О ДОСТАТОЧНОСТИ УСЛОВИЙ КУНА–ТАККЕРА

В. Н. Малозёмов
v.malozemov@spbu.ru

10 апреля 2022 г.

1°. Пусть $a_1(x), \dots, a_s(x)$ — выпуклые дифференцируемые на $\mathbb{R}^n$ функции, $f(x)$ — вогнутая дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция, A — $m \times n$-матрица, b — m-мерный вектор. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} f(x) \to \max, \\ a_i(x) \leqslant 0, \quad i \in 1:s, \\ Ax = b. \end{gathered} \tag{1}$$

Обозначим через Ω множество планов задачи (1) (точек x, удовлетворяющих ее ограничениям).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что в точке $x_0 \in \Omega$ выполняются условия Куна–Таккера, если существуют векторы $u \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^s$, такие, что*

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{s} v_i a_i'(x_0) + A^T u, \tag{2}$$

$$v_i a_i(x_0) = 0, \quad i \in 1:s, \tag{3}$$

$$v_i \geqslant 0, \quad i \in 1:s. \tag{4}$$

Условие (2) называется условием Лагранжа, условие (3) — условием дополнительности, условие (4) — условием неотрицательности.

ТЕОРЕМА (о достаточности условий Куна–Таккера)**.** *Если в точке $x_0 \in \Omega$ выполняются условия Куна–Таккера, то x_0 — решение задачи* (1).

2°. Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

ЛЕММА (о критерии выпуклости дифференцируемой функции)**.** *Для того, чтобы дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция $p(x)$ была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы при любых x_0, x_1 выполнялось неравенство*

$$p(x_1) - p(x_0) \geqslant \langle p'(x_0), x_1 - x_0 \rangle. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость. При $x_1 = x_0$ утверждение тривиально, поэтому считаем, что $x_1 \neq x_0$. По определению выпуклости при $t \in (0,1)$ имеем

$$p\bigl(x_0 + t(x_1 - x_0)\bigr) \leqslant p(x_0) + t\bigl[p(x_1) - p(x_0)\bigr]. \tag{6}$$

В силу дифференцируемости функции $p(x)$ справедливо соотношение

$$p\bigl(x_0 + t(x_1 - x_0)\bigr) = p(x_0) + t\bigl\langle p'(x_0), x_1 - x_0\bigr\rangle + o\bigl(\|t(x_1 - x_0)\|\bigr). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$p(x_1) - p(x_0) \geqslant \bigl\langle p'(x_0), x_1 - x_0\bigr\rangle + \frac{o\bigl(\|t(x_1 - x_0)\|\bigr)}{\|t(x_1 - x_0)\|} \cdot \|x_1 - x_0\|\,.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \to +0$, получаем (5).
Достаточность. Зафиксируем точки x_0, x_1, число $t \in [0,1]$ и положим

$$x(t) = tx_1 + (1-t)x_0.$$

Согласно (5) имеем

$$p(x_1) - p\bigl(x(t)\bigr) \geqslant \bigl\langle p'\bigl(x(t)\bigr), x_1 - x(t)\bigr\rangle, \tag{8}$$

$$p(x_0) - p\bigl(x(t)\bigr) \geqslant \bigl\langle p'\bigl(x(t)\bigr), x_0 - x(t)\bigr\rangle. \tag{9}$$

Умножим неравенство (8) на t, неравенство (9) — на $(1-t)$, после чего сложим их (в столбик). Приняв во внимание определение $x(t)$, получим

$$tp(x_1) + (1-t)p(x_0) - p\bigl(x(t)\bigr) \geqslant \bigl\langle p'\bigl(x(t)\bigr), tx_1 + (1-t)x_0 - x(t)\bigr\rangle = 0.$$

Значит,

$$p\bigl(x(t)\bigr) \leqslant tp(x_1) + (1-t)p(x_0).$$

Выпуклость функции $p(x)$ установлена. □

3°. Переходим к доказательству теоремы. Нужно проверить, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ при всех $x \in \Omega$.

По условию функция $f(x)$ — вогнутая (это значит, что $-f(x)$ — выпуклая функция). Для нее справедливо неравенство

$$f(x) - f(x_0) \leqslant \bigl\langle f'(x_0), x - x_0\bigr\rangle.$$

Пусть $x \in \Omega$. На основании условия Лагранжа (2) запишем

$$f(x) - f(x_0) \leqslant \Bigl\langle \sum_{i=1}^{s} v_i a_i'(x_0) + A^T u, x - x_0 \Bigr\rangle =$$

$$= \Bigl\langle \sum_{i=1}^{s} v_i a_i'(x_0), x - x_0 \Bigr\rangle + \langle u, Ax - Ax_0\rangle = \sum_{i=1}^{s} v_i \bigl\langle a_i'(x_0), x - x_0\bigr\rangle.$$

В силу выпуклости функций $a_i'(x)$ при всех $i \in 1:s$ имеем

$$\big\langle a_i'(x_0), x - x_0 \big\rangle \leqslant a_i(x) - a_i(x_0). \tag{10}$$

Вспомним, что по условию неотрицательности (4) все v_i неотрицательны. Умножим неравенство (10) на v_i и используем результат для продолжения оценки разности $f(x) - f(x_0)$. Получим

$$f(x) - f(x_0) \leqslant \sum_{i=1}^{s} v_i \big(a_i(x) - a_i(x_0)\big) = \sum_{i=1}^{s} v_i a_i(x) - \sum_{i=1}^{s} v_i a_i(x_0).$$

По условию дополнительности (3) последняя сумма равна нулю. Остается

$$f(x) - f(x_0) \leqslant \sum_{i=1}^{s} v_i a_i(x).$$

Так как $x \in \Omega$, то $a_i(x) \leqslant 0$ при всех $i \in 1:s$. Учитывая неотрицательность v_i, заключаем, что $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$.

Теорема доказана. $\square$