ДВОЙСТВЕННОСТЬ В КВАДРАТИЧНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ. ЗАДАЧА СИЛЬВЕСТРА.*

В. Н. Малоземов — v.malozemov@spbu.ru

А. В. Плоткин — avplotkin@gmail.com

8 декабря 2021 г.

1°. Пусть $D = D[N,N]$ — симметричная неотрицательно определенная матрица, $A = A[M,N]$ — произвольная матрица и $c = c[N]$, $b = b[M]$ — произвольные векторы. Рассмотрим задачу квадратичного программирования:

$$
\begin{aligned}
f(x) &:= \tfrac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \min,\\
A[M_1,N] &\times x[N] \geqslant b[M_1],\\
A[M_2,N] &\times x[N] = b[M_2].
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $M_1 \subset M$, $M_2 \subset M$ — непересекающиеся индексные множества, причем $M_1 \cup M_2 = M$. Множество планов задачи (1) обозначим Ω.

Справедливы следующие утверждения (см. [1, с. 111–113]).

ТЕОРЕМА 1 (критерий существования решения)**.** *Задача* (1) *имеет решение тогда и только тогда, когда множество ее планов Ω непусто и целевая функция $f(x)$ ограничена снизу на Ω.*

ТЕОРЕМА 2 (критерий оптимальности)**.** *Для того чтобы план x_* задачи* (1) *был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $u_* = u_*[M]$ со свойствами*

$$
\begin{gathered}
Dx_* + c = A^T u_*,\\
u_*[i] \times \big(A[i,N] \times x_*[N] - b[i]\big) = 0, \quad i \in M_1,\\
u_*[i] \geqslant 0, \quad i \in M_1.
\end{gathered}
$$

---

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. Введем двойственную задачу для задачи квадратичного программирования (1):

$$
\begin{gathered}
g(z) := -\tfrac{1}{2}\langle Dv, v\rangle + \langle b, u\rangle \to \max, \\
-v[N] \times D[N,N] + u[M] \times A[M,N] = c[N], \\
u[M_1] \geqslant \mathbb{O}[M_1].
\end{gathered} \tag{2}
$$

Здесь $z = (v, u)$. Множество планов задачи (2) обозначим P.

Справедливы следующие теоремы двойственности (см. [1, с. 113–116]).

ТЕОРЕМА 3 (первая теорема двойственности)**.** *Если одна из двойственных задач квадратичного программирования разрешима, то разрешима и другая задача. При этом справедливо соотношение двойственности*

$$\min_{x\in\Omega} f(x) = \max_{z\in P} g(z).$$

ТЕОРЕМА 4 (вторая теорема двойственности)**.** *Пусть x_0 и $z_0 = (v_0, u_0)$ — планы задач* (1) *и* (2) *соответственно. Для того чтобы эти планы были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$u_0[i] \times \big(A[i,N] \times x_0[N] - b[i]\big) = 0 \qquad \textit{для всех } \ i \in M_1; \tag{3}$$

$$D(x_0 - v_0) = \mathbb{O}. \tag{4}$$

Условие (3) называется *условием дополнительности.* Оно записывается на индексах, соответствующих ограничениям–неравенствам в задаче (1).

З а м е ч а н и е 1. Данные двойственной задачи (2) можно представить в виде таблицы.

Таблица 1. Данные двойственной задачи

	c	
v	$-D$	$-\frac{1}{2}Dv$
u	A	b

Сама задача (2) строится с помощью указанной таблицы по правилам линейного программирования. А именно:

1) перемножив скалярно первый столбец таблицы на последний столбец, получим целевую функцию $g(z)$;

2) ограничение–равенство в задаче (2) сформируем с помощью линейной комбинации строк таблицы:

$$-\sum_{i\in N} v[i] \times D[i,j] + \sum_{i\in M} u[i] \times A[i,j] = c[j], \quad j \in N.$$

3) добавим знаковое ограничение на двойственные переменные, соответствующие ограничениям–неравенствам задачи (1):

$$u[i] \geqslant 0, \quad i \in M_1.$$

3°. Если матрица D положительно определена, то задачу (2) можно упростить. Перепишем ограничение–равенство этой задачи в виде равенства столбцов

$$-Dv + A^T u = c.$$

Отсюда следует, что

$$v = D^{-1}(A^T u - c).$$

Переменную v можно исключить. При этом целевая функция принимает вид

$$-\tfrac{1}{2}\langle A^T u - c, D^{-1}(A^T u - c)\rangle + \langle b, u\rangle.$$

Поменяв знак у целевой функции и отбросив константу, придем к вспомогательной задаче квадратичного программирования:

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\langle AD^{-1}A^T u, u\rangle - \langle AD^{-1}c + b, u\rangle \to \min, \\ u[i] \geqslant 0, \quad i \in M_1. \end{gathered} \tag{5}$$

Если u_* — решение этой задачи, то вектор $z_* = (v_*, u_*)$, где

$$v_* = D^{-1}(A^T u_* - c) \tag{6}$$

будет решением задачи (2).

ТЕОРЕМА 5. *Допустим, что матрца D симметрична и положительно определена и что множество планов Ω задачи* (1) *непусто. Тогда задачи* (1) *и* (5) *имеют решения. Если u_* — решение задачи* (5), *то вектор*

$$x_* = D^{-1}(A^T u_* - c) \tag{7}$$

будет единственным решением задачи (1).

Доказательство. Целевая функция $f(x)$ задачи (1) достигает своего минимального значение на $\mathbb{R}^n$ в точке $x_0 = -D^{-1}c$. В частности, она ограничена снизу на Ω. По условию теоремы множество Ω непусто. В этом случае теорема 1 гарантирует, что задача (1) имеет решение x_*.

По первой теореме двойственности задача (2) также имеет решение (v_*, u_*), причем u_* — решение задачи (5), а v_* определяется формулой (6). По второй теореме двойственности $D(x_* - v_*) = \mathbb{O}$, так что $x_* = v_*$. Формула (7) следует из (6).

Решение x_* задачи (1) единственно в силу строгой выпуклости целевой функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$ и выпуклости множества планов Ω. $\square$

Замечание 2. На множестве $I_* = \{i \in M_1 \mid u_*[i] > 0\}$ выполняется равенство

$$A[i, N] \times x_*[N] = b[i], \quad i \in I_*.$$

Это следует из условия дополнительности (3).

4°. Рассмотрим приложение теории двойственности в квадратичном программировании к анализу задачи Сильвестра о шаре наименьшего радиуса, содержащем данное множество точек.
Задача Сильвестра. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой заданы точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Требуется минимизировать по всем x из $\mathbb{R}^n$ величину*

$$\varphi(x) = \max_{i \in 1:m} \|a_i - x\| .$$

Здесь x — центр шара радиуса $\varphi(x)$, содержащего все точки a_i, $i \in 1 : m$.

Нетрудно проверить, что задача Сильвестра имеет решение и это решение единственно (см. [1, с. 145]). Обозначим его x_*.

Отметим, что

$$\|a_i - x\|^2 = \|a_i\|^2 - 2\langle a_i, x\rangle + \|x\|^2 ,$$

поэтому

$$\max_{i \in 1:m} \left\{ \tfrac{1}{2} \|a_i - x\|^2 \right\} = \tfrac{1}{2} \|x\|^2 + \max_{i \in 1:m} \left\{ -\langle a_i, x\rangle + \tfrac{1}{2} \|a_i\|^2 \right\} .$$

Введем экстремальную задачу

$$\tfrac{1}{2} \|x\|^2 + \max_{i \in 1:m} \left\{ -\langle a_i, x\rangle + \tfrac{1}{2} \|a_i\|^2 \right\} \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} . \tag{8}$$

Очевидно, что множество решений задачи Сильвестра и задачи (8) совпадают. Вместе с тем, задача (8) эквивалентна следующей задаче квадратичного программирования:

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\langle Ex, x\rangle + t \to \min, \\ \langle a_i, x\rangle + t \geqslant b_i, \quad i \in 1 : m, \end{gathered} \tag{9}$$

где E — единичная матрица порядка n и $b_i = \frac{1}{2} \|a_i\|^2$. Из строк $a_1, a_2, \ldots, a_m$ составим матрицу A и введем два m-мерных столбца $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$, $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Перепишем задачу (9) в виде

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\langle Ex, x\rangle + t \to \min, \\ Ax + te \geqslant b. \end{gathered} \tag{10}$$

Неизвестной в (10) является пара $y = (x, t)$. Чтобы записать задачу квадратичного программирования (10) в канонической форме, введем матрицы

$$D = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & E & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ A & \vdots \\ & 1 \end{pmatrix}$$

и $(n+1)$-мерную строку $c = (0, \dots, 0, 1)$. Задача (10) примет вид

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\langle Dy, y\rangle + \langle c, y\rangle \to \min, \\ A_1 y \geqslant b. \end{gathered} \tag{11}$$

Составим таблицу данных задачи (11), аналогичную табл. 1, для записывания двойственной задачи.

Таблица 2. Данные задачи (11)

	$0, \dots, 0$	1	
v	$-E$	0 $\vdots$ 0	$-\frac{1}{2}v$
s	$0, \dots, 0$	0	0
u	A	1 $\vdots$ 1	b

По правилам, указанным в конце п. 2°, придем к двойственной задаче

$$\begin{gathered} -\tfrac{1}{2}\langle v, v\rangle + \langle b, u\rangle \to \max, \\ -v + A^T u = \mathbb{O}, \quad \sum_{i=1}^{m} u_i = 1, \\ u_i \geqslant 0, \quad i \in 1:m. \end{gathered} \tag{12}$$

Неизвестной в (12) является пара $z = (w, u)$, где вектор w имеет такую же структуру как вектор y, $w = (v, s)$. Скалярная величина s в записи задачи (12) отсутствует.

Переменную v можно исключить. При этом целевая функция принимает вид

$$-\tfrac{1}{2}\langle AA^T u, u\rangle + \langle b, u\rangle.$$

Поменяв знак у целевой функции, придем к вспомогательной задаче квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\langle AA^T u, u\rangle - \langle b, u\rangle \to \min, \\ &\sum_{i=1}^{m} u_i = 1; \quad u_i \geqslant 0,\ i \in 1:m. \end{aligned} \tag{13}$$

Если u_* — решение этой задачи, то пара (v_*, u_*), где

$$v_* = A^T u_*, \tag{14}$$

будет решением задачи (12).

ТЕОРЕМА 6. *Задача* (13) *имеет решение. Если* $u_* = (u_{*1}, u_{*2}, \ldots, u_{*m})$ *— ее оптимальный план, то для решения* x_* *задачи Сильвестра справедливо представление*

$$x_* = \sum_{i=1}^{m} u_{*i} a_i. \tag{15}$$

Доказательство. Как отмечалось, задача Сильвестра имеет единственное решение x_*. По эквивалентности пара $y_* = (x_*, t_*)$, где

$$t_* = \max_{i\in 1:m} \left\{ -\langle a_i, x_*\rangle + \tfrac{1}{2}\left\|a_i\right\|^2 \right\},$$

будет решением задачи (11).

По первой теореме двойственности задача (12), а с ней и задача (13), имеют решения. Решение задачи (13) обозначим $u_* = (u_{*1}, u_{*2}, \ldots, u_{*m})$. По построению оптимальным планом задачи (12) будет пара $z_* = (w_*, u_*)$, где $w_* = (v_*, s_*)$, v_* определяется формулой (14) и s_* — произвольное вещественное число.

По второй теореме двойственности $D(y_* - w_*) = \mathbb{O}$. Отсюда в силу структуры матрицы D и определения матрицы A следует, что

$$x_* = v_* = A^T u_* = \sum_{i=1}^{m} u_{*i} a_i.$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 3. Обозначим через μ мнимальное значение целевой функции в задаче (13). Тогда наименьший радиус шара, содержащего точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$, равен $\sqrt{-2\mu}$.

З а м е ч а н и е 4. Пусть $I = \{i \in 1:m \mid u_{*i} > 0\}$. При $i \notin I$ двойственные переменные u_{*i} равны нулю. Представление (15) можно переписать в виде

$$x_* = \sum_{i \in I} u_{*i} a_i.$$

Таким образом, центр минимального шара является выпуклой комбинацией всех точек a_i, индекс i которых соответствует положительной двойственной переменной u_{*i}.

5°. Укажем частный случай, когда решение задачи Сильвестра можно получить в явном виде. Введем обозначения

$$\rho := \tfrac{1}{2} \max_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \|a_i - a_j\| = \tfrac{1}{2} \|a_{i_0} - a_{j_0}\|,$$
$$x_0 = \tfrac{1}{2}(a_{i_0} + a_{j_0}), \quad B_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leqslant \rho\}.$$

ТЕОРЕМА 7. *Если все точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$ принадлежат шару $B_\rho(x_0)$, то $x_* = x_0$, $\varphi(x_*) = \rho$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению минимального шара имеем $\rho \geqslant \varphi(x_*)$. Вместе с тем,

$$2\rho = \|a_{i_0} - a_{j_0}\| = \|(a_{i_0} - x_*) + (x_* - a_{j_0})\| \leqslant$$
$$\leqslant \|a_{i_0} - x_*\| + \|a_{j_0} - x_*\| \leqslant 2\varphi(x_*).$$

Таким образом, $\rho \leqslant \varphi(x_*)$. Получили обратное неравенство. Значит, $\rho = \varphi(x_*)$. Равенство $x_0 = x_*$ следует из единственности минимального шара. □

6°. Вернемся к постновке задачи Сильвестра в форме

$$F(x) := \max_{i \in 1:m} \left\{ \tfrac{1}{2} \|a_i - x\|^2 \right\} \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}. \qquad (16)$$

Обратим внимание на то, что задача (16) является минимаксной задачей. Положим

$$f_i(x) = \tfrac{1}{2} \|a_i - x\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - x_j)^2,$$
$$M(x) = \{i \in 1:m \mid f_i(x) = F(x)\} = \{i \in 1:m \mid \|a_i - x\| = \varphi(x)\}.$$

Очевидно, что $f_i(x)$ — выпуклые на $\mathbb{R}^n$ функции и что $f_i'(x) = x - a_i$.

Согласно критерию оптимальности в выпуклых минимаксных задачах [2, с. 77–80] точка x_* будет решением задачи (16) тогда и только тогда, когда найдутся неотрицательные числа u_i, $i \in M(x_*)$, в сумме равные единице, такие что

$$\sum_{i \in M(x_*)} u_i f_i'(x_*) = \mathbb{O}.$$

Эта формула равносильна представлению

$$x_* = \sum_{i \in M(x_*)} u_i a_i.$$

Полученный результат соответствует теореме 6. При $i \in M(x_*)$ точки a_i принадлежат границе шара с центром x_* и радиусом $\varphi(x_*)$.

Отметим, что для решения минимаксных задач разработаны приближенные методы, которые строят минимизирующую последовательность в пространстве $\mathbb{R}^n$, в то время как для нахождения двойственной переменной u приходится решать задачу квадратичного программирования (13) в пространстве $\mathbb{R}^m$ при большом, вообще говоря, m.

Методы приближенного решения задачи Сильвестра рассматриваются в работе [3]. Там же приведена обширная библиография. В заметке [4] показано, как решать задачу Сильвестра с помощью пакета MATLAB.

7°. На рис. 1 и 2 соответственно изображены конечное множество точек a_i на плоскости ($n = 2$) и минимальный круг, содержащий эти точки. Отметим, что на границу круга попали три аффинно независимые точки a_i (они выделены красным цветом). При произвольном n наличие на границе ровно $n + 1$ аффинно независимых точек a_i является основным случаем. Другие случаи считаются вырожденными. На рис. 3 и 4 представлены вырожденные случаи. Рис. 3 соответствует теореме 7. На рис. 4 имеются четыре граничные точки a_i. Это избыточное количество.

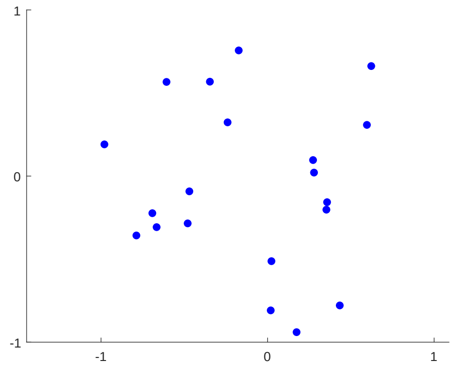

Рис. 1. Множество точек a_i на плоскости

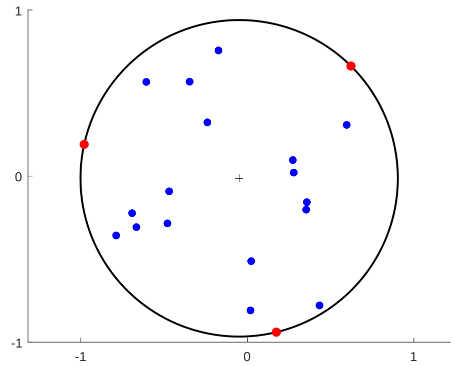

Рис. 2. Минимальный круг, содержащий точки a_i

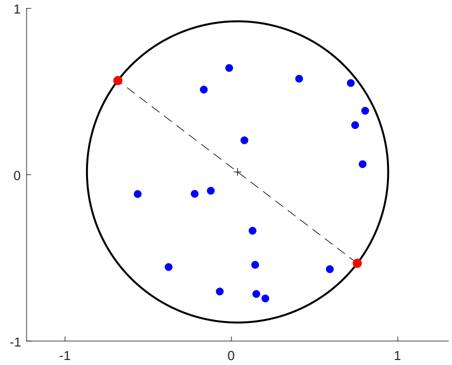

Рис. 3. Иллюстрация к теореме 7

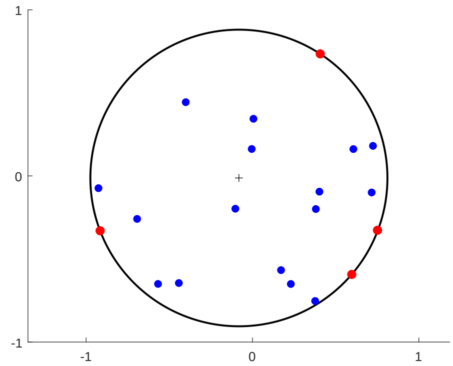

Рис. 4. Решение задачи Сильвестра с избыточным множеством точек a_i на границе

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавурин М. К., Малоземов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

2. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. *Введение в минимакс.* М.: Наука, 1972. 368 с.

3. Yildirim E. Alper. *Two algorithms for the minimum enclosing ball problem.* // SIAM J. Optim. 2008. Vol. 19, No. 3, pp. 1368–1391.

4. Кольцов М. А. *Решение задачи Сильвестра в MATLAB.* // В кн.: Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть первая. Под ред. проф. В. Н. Малоземова. СПб.: Изд-во ВВМ. 2017. С. 195–199.