ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ*

В. Н. Малозёмов

v.malozemov@spbu.ru

16 апреля 2022 г.

1°. Пусть $F(u)$ и $G(v)$ — произвольные функции, заданные на произвольных множествах P и Q соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Экстремальные задачи

$$F(u) \to \min_{u \in P}, \qquad G(v) \to \min_{v \in Q} \tag{1}$$

называются эквивалентными, если для любого $u \in P$ можно указать $v \in Q$, такое, что $G(v) \leqslant F(u)$, и для любого $v \in Q$ можно указать $u \in P$, такое, что $F(u) \leqslant G(v)$.

Другими словами, две задачи на минимум эквивалентны, если каждому плану одной задачи можно сопоставить план другой задачи с равным или меньшим значением целевой функции.

ЛЕММА. *Для эквивалентных экстремальных задач* (1) *справедливо равенство*

$$\inf_{u \in P} F(u) = \inf_{v \in Q} G(v). \tag{2}$$

Обе задачи одновременно либо имеют решения, либо не имеют.

Доказательство. Введём обозначения

$$\mu = \inf_{u \in P} F(u), \qquad \nu = \inf_{v \in Q} G(v).$$

По определению эквивалентности для любого $u \in P$ найдется $v \in Q$ со свойством

$$F(u) \geqslant G(v) \geqslant \nu.$$

Отсюда на основании определения инфимума следует, что $\mu \geqslant \nu$.

*Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту «O&ML» http://www.apmath.spbu.ru/oml/

Аналогично для любого $v \in Q$ найдется $u \in P$ со свойством

$$G(v) \geqslant F(u) \geqslant \mu.$$

Отсюда следует, что $\nu \geqslant \mu$. Объединив неравенства $\mu \geqslant \nu$ и $\nu \geqslant \mu$, получим равенство $\mu = \nu$. Это соответствует (2).

Допустим, что $u_* \in P$ — точка минимума функции $F(u)$ на P. По эквивалентности можно указать точку $v_* \in Q$, удовлетворяющую условиям

$$\nu \leqslant G(v_*) \leqslant F(u_*) = \mu \leqslant \nu.$$

Значит, $G(v_*) = \nu$, то есть v_* — точка минимума функции $G(v)$ на Q.

Аналогично по эквивалентности для точки минимума $v_* \in Q$ функции $G(v)$ на Q можно указать точку $u_* \in P$, удовлетворяющую условиям

$$\mu \leqslant F(u_*) \leqslant G(v_*) = \nu \leqslant \mu.$$

Значит, $F(u_*) = \mu$, то есть u_* — точка минимума функции $F(u)$ на P.

В обоих случаях показано, как по решению одной из эквивалентных экстремальных задач восстановить решение другой. $\square$

2°. Приведём два примера.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим экстремальные задачи

$$\varphi(x) := \max_{i \in 1:m} f_i(x) \to \min_{x \in \Omega} \tag{3}$$

и

$$\begin{gathered} \psi(x,t) := t \to \min, \\ f_i(x) \leqslant t, \ i \in 1:m, \\ x \in \Omega. \end{gathered} \tag{4}$$

Покажем, что задачи (3) и (4) эквивалентны.

Плану $x_0 \in \Omega$ задачи (3) сопоставим план (x_0, t_0) задачи (4) с $t_0 = \max\limits_{i \in 1:m} f_i(x_0)$. В этом случае

$$\psi(x_0, t_0) = t_0 = \max_{i \in 1:m} f_i(x_0) = \varphi(x_0).$$

Наоборот, если (x_0, t_0) — план задачи (4), то x_0 — план задачи (3) и

$$\varphi(x_0) = \max_{i \in 1:m} f_i(x_0) \leqslant t_0 = \psi(x_0, t_0).$$

Отметим, что если (x_*, t_*) — решение задачи (4), то x_* — решение задачи (3), при этом согласно лемме выполняется равенство

$$\max_{i \in 1:m} f_i(x_*) = t_*.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим экстремальные задачи

$$p(x) := \sum_{i=1}^{m} \bigl[f_i(x)\bigr]_+ \to \min_{x \in \Omega} \tag{5}$$

и

$$\begin{aligned} &q(x,t) := \sum_{i=1}^{m} t_i \to \min, \\ &-f_i(x) + t_i \geqslant 0,\ i \in 1:m, \\ &t_i \geqslant 0,\ i \in 1:m, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $[u]_+ = \max\{0, u\}$. Покажем, что задачи (5) и (6) эквивалентны.

Плану x^{o} задачи (5) сопоставим план $(x^{\mathrm{o}}, t^{\mathrm{o}})$ задачи (6) с $t_i^{\mathrm{o}} = \bigl[f_i(x^{\mathrm{o}})\bigr]_+$, $i \in 1:m$. В этом случае

$$q(x^{\mathrm{o}}, t^{\mathrm{o}}) = \sum_{i=1}^{m} t_i^{\mathrm{o}} = \sum_{i=1}^{m} \bigl[f_i(x^{\mathrm{o}})\bigr]_+ = p(x^{\mathrm{o}}).$$

Наоборот, если $(x^{\mathrm{o}}, t^{\mathrm{o}})$ — план задачи (6), то x^{o} — план задачи (5). Покажем, что $p(x^{\mathrm{o}}) \leqslant q(x^{\mathrm{o}}, t^{\mathrm{o}})$.

Так как $t_i^{\mathrm{o}} \geqslant f_i(x^{\mathrm{o}})$ и $t_i^{\mathrm{o}} \geqslant 0$, то

$$t_i^{\mathrm{o}} \geqslant \max\bigl\{0, f_i(x^{\mathrm{o}})\bigr\} = \bigl[f_i(x^{\mathrm{o}})\bigr]_+.$$

Отсюда следует, что

$$p(x^{\mathrm{o}}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} t_i^{\mathrm{o}} = q(x^{\mathrm{o}}, t^{\mathrm{o}}).$$

Эквивалентность задач (5) и (6) установлена.

Отметим, что если (x^*, t^*) — решение задачи (6), то x^* — решение задачи (5), при этом согласно лемме выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} \bigl[f_i(x^*)\bigr]_+ = \sum_{i=1}^{m} t_i^*.$$