$\|v\|^2 - \|v_*\|^2 = \|u\|^2 + \left(\|z_M\|^2 - \|v_*\|^2\right) \leqslant \alpha_M^2 \Delta(p)^2 + \left(\|z_M\|^2 - \|v_*\|^2\right). \tag{7}$$

Если $\|z_M\|^2 \leqslant \|v_*\|^2$, то получим требуемую оценку с $C_M = \alpha_M^2$. Если же $\|z_M\|^2 > \|v_*\|^2$, то из (7) и оценки (4) следует

$$0 < \|z_M\|^2 - \|v_*\|^2 \leqslant \|v\|^2 - \|v_*\|^2 \leqslant 2\Delta(p).$$

Домножив правую часть неравенства (4) на величину

$$\frac{2\Delta(p)}{\|z_M\|^2 - \|v_*\|^2} \geqslant 1,$$

получим

$$\|v\|^2 - \|v_*\|^2 \leqslant \frac{4\Delta(p)^2}{\|z_M\|^2 - \|v_*\|^2}.$$

В этом случае можно взять $C_M = 4\left(\|z_M\|^2 - \|v_*\|^2\right)^{-1}$.

Для каждого носителя M получена константа $C_M > 0$. Выбрав C как максимум этих констант, получим неравенство (5).

Теорема доказана. □

2°. Приведем описание MDM-метода решения задачи (1).

Возьмем начальное приближение $v_0 = Ap_0$, $p_0 \in P$.

Пусть уже имеется k-е приближение $v_k = Ap_k$, $p_k \in P$. Опишем k-ю итерацию алгоритма, на которой происходит построение v_{k+1}.

Найдем индексы $i'_k \in M_+(p_k)$ и $i''_k \in 1:m$ такие, что

$$\max_{i \in M_+(p_k)} \langle a_i, v_k \rangle = \langle a_{i'_k}, v_k \rangle,$$
$$\min_{i \in 1:m} \langle a_i, v_k \rangle = \langle a_{i''_k}, v_k \rangle.$$

Введем обозначение

$$d_k = a_{i'_k} - a_{i''_k}.$$

Тогда оценка плана $v_k = Ap_k$ может быть записана в виде

$$\Delta_k := \Delta(p_k) = \langle d_k, v_k \rangle.$$

Если $\Delta_k = 0$, то, согласно утверждению 1, вектор v_k является решением задачи (1). Процесс закончен.

Пусть $\Delta_k > 0$. В таком случае $d_k \neq \mathbb{O}$. Рассмотрим вектор

$$\hat{v}_k = v_k - p'_k d_k,$$

где $p'_k = p_k[i'_k]$. Очевидно, что $\hat{v}_k \in G$. Рассмотрим отрезок

$$v_k(t) = v_k + t(\hat{v}_k - v_k) = v_k - t p'_k d_k, \quad t \in [0,1].$$

В силу выпуклости множества G все точки $v_k(t)$ этого отрезка принадлежат G. Выберем $t_k \in [0,1]$ из условия

$$\|v_k(t_k)\|^2 = \min_{t \in [0,1]} \|v_k(t)\|^2 .$$

Положим $v_{k+1} = v_k(t_k)$.

Коэффициенты разложения вектора v_{k+1} по столбцам матрицы A выглядят так:

$$p_{k+1}[i] = \begin{cases} p_k[i] & \text{при } i \neq i'_k,\ i \neq i''_k, \\ (1 - t_k) p_k[i'_k] & \text{при } i = i'_k, \\ p_k[i''_k] + t_k p_k[i'_k] & \text{при } i = i''_k. \end{cases}$$

Укажем явную формулу для t_k. Абсолютный минимум квадратичной функции одной переменной $\|v_k(t)\|^2$ на $\mathbb{R}$ достигается в точке

$$\hat{t}_k = \frac{\Delta_k}{p'_k \|d_k\|^2} > 0.$$

Значит,

$$t_k = \min\left\{1, \hat{t}_k\right\}.$$

Если $\hat{t}_k \leqslant 1$, то $t_k = \hat{t}_k$; если $\hat{t}_k > 1$, то $t_k = 1$. В первом случае k-я итерация называется *неусеченной*, во втором — *усеченной*. Для неусеченной итерации имеем

$$v_{k+1} = v_k(\hat{t}_k) = v_k - \frac{\Delta_k d_k}{\|d_k\|^2},$$

а для усеченной

$$v_{k+1} = v_k(1) = \hat{v}_k.$$

Описание MDM-метода завершено.

Представленный алгоритм строит последовательность $v_0, v_1, \ldots$ точек из G. Если она конечна, то последний ее элемент является решением задачи (1). Вообще говоря, последовательность $\{v_k\}$ бесконечна. Такая ситуация возникает, когда

$$\Delta_k > 0 \quad \text{при всех} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Далее будем рассматривать случай бесконечной последовательности $\{v_k\}$.

3°. Отметим важное свойство монотонности алгоритма. Функция $\|v_k(t)\|^2$ строго выпукла, а $t_k > 0$ является точкой ее минимума на $[0, 1]$, поэтому

$$\|v_{k+1}\|^2 = \|v_k(t_k)\|^2 < \|v_k(0)\|^2 = \|v_k\|^2.$$

То есть последовательность $\left\{\|v_k\|^2\right\}$ является строго убывающей.

Далее приведем оценку убывания функции на неусеченных итерациях.

ЛЕММА 1. *На каждой неусеченной итерации k выполняется неравенство*

$$\|v_k\|^2 - \|v_{k+1}\|^2 \geqslant \frac{\Delta_k^2}{D^2}, \tag{8}$$

где D — диаметр множества H.

Доказательство. По определению неусеченной итерации имеем

$$v_{k+1} = v_k - \frac{\Delta_k d_k}{\|d_k\|^2}.$$

Тогда

$$\|v_{k+1}\|^2 = \|v_k\|^2 - \frac{2\Delta_k \langle d_k, v_k\rangle}{\|d_k\|^2} + \frac{\Delta_k^2}{\|d_k\|^2} = \|v_k\|^2 - \frac{\Delta_k^2}{\|d_k\|^2}.$$

Следовательно,

$$\|v_k\|^2 - \|v_{k+1}\|^2 = \frac{\Delta_k^2}{\|d_k\|^2}.$$

Вектор d_k является ненулевым и представляет собой разность точек из H, а значит $\|d_k\| \leqslant D$, где D — диаметр конечного множества H. Получили требуемую оценку. □

Введем обозначение $Q_k = \|v_k\|^2 - \|v_*\|^2$ для оценки скорости сходимости метода. Из неравенства (3) для всех k следует

$$\|v_k - v_*\|^2 \leqslant Q_k.$$

Получим оценку убывания Q_k на неусеченных итерациях.

ЛЕММА 2. *На каждой неусеченной итерации k выполняется неравенство*

$$Q_{k+1} \leqslant \sigma Q_k, \tag{9}$$

где $\sigma \in (0,1)$ — константа, зависящая только от множества H.

Доказательство. Воспользовавшись неравенством (8), получим

$$Q_k - Q_{k+1} = \|v_k\|^2 - \|v_{k+1}\|^2 \geqslant \frac{\Delta_k^2}{D^2}.$$

Применим оценку (5) и свойство монотонности последовательности $\{Q_k\}$ для получения оценки

$$Q_k - Q_{k+1} \geqslant \frac{Q_k}{CD^2} \geqslant \frac{Q_{k+1}}{CD^2}.$$

Отсюда получим требуемое неравенство (9) с константой

$$\sigma = \frac{CD^2}{1 + CD^2} \in (0,1).$$

□

Теперь оценим частоту появления неусеченных итераций в работе метода.

ЛЕММА 3. *Существует такое натуральное число N, что среди любых N последовательных итераций MDM-метода найдется неусеченная.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку подряд идущих усеченных итераций с номерами $l, \ldots, r$ и покажем, что ее длина ограничена числом, не зависящим от l.

Усеченная итерация в векторе p_k переносит всю массу из позиции i'_k в позицию i''_k, не разделяя ее. Поэтому масса, стартовавшая в позиции j на итерации с номером l, после итерации $k \in [l, r]$ целиком находится в одной позиции. Обозначим эту позицию через $f_k(j)$. Тем самым определено отображение $f_k \colon (1:m) \to (1:m)$, причем

$$p_{k+1}[i] = \sum_{j \,|\, f_k(j) = i} p_l[j].$$

Таким образом, отображение f_k однозначно определяет вектор p_{k+1}.

В силу строгого убывания $\|v_k\|$ отображения f_k попарно различны и отличны от тождественного, которому соответствует исходный вектор p_l. Всего отображений $(1:m) \to (1:m)$ имеется m^m. Поэтому подряд может идти не более $m^m - 1$ усеченных итераций.

Следовательно, в каждом блоке из $N = m^m$ подряд идущих итераций найдется хотя бы одна неусеченная. □

Теперь докажем теорему о линейной скорости сходимости MDM-метода.

ТЕОРЕМА 2. *Бесконечная последовательность приближений $\{v_k\}$, построенная MDM-методом, сходится к решению v_* с линейной скоростью.*

Доказательство. По лемме 3 среди итераций с номерами $0 \leqslant i < k$ есть не менее $\lfloor \frac{k}{N} \rfloor$ неусеченных. Применяя оценку (9) на неусеченных итерациях и используя монотонность последовательности $\{Q_k\}$ на остальных, получим

$$\|v_k - v_*\|^2 \leqslant Q_k \leqslant \sigma^{\lfloor \frac{k}{N} \rfloor} Q_0 \leqslant (\sigma^{\frac{1}{N}})^k \frac{Q_0}{\sigma}.$$

Извлекая корень и полагая $B = \sqrt{Q_0/\sigma}$, $q = \sigma^{\frac{1}{2N}} \in (0,1)$, приходим к оценке

$$\|v_k - v_*\| \leqslant Bq^k,$$

которая свидетельствует о линейной скорости сходимости. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Митчелл Б. Ф., Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. *Нахождение ближайшей к началу координат точки многогранника* // Вестник ЛГУ. 1971. № 19. С. 38–45.

2. Малоземов В. Н. *MDM-методу — 50 лет* // Семинар «OML». Литература. Публикации участников семинара. (`http://oml.cmlaboratory.com/literatura.shtml`)

3. López J., Dorronsoro J. R. *Linear convergence rate for the MDM algorithm for the Nearest Point Problem* // Pattern Recognition. 2015. Vol. 48. No. 4. P. 1510–1522.

4. Lacoste-Julien S., Jaggi M. *On the Global Linear Convergence of Frank-Wolfe Optimization Variants* // Advances in Neural Information Processing Systems. 2015. Vol. 28. P. 496–504.