

В. Н. Малозёмов

С. М. Машарский

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

УДК 519.85, 372.851

Малозёмов В. Н., Машарский С. М.

Элементарные методы в экстремальных задачах.

Издание третье, переработанное. — СПб.: Издательство «Лань», 2022. — 171 с. — 37 рис.

В книге рассматриваются экстремальные задачи (задачи о наибольших и наименьших величинах), решение которых можно получить с помощью неравенств. Интерес представляют не только сами неравенства, но и условия, при которых неравенство выполняется как равенство. Именно эти условия позволяют найти решение экстремальной задачи. Широко используются неравенства между классическими средними величинами, неравенство Коши–Буняковского и неравенство Йенсена для строго выпуклых функций. От читателя требуется знание основ дифференциального исчисления функций одной переменной до производной второго порядка включительно.

Для учащихся старших классов физико-математических школ и студентов младших курсов математических факультетов университетов и педагогических вузов.

Содержание

Предисловие	5
Основные обозначения	7
1. Классические геометрические задачи	8
Дополнительные задачи	13
2. Параметрическая экстремальная задача	15
3. Экстремальные свойства треугольников	18
Дополнительные задачи	23
4. О центре правильного треугольника	25
5. Экстремальные алгебраические задачи	28
Дополнительные задачи	32
6. Еще одна параметрическая экстремальная задача	35
7. Преобразование экстремальной задачи	38
8. Разные задачи	41
9. Гипотеза Шапиро и теорема Дринфельда	50

10. Лемма Гиббса и задача Данскина	59
11. Задача Гермейера	67
Приложение А. Классические неравенства	77
1. Неравенство Коши	77
Задачи	82
2. Неравенство Коши–Буняковского	84
Задачи	87
Приложение В. Строго выпуклые функции	
и неравенство Йенсена	90
1. Строго выпуклые функции	90
2. Дифференцируемые строго выпуклые функции	96
3. Неравенство Йенсена и его обращение	101
4. Взвешенные средние положительного порядка	106
Задачи	108
Решения задач	111
Список литературы	171

Предисловие

Экстремальные задачи (задачи о наибольших и наименьших величинах) во все времена вызывали живой интерес. Для их решения разрабатывались новые методы, которые способствовали развитию математики. В постепенно формировавшейся общей теории экстремальных задач центральное место занимали необходимые условия оптимальности. Эти условия вместе с теоремой существования обычно позволяют находить решение экстремальной задачи либо в аналитическом виде, либо с помощью численных методов. В частном случае такая схема реализована в разделе 10 данной книги. В разделе 11 получено конструктивное решение экстремальной задачи без использования необходимых условий оптимальности.

Следует иметь в виду, что экстремальные задачи связаны с неравенствами. Интерес представляют не только сами неравенства, но и условия, при которых неравенство выполняется как равенство. Именно эти условия позволяют найти решение экстремальной задачи.

В данной книге рассматриваются экстремальные задачи, решение которых можно получить с помощью классических неравенств. Широко используются неравенства между средними величинами, неравенство Коши–Буняковского и неравенство Йенсена для строго выпуклых функций одной переменной. Необходимая информация об этих неравенствах (с полными доказательствами) приведена в двух приложениях. От читателя требуется знание основ дифференциального исчисления функций одной переменной до производной второго порядка включительно.

Книга имеет следующую структуру. Разделы 1–7 посвящены экстремальным свойствам геометрических тел и фи-

гур, а также алгебраических и тригонометрических выражений. В каждом из разделов 1, 3, 5 вначале приводятся решения пяти задач, а затем предлагаются 10 задач для самостоятельного решения. В разделах 2, 4, 6, 7 рассматривается по одной, более сложной задаче. Раздел 8 содержит 50 задач разного уровня сложности для самостоятельного решения. В разделах 9–11 анализируются три современные экстремальные задачи с интригующим содержанием.

В книгу включен раздел «Решения задач». Он содержит много оригинальных решений. Читателю рекомендуется сравнивать свои решения с решениями, предложенными в книге. Впрочем, польза будет и тогда, когда удастся просто разобраться в предложенном решении.

С видео-презентацией первого издания книги можно ознакомиться, пройдя по ссылке: <http://hdl.handle.net/11701/23765>

Занятия по элементарным методам в экстремальных задачах проводятся на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского университета с 1989 года. За это время накопился богатый материал, который послужил основой для данной книги. Кроме собственных наработок, использовались различные литературные источники. Их краткий список приведен в конце книги.

Благодарности. Авторы приносят глубокую благодарность Л. Д. Курляндчику, А. А. Третьякову, О. М. Дмитриевой, Е. Э. Ржевской, Е. К. Чернэуцану, А. В. Плоткину и Г. Ш. Тамасяну за помощь, оказанную на разных этапах работы над книгой. В частности, А. В. Плоткиным выполнены все сложные рисунки.

Август 2021 г.

В. Н. Малозёмов

С. М. Машарский

Основные обозначения

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел (числовая ось);

$1 : n$ — множество натуральных чисел от 1 до n включительно;

$\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — величина, равная наибольшему из чисел a_k , $k \in 1 : n$;

$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — величина, равная наименьшему из чисел a_k , $k \in 1 : n$;

$\lg, \ln$ — десятичный логарифм, натуральный логарифм;

$x = f^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $y = f(x)$;

$\angle ABC$ — угол ABC ;

$|AB|$ — длина отрезка AB ;

$g := h, h =: g$ — g равно h по определению;

(3.5) — пятая выделенная формула в разделе 3;

(А.1.6) — формула (1.6) в Приложении А;

(В.3.7) — формула (3.7) в Приложении В;

$\square$ — конец доказательства.

1. Классические геометрические задачи

1.1. Задача Ферма

Требуется вырезать у квадратного листа четыре одинаковых квадратных уголка так, чтобы, подняв вертикально боковые прямоугольники, получить коробку наибольшего объема.

Формализация. Обозначим длину стороны квадрата через a , а длину стороны угловых квадратиков через x (рис. 1).

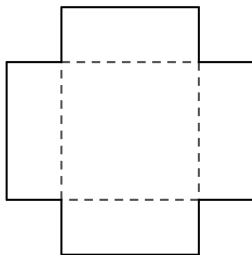


Рис. 1. Квадрат с вырезанными уголками

Запишем формулу для объема коробки

$$V = (a - 2x)^2 x.$$

По смыслу задачи $x \in (0, \frac{a}{2})$, поэтому сомножители в формуле для объема V положительны. Нужно максимизировать величину V при условии $x \in (0, \frac{a}{2})$.

Решение. По неравенству Коши (А.1.6) имеем

$$V = \frac{1}{4}(a - 2x)(a - 2x)(4x) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2a}{3} \right)^3 = \frac{2}{27} a^3.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a - 2x = 4x$, то есть при $x = \frac{1}{6}a$.

О т в е т. Коробка будет иметь наибольший объем при $x = \frac{1}{6}a$. Величина наибольшего объема равна $\frac{2}{27}a^3$.

1.2. Задача о прямоугольном параллелепипеде

Найти прямоугольный параллелепипед наибольшего объема при заданной площади его полной поверхности.

Ф о р м а л и з а ц и я. Обозначим через x_1, x_2, x_3 длины ребер параллелепипеда и через S площадь его полной поверхности. Требуется максимизировать величину

$$V = x_1 x_2 x_3$$

при ограничениях

$$2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) = S;$$

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0.$$

Р е ш е н и е. Очевидно, что

$$V^2 = (x_1 x_2)(x_2 x_3)(x_3 x_1).$$

Согласно неравенству Коши (А.1.6) имеем

$$V^2 \leq \left(\frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1}{3} \right)^3 = \left(\frac{S}{6} \right)^3.$$

Отсюда следует, что

$$V \leq \left(\frac{S}{6} \right)^{3/2}. \quad (1.1)$$

Неравенство выполняется как равенство в случае $x_1 x_2 = x_2 x_3 = x_3 x_1$, то есть только тогда, когда

$$x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{1}{6}S}. \quad (1.2)$$

О т в е т. Прямоугольный параллелепипед с заданной площадью S полной поверхности будет иметь наибольший объем при выполнении условия (1.2). Величина наибольшего объема равна $(\frac{1}{6} S)^{3/2}$.

З а м е ч а н и е. С помощью неравенства (1.1) можно решить в некотором смысле обратную задачу: *при фиксированном объеме V прямоугольного параллелепипеда найти минимальную площадь его полной поверхности*. Для этого достаточно переписать неравенство (1.1) в виде

$$S \geq 6 V^{2/3}.$$

Минимальная площадь получится при $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt[3]{V}$. Величина наименьшей площади равна $6 V^{2/3}$.

1.3. Задача о коническом фильтре

Лист бумаги имеет форму круга радиуса R . Из него вырежем сектор с углом φ радиан, а края оставшейся части склеим. Получим боковую поверхность прямого кругового конуса, длина образующей которого равна радиусу круга. Требуется найти угол φ , порождающий конус наибольшего объема.

Такая задача возникает в химических лабораториях.

Рисунок 2 поясняет постановку задачи.

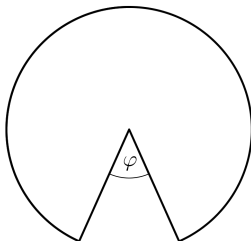


Рис. 2. Круг с вырезанным сектором

Формализация. Длина дуги вырезанного сектора равна φR , так что длина окружности, лежащей в основании конуса, равна $2\pi R - \varphi R$. Обозначим через r радиус этой окружности. Тогда $2\pi r = 2\pi R - \varphi R$ и

$$\varphi = 2\pi \left(1 - \frac{r}{R}\right). \quad (1.3)$$

Высота конуса h равна $\sqrt{R^2 - r^2}$, а его объем выражается формулой

$$V(r) = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Будем максимизировать величину $V(r)$ по $r \in (0, R)$.

Решение. По неравенству (А.2.6) между средним геометрическим и средним квадратичным имеем

$$V(r) = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{R^2 - r^2} \right) \leq \frac{2}{3} \pi \left(\frac{R^2}{3} \right)^{3/2} = \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi R^3.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$\frac{r}{\sqrt{2}} = \sqrt{R^2 - r^2},$$

то есть только при $r = \sqrt{\frac{2}{3}} R$.

Принимая во внимание формулу (1.3), приходим к следующему заключению: конус будет иметь наибольший объем, когда

$$\varphi = 2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Величина наибольшего объема равна $\frac{2\sqrt{3}}{27} \pi R^3$.

1.4. Задача о шатре

При данном объеме прямого кругового конуса найти наименьшую площадь его боковой поверхности.

Формализация. Введем обозначения: r — радиус основания конуса; h — его высота; ℓ — длина образующей. Для

объема V и площади S боковой поверхности конуса справедливы формулы

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, \quad S = \pi r \ell.$$

Требуется при заданном V минимизировать S .

Решение. Так как $\ell^2 = r^2 + h^2$, то

$$S^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) = \pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{r^2}.$$

Согласно неравенству Коши (А.1.6) имеем

$$S^2 = \pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{2r^2} + \frac{9V^2}{2r^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{81}{4} \pi^2 V^4},$$

так что

$$S \geq \sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{9}{2} \pi V^2} = 3\sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{1}{6} \pi V^2}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $2\pi^2 r^6 = 9V^2 = \pi^2 r^4 h^2$, то есть когда $2r^2 = h^2$. В частности, $9V^2 = 2\pi^2 r^6$. Отсюда следует, что

$$r = \sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}} V^{2/3}. \quad (1.4)$$

Ответ. При заданном объеме V прямой круговой конус будет иметь наименьшую площадь S боковой поверхности при r , определяемом формулой (1.4), и $h = r\sqrt{2}$. Величина наименьшей площади равна $3\sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{1}{6} \pi V^2}$.

1.5. Задача Кеплера

В шар вписать цилиндр наибольшего объема.

Формализация. Обозначим через D диаметр шара и через d, h — диаметр основания и высоту вписанного цилиндра (рис. 3). Для объема вписанного цилиндра справедлива формула

$$V = \frac{1}{4} \pi d^2 h.$$

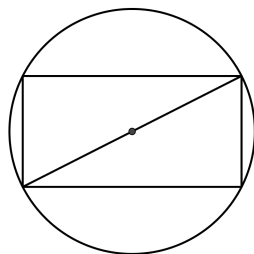


Рис. 3. Вертикальное сечение вписанного цилиндра

Нужно максимизировать величину V при условии

$$d^2 + h^2 = D^2. \quad (1.5)$$

Решение. Воспользуемся неравенством (А.2.6) между средним геометрическим и средним квадратичным. Запишем

$$V = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot h \right) \leq \frac{1}{2} \pi \left(\frac{d^2 + h^2}{3} \right)^{3/2}.$$

С учетом (1.5) получаем

$$V \leq \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{3} \right)^{3/2} D^3 = \frac{\sqrt{3}}{18} \pi D^3.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $d = h\sqrt{2}$. Соответствующее h найдем из условия (1.5):

$$h = \frac{\sqrt{3}}{3} D. \quad (1.6)$$

Ответ. Вписанный цилиндр будет иметь наибольший объем при h вида (1.6) и $d = h\sqrt{2}$. Величина наибольшего объема равна $\frac{\sqrt{3}}{18} \pi D^3$.

Дополнительные задачи

- 1.6. Объем ящика (без крышки) равен V . Чему равна наименьшая площадь его поверхности?

- 1.7. Найдите наибольшую площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда при данной сумме длин всех его ребер.
- 1.8. Укажите размеры прямоугольного ящика заданного объема V с наименьшей площадью поверхности при условии, что отношение длин сторон основания равно k .
- 1.9. Какой наибольший объем может иметь прямой круговой цилиндр, если площадь его полной поверхности равна S ?
- 1.10. Бак цилиндрической формы должен вмещать V литров воды. Каковы должны быть его размеры, чтобы площадь поверхности (без крышки) была минимальной?
- 1.11. Найдите наибольший объем правильной треугольной призмы, у которой периметр боковой грани равен P .
- 1.12. Когда прямоугольный параллелепипед, вписанный в шар, имеет наибольший объем?
- 1.13. В прямой круговой конус вписан цилиндр. При каком условии вписанный цилиндр будет иметь наибольший объем?
- 1.14. Впишите в шар прямой круговой конус наибольшего объема.
- 1.15. Найдите прямой круговой конус наименьшего объема, описанный около шара.

2. Параметрическая экстремальная задача

2.1. Рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Тело заданного объема V имеет форму прямого кругового цилиндра с крышкой в виде прямого кругового конуса. Найти наименьшую площадь поверхности такого тела.

Обозначим через r , h радиус основания и высоту цилиндра, через ℓ , α — длину образующей и угол между образующей и плоскостью, на которую конус опирается (рис. 4).

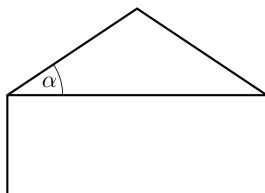


Рис. 4. Вертикальное сечение составного тела

Формализуем задачу. Требуется минимизировать величину

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h + \pi r \ell$$

при ограничении

$$\pi r^2 h + \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{tg} \alpha = V. \quad (2.1)$$

Сначала рассмотрим задачу при фиксированном $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Отметим, что $\ell = \frac{r}{\cos \alpha}$ и

$$\pi r h = \frac{V}{r} - \frac{1}{3} \pi r^2 \operatorname{tg} \alpha,$$

поэтому

$$S = \pi r^2 \left(1 - \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}.$$

Воспользуемся неравенством Коши (А.1.6). Получим

$$S \geq 3 \sqrt[3]{\pi V^2 \left(1 - \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}\right)}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$\pi r^2 \left(1 - \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}\right) = \frac{V}{r} = \pi r h + \frac{1}{3} \pi r^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{h}{r} = 1 - \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (2.2)$$

Таким образом, для минимальной площади полной поверхности составного тела при фиксированном α справедлива формула

$$S(\alpha) = 3 \sqrt[3]{\pi V^2 \left(1 - \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}\right)}.$$

Оптимальные значения r и h находятся из условий (2.1) и (2.2).

2.2. Теперь будем минимизировать функцию $S(\alpha)$ по $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Это сводится к минимизации функции

$$\varphi(\alpha) = 1 - \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Имеем

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{2}{3 \cos^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\sin \alpha - \frac{2}{3} \right).$$

Производная обращается в ноль при $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, положительна при больших α и отрицательна при меньших α . Значит, минимум $\varphi(\alpha)$ на $(0, \frac{\pi}{2})$ достигается в единственной точке

$$\alpha_* = \arcsin \frac{2}{3}.$$

В этой же точке достигается и минимум $S(\alpha)$. Так как

$$\varphi(\alpha_*) = 1 - \frac{4}{3\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{3},$$

то

$$S(\alpha_*) = 3 \sqrt[3]{\pi V^2 \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)}.$$

Оптимальные значения r_* , h_* , соответствующие углу $\alpha = \alpha_*$, в силу (2.1) и (2.2) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{h_*}{r_*} &= \frac{V}{\pi r_*^3} - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha_*, \\ \frac{h_*}{r_*} &= 1 - \operatorname{tg} \alpha_* + \frac{1}{\cos \alpha_*}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{V}{\pi r_*^3} = 1 - \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha_* + \frac{1}{\cos \alpha_*} = \varphi(\alpha_*) = 1 + \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Получаем

$$r_* = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) V}.$$

Согласно (2.3) имеем

$$h_* = r_* \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

3. Экстремальные свойства треугольников

Треугольник — простейшая фигура на плоскости, однако и он обладает многими экстремальными свойствами.

3.1. Задача Эвклида

Дан треугольник ABC (рис. 5). Выбрать на стороне AB такую точку D , чтобы порожденный ей параллелограмм $EDFC$ имел наибольшую площадь.

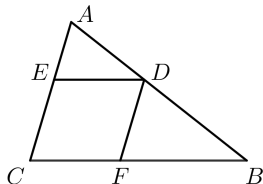


Рис. 5. Иллюстрация к задаче Эвклида

Формализация. Введем обозначения:

a, h — длина основания и высота треугольника ABC ;

x — длина основания треугольника ADE ;

y — высота трапеции $EDBC$.

Так как треугольник ABC является объединением треугольника ADE и трапеции $EDBC$, то его площадь можно вычислить двумя способами:

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}x(h - y) + \frac{1}{2}(a + x)y.$$

Отсюда следует, что $ah = xh + ay$. Значит,

$$y = \frac{h}{a}(a - x).$$

Для площади S параллелограмма $EDFC$ получаем формулу

$$S = xy = \frac{h}{a}x(a-x). \quad (3.1)$$

Требуется максимизировать S по $x \in (0, a)$.

Решение. Воспользуемся неравенством Коши (А.1.6) между средним геометрическим и средним арифметическим положительных чисел x и $a-x$, согласно которому

$$x(a-x) \leq \left(\frac{x+(a-x)}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}. \quad (3.2)$$

Равенство в этом неравенстве достигается только тогда, когда $x = a-x$, то есть только при $x = \frac{1}{2}a$. Объединив (3.1) и (3.2), придем к оценке

$$S \leq \frac{1}{4}ah.$$

Она выполняется как равенство только при $x = \frac{1}{2}a$.

Ответ. Площадь параллелограмма $EDFC$ будет наибольшей, если точка D является средней точкой стороны AB .

3.2. Простейшая изопериметрическая задача

В каком случае треугольник с данным полупериметром p имеет наибольшую площадь?

Решение. Обозначим через a, b, c длины сторон треугольника с полупериметром p . Запишем формулу Герона для площади треугольника

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (3.3)$$

По неравенству Коши (А.1.6) имеем

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3. \quad (3.4)$$

Объединив (3.3) и (3.4), придем к неравенству

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$p - a = p - b = p - c,$$

то есть когда $a = b = c$.

О т в е т. Наибольшую площадь при заданном полупериметре имеет равносторонний треугольник.

3.3. Задача об отношении радиусов вписанной и описанной окружностей

Докажите, что отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности не превосходит $\frac{1}{2}$. Когда достигается равенство?

Ф о р м а л и з а ц и я. Воспользуемся двумя формулами для площади треугольника

$$S = pr, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad (3.5)$$

где a, b, c — длины сторон треугольника; p — полупериметр; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно. Из (3.5) следует, что

$$S^2 = \frac{1}{4} pabc \frac{r}{R},$$

так что

$$\frac{r}{R} = \frac{4S^2}{pabc}.$$

С учетом формулы Герона получаем

$$\frac{r}{R} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}. \quad (3.6)$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$2\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq 2p - a - b = c;$$

$$2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq 2p - b - c = a;$$

$$2\sqrt{(p-c)(p-a)} \leq 2p - c - a = b.$$

Перемножим эти неравенства. Получим

$$8(p-a)(p-b)(p-c) \leq abc. \quad (3.7)$$

Объединив (3.6) и (3.7), придем к требуемому результату $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$. Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a = b = c$.

О т в е т. Отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности треугольника не превосходит $\frac{1}{2}$ и достигает $\frac{1}{2}$ только для равностороннего треугольника.

3.4. Задача о медиане

У равнобедренного треугольника известна длина медианы на боковую сторону. Укажите наибольшую площадь такого треугольника.

Формализация. На рисунке 6 изображен равнобедренный треугольник ABC с медианой CD , длина которой равна m .

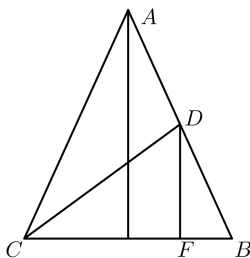


Рис. 6. Иллюстрация к задаче о медиане

Обозначим через a , h длину основания и высоту треугольника ABC и через x длину отрезка CF . Так как точка D — середина стороны AB , то

$$h = 2\sqrt{m^2 - x^2}, \quad x = \frac{3}{4}a.$$

Отсюда следует формула для площади треугольника ABC :

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{4}{3}x\sqrt{m^2 - x^2}.$$

Решение. По неравенству (А.2.6) между средним геометрическим и средним квадратичным получаем

$$S \leq \frac{4}{3} \frac{x^2 + (m^2 - x^2)}{2} = \frac{2}{3}m^2.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $x^2 = m^2 - x^2$, то есть только при $x = \frac{m}{\sqrt{2}}$.

Отметим, что в оптимальном случае синус угла DCF равен

$$\frac{\sqrt{m^2 - x^2}}{m} = \frac{x}{m} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

так что сам угол DCF равен $\frac{\pi}{4}$.

О т в е т. Наибольшая площадь равнобедренного треугольника с заданной длиной медианы на боковую сторону равна $\frac{2}{3}m^2$. Она достигается только тогда, когда угол между медианой и основанием треугольника равен $\frac{\pi}{4}$.

3.5. Задача об объеме тела вращения

Периметр равнобедренного треугольника равен $2r$. Какой длины должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

Формализация. Обозначим длину основания равнобедренного треугольника через a и длину боковых сторон через b . Тело вращения состоит из двух конусов. Его объем равен

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)\frac{a}{2} = \frac{\pi}{12}(4b^2 - a^2)a = \\ &= \frac{\pi}{12}(2b - a)(2b + a)a. \end{aligned}$$

Учитывая, что $2b + a = 2p$ и $2b - a = 2p - 2a$, получаем

$$V = \frac{\pi}{3} pa(p - a).$$

Решение. Имеем

$$V \leq \frac{\pi}{12} p^3.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a = p - a$, то есть только при $a = \frac{1}{2}p$. Длина b боковых сторон равна $\frac{3}{4}p$.

Ответ. Наибольший объем тела вращения равен $\frac{\pi}{12}p^3$. Он достигается, когда длина основания треугольника равна $\frac{1}{2}p$, а длина боковых сторон равна $\frac{3}{4}p$.

Дополнительные задачи

- 3.6. Даны угол (острый или тупой) и точка M внутри него. Проведите через точку M прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник наименьшей площади.
- 3.7. Даны острый угол и точка M внутри него. Найдите две точки A и B на сторонах угла так, чтобы периметр треугольника MAV был наименьшим.
- 3.8. Когда треугольник с данным основанием и данной суммой длин боковых сторон имеет наибольшую площадь?
- 3.9. Чему равна наибольшая площадь равнобедренного треугольника, у которого длина боковой стороны равна ℓ ?
- 3.10. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна d . В каком случае длина его гипотенузы будет наименьшей?

- 3.11. В условиях предыдущей задачи выясните, когда длина высоты, опущенной из прямого угла на гипотенузу, будет наибольшей.
- 3.12. Известен полупериметр p треугольника. Найдите наибольший радиус вписанной окружности.
- 3.13. Известна площадь S треугольника. Выясните, когда сумма квадратов длин сторон треугольника принимает наименьшее значение.
- 3.14. Внутри остроугольного треугольника укажите точку, у которой наибольшее из расстояний до вершин треугольника минимально.
- 3.15. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника с данным полупериметром p .

4. О центре правильного треугольника

4.1. Центром правильного (равностороннего) треугольника называется точка пересечения всех его медиан, высот и биссектрис. Эта точка является также центром вписанной и описанной окружностей.

Центр обладает некоторыми экстремальными свойствами. Рассмотрим одно из них.

Теорема 4.1. *Центр правильного треугольника является единственной внутренней точкой, сумма расстояний которой до вершин треугольника минимальна.*

Доказательство. На рисунке 7 изображены правильный треугольник ABC с центром O и его копия — треугольник $AB'B$, полученный вращением треугольника ABC вокруг точки A на 60° против часовой стрелки.

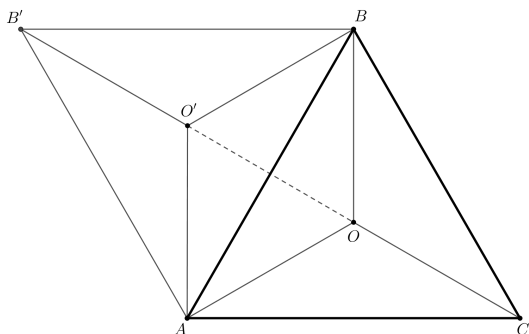


Рис. 7. Правильный треугольник и его копия

Соединим точки O' и O отрезком. Треугольник $AO'O$ равносторонний, так как $\angle O'AO = 60^\circ$ и $|AO'| = |AO|$. Точки B' , O' , O и C лежат на одной прямой. Очевидно, что

$|B'O'| = |BO|$ и $|AO| = |O'O|$. Поэтому

$$|OA| + |OB| + |OC| = |B'C|. \quad (4.1)$$

Таким образом, сумма расстояний от точки O до вершин треугольника ABC равна длине отрезка $B'C$.

Теперь возьмем произвольную внутреннюю точку P треугольника ABC . При повороте треугольника ABC вокруг точки A на 60° против часовой стрелки точки B, P перейдут соответственно в точки B', P' (рис. 8).

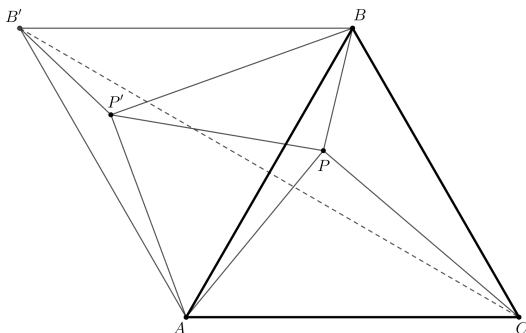


Рис. 8. Образ точки P при повороте отрезка AP на 60°

Соединим точки P и P' отрезком. Получим правильный треугольник $AP'P$. По построению $|B'P'| = |BP|$ и $|P'P| = |AP|$, поэтому сумма $|PA| + |PB| + |PC|$ равна длине ломаной $B'P'PC$. Длина этой ломаной не меньше $|B'C|$. Учитывая (4.1), получаем

$$|PA| + |PB| + |PC| \geq |OA| + |OB| + |OC|. \quad (4.2)$$

Неравенство (4.2) выполняется как равенство только тогда, когда точки P и P' лежат на отрезке $B'C$ (рис. 9). Покажем, что это возможно лишь при $P = O$.

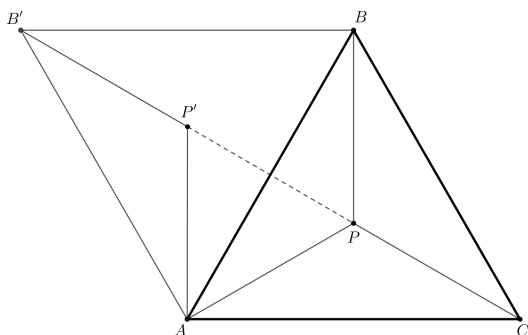


Рис. 9. Случай, когда точки P и P' лежат на отрезке $B'C$

По построению $\angle B'AC = 120^\circ$ и $\angle P'PA = 60^\circ$. Из первого равенства следует, что $\angle PCA = 30^\circ$, из второго — что $\angle APC = 120^\circ$. Значит, $\angle PAC = 30^\circ$. Получили, что треугольник APC равнобедренный. У него $|PA| = |PC|$.

Далее, у ромба $ACBB'$ диагонали $B'C$ и BA взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам. Это гарантирует, что $|PB| = |PA|$. Приходим к равенствам $|PB| = |PA| = |PC|$. Они характеризуют точку P как центр треугольника ABC .

Теорема доказана. □

5. Экстремальные алгебраические задачи

Переходим к алгебраическим задачам.

5.1. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = (x+1)^3 + \frac{6}{x^2}$$

на полуоси $(0, +\infty)$.

Решение. Пользуясь неравенством Коши между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + \frac{6}{x^2} = \\ &= x^3 + x^2 + x^2 + x^2 + x + x + x + 1 + \underbrace{\frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^2}}_{6 \text{ раз}} \geq \\ &\geq 14 \sqrt[14]{\frac{x^{12}}{x^{12}}} = 14. \end{aligned}$$

Неравенство выполняется как равенство только при $x = 1$.

Ответ. Наименьшее значение функции $f(x)$ на $(0, +\infty)$ равно 14 и достигается в единственной точке $x = 1$.

5.2. Даны неотрицательные числа a, b, c , в сумме равные единице. Найдите наименьшее значение выражения

$$w = \sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2}.$$

Решение. Для неотрицательных чисел x, y имеем

$$4(x^2 + xy + y^2) \geq 3(x+y)^2, \quad (5.1)$$

причем неравенство выполняется как равенство только при $x = y$. Из (5.1) следует, что

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y).$$

Применив это неравенство к оценке w , получим

$$w \geq \sqrt{3}(a + b + c) = \sqrt{3}.$$

Неравенство выполняется как равенство только при $a = b = c = \frac{1}{3}$.

О т в е т. Наименьшее значение w равно $\sqrt{3}$. Оно достигается в единственном случае $a = b = c = \frac{1}{3}$.

5.3. Найдите наименьшее значение выражения

$$w = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$$

при ограничениях

$$x + y + z = 1, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$w = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \right) + \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right) + \left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \right) \right].$$

Каждую круглую скобку оценим по неравенству Коши. В результате получим

$$w \geq y + z + x = 1.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$\frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y}.$$

Это возможно лишь при $x = z = y$.

О т в е т. Наименьшее значение w равно единице и достигается в единственном случае, когда $x = y = z = \frac{1}{3}$.

5.4. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, A$ — положительные числа и $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные вещественные числа. Найдите решение следующей задачи: максимизировать выражение

$$w = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n &= A, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ \dots, \ x_n &\geq 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Решение. Набор чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий условиям (5.2), будем называть *планом*. Требуется найти план, на котором выражение w достигает наибольшего значения.

Обозначим $N = 1 : n$,

$$M = \max_{k \in N} \left\{ \frac{c_k}{a_k} \right\},$$

и пусть $J = \{k \in N \mid c_k/a_k = M\}$. Для любого плана $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k x_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{c_k}{a_k} - M \right) a_k x_k + M \sum_{k=1}^n a_k x_k = \\ &= \sum_{k \in N \setminus J} \left(\frac{c_k}{a_k} - M \right) a_k x_k + MA. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Так как

$$\frac{c_k}{a_k} < M \text{ при } k \in N \setminus J,$$

коэффициенты a_k положительны и $x_k \geq 0$, то

$$\sum_{k \in N \setminus J} \left(\frac{c_k}{a_k} - M \right) a_k x_k \leq 0,$$

причем неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$x_k = 0 \text{ при всех } k \in N \setminus J. \quad (5.4)$$

На основании (5.3) заключаем, что

$$\sum_{k=1}^n c_k x_k \leq MA.$$

Оптимальным будет любой план, удовлетворяющий условию (5.4).

Укажем основные частные решения. Зафиксируем индекс $k_0 \in J$. План $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с компонентами

$$x_k = \begin{cases} A/a_{k_0} & \text{при } k = k_0, \\ 0 & \text{при остальных } k \in N \end{cases} \quad (5.5)$$

будет оптимальным. Если множество J состоит из единственного индекса k_0 , то план с компонентами (5.5) — единственное решение данной задачи.

Замечание. Рассмотренная задача является простейшей задачей линейного программирования.

5.5. Найдите наименьшее значение выражения

$$w = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \dots + c_n x_n^2$$

при ограничении

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = A.$$

Здесь все c_k положительны и A отлично от нуля.

Решение. Согласно неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{c_k}} (\sqrt{c_k} x_k) \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{c_k} \right) \left(\sum_{k=1}^n c_k x_k^2 \right). \quad (5.6)$$

Отсюда следует, что для любого плана $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n c_k x_k^2 \geq A^2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{c_k} \right)^{-1}. \quad (5.7)$$

Неравенство (5.6) (а значит, и (5.7)) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $\sqrt{c_k} x_k = t \frac{a_k}{\sqrt{c_k}}$ при некотором t и всех $k \in 1 : n$, то есть при $x_k = t \frac{a_k}{c_k}$, $k \in 1 : n$. Константу t найдем из ограничения задачи. Получим

$$t = A \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{c_k} \right)^{-1}.$$

Компоненты оптимального плана принимают вид

$$x_k = A \frac{a_k}{c_k} \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{c_k} \right)^{-1}, \quad k \in 1 : n.$$

З а м е ч а н и е. Рассмотренная задача является простейшей задачей квадратичного программирования.

Дополнительные задачи

5.6. Найдите наибольшее значение выражения

$$w = ab + bc + ca$$

при условии $a + b + c = 1$.

5.7. Найдите наибольшее значение выражения

$$w = ab + bc$$

при условии $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

5.8. Пусть a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Найдите наименьшее значение выражения

$$w = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}.$$

- 5.9. Пусть x, y — числа из интервала $(-1, 1)$, удовлетворяющие условию $x + y = a$, где $a \in (-2, 2)$ — параметр. Найдите наибольшее значение выражения

$$w = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}.$$

- 5.10. Найдите наименьшее значение выражения

$$w = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} + \frac{d}{1-d},$$

где a, b, c, d — числа из интервала $(0, 1)$, удовлетворяющие условию

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

- 5.11. Найдите наименьшее значение выражения

$$w = \frac{a}{a+2b+c} + \frac{b}{b+2c+d} + \frac{c}{c+2d+a} + \frac{d}{d+2a+b},$$

где a, b, c, d — произвольные положительные числа.

- 5.12. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — произвольные положительные числа. Найдите наименьшее значение выражения

$$w = \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1} + a_{k+2}}{a_k},$$

где $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$.

- 5.13. Найдите наименьшее значение выражения

$$w = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{s - a_k},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — произвольные положительные числа и $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

5.14. Найдите наименьшее значение выражения

$$w = \sum_{k=1}^n \frac{s - a_k}{a_k},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — положительные числа и

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

5.15. Найдите наибольшее значение выражения

$$w = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{s + a_k},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — положительные числа и

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

6. Еще одна параметрическая экстремальная задача

Очередная задача содержит всего две переменные, однако наличие параметра в ограничении-неравенстве делает ее анализ совсем непростым. Итак,

требуется минимизировать функцию

$$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$$

при ограничении $ax^2 \geq y$. Здесь $a > 0$ — параметр.

Решение. При $ax^2 \geq y$ имеем

$$\begin{aligned} f(x, y) &\geq \frac{y}{a} + (y - 1)^2 = y^2 - \left(2 - \frac{1}{a}\right)y + 1 = \\ &= \left[y - \left(1 - \frac{1}{2a}\right)\right]^2 + \frac{1}{a} - \frac{1}{4a^2} \geq \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{4a}\right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Неравенство

$$f(x, y) \geq \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{4a}\right)$$

выполняется как равенство только тогда, когда

$$y = 1 - \frac{1}{2a} \quad \text{и} \quad ax^2 = y.$$

Обозначим $y_* = 1 - \frac{1}{2a}$. При $a > \frac{1}{2}$ будет $y_* > 0$. Из условия $ax^2 = y_*$ находим

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2a}\right)}.$$

Таким образом, при $a > \frac{1}{2}$ исходная задача имеет два решения

$$\left(\sqrt{\frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2a}\right)}, 1 - \frac{1}{2a}\right) \quad \text{и} \quad \left(-\sqrt{\frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2a}\right)}, 1 - \frac{1}{2a}\right). \quad (6.2)$$

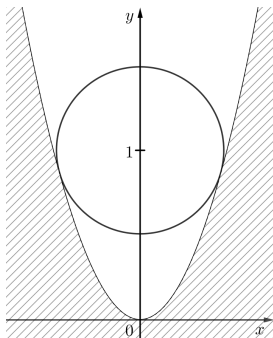


Рис. 10. Оптимальная ситуация при $a > \frac{1}{2}$

Рисунок 10 поясняет эту ситуацию. Заштриховано множество векторов (x, y) , удовлетворяющих ограничению задачи.

Пусть $a \in (0, \frac{1}{2}]$. Прежде всего отметим, что на парах (x, y) с $y < 0$ справедливо неравенство

$$f(x, y) > 1.$$

Возьмем пару (x, y) , удовлетворяющую условиям $y \geq 0$ и $ax^2 \geq y$. Так же как при выводе неравенства (6.1), получим

$$f(x, y) \geq y^2 + \frac{2}{a} \left(\frac{1}{2} - a \right) y + 1 \geq 1.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $ax^2 = y$ и $y = 0$, то есть на паре $(0, 0)$.

Значит, при $a \in (0, \frac{1}{2}]$ исходная задача имеет единственное решение $x_* = y_* = 0$.

Рисунок 11 иллюстрирует этот результат. Окружность $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ находится над параболой $y = ax^2$ при всех $a \in (0, \frac{1}{2}]$, касаясь параболы в начале координат.

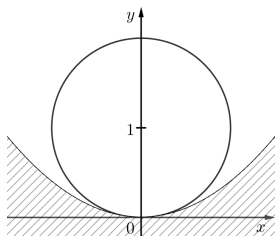


Рис. 11. Оптимальная ситуация при $a \in (0, \frac{1}{2}]$

Отвeт. При $a > \frac{1}{2}$ задача имеет два решения вида (6.2). Минимальное значение целевой функции $f(x, y)$ равно $\frac{1}{a}(1 - \frac{1}{4a})$. При $a \in (0, \frac{1}{2}]$ решение единственно: $x_* = y_* = 0$. Минимальное значение функции $f(x, y)$ равно единице.

Замечание. Значение параметра $a = \frac{1}{2}$ является критическим. При $a > \frac{1}{2}$ задача имеет два решения, а при $a = \frac{1}{2}$ и $a \in (0, \frac{1}{2})$ решение единственное.

7. Преобразование экстремальной задачи

Рассмотрим экстремальную задачу с большим числом параметров:

максимизировать величину

$$w = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$$

при следующих ограничениях

$$a_1 x_1^{\mu_1} + a_2 x_2^{\mu_2} + \dots + a_n x_n^{\mu_n} = A,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0.$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, a_1, a_2, \dots, a_n, A$ — положительные вещественные параметры.

Получим явное решение этой задачи.

Введем обозначения

$$\beta_k = \frac{\lambda_k}{\mu_k}, \quad s = \sum_{k=1}^n \beta_k, \quad \alpha_k = \frac{\beta_k}{s},$$

$$B = \prod_{k=1}^n \left(\frac{\beta_k}{a_k} \right)^{\beta_k}.$$

Теорема 7.1. *Наибольшее значение w равно $B \left(\frac{1}{s} A \right)^s$ и достигается на единственном векторе $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ с компонентами*

$$x_k^* = \left(A \frac{\alpha_k}{a_k} \right)^{1/\mu_k}, \quad k \in 1 : n.$$

Доказательство. Запишем

$$\begin{aligned} x_k^{\lambda_k} &= \left(\frac{a_k \mu_k}{\lambda_k} x_k^{\mu_k} \right)^{\lambda_k / \mu_k} \left(\frac{\lambda_k}{a_k \mu_k} \right)^{\lambda_k / \mu_k} = \\ &= \left(\frac{a_k}{\beta_k} x_k^{\mu_k} \right)^{\beta_k} \left(\frac{\beta_k}{a_k} \right)^{\beta_k}. \end{aligned}$$

Для w получим другое представление

$$w = \prod_{k=1}^n x_k^{\lambda_k} = B \prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{\beta_k} x_k^{\mu_k} \right)^{\beta_k}. \quad (7.1)$$

По определению, числа α_k положительные и в сумме равны единице. Согласно неравенству (В.3.10) между взвешенным средним геометрическим и взвешенным средним арифметическим имеем

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{\beta_k} x_k^{\mu_k} \right)^{\alpha_k} \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\frac{a_k}{\beta_k} x_k^{\mu_k} \right) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^n a_k x_k^{\mu_k} = \frac{1}{s} A. \quad (7.2)$$

Возведем это неравенство в степень s . Получим

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{\beta_k} x_k^{\mu_k} \right)^{\beta_k} \leq \left(\frac{1}{s} A \right)^s.$$

Неравенство (7.1) для допустимых $x_1, x_2, \dots, x_n$ принимает вид

$$w \leq B \left(\frac{1}{s} A \right)^s. \quad (7.3)$$

Это неравенство выполняется как равенство только тогда, когда неравенство (7.2) выполняется как равенство. Последнее возможно только тогда, когда

$$\frac{a_1}{\beta_1} x_1^{\mu_1} = \frac{a_2}{\beta_2} x_2^{\mu_2} = \dots = \frac{a_n}{\beta_n} x_n^{\mu_n} =: h.$$

Приходим к формуле

$$x_k = \left(h \frac{\beta_k}{a_k} \right)^{1/\mu_k}, \quad k \in 1:n.$$

Константу h найдем из условия

$$\sum_{k=1}^n a_k \left(h \frac{\beta_k}{a_k} \right) = A.$$

Получим

$$h = A / \left(\sum_{k=1}^n \beta_k \right) = \frac{1}{s} A.$$

Подведем итог: неравенство (7.3) выполняется как равенство только тогда, когда

$$x_k = \left(\frac{1}{s} A \frac{\beta_k}{a_k} \right)^{1/\mu_k} = \left(A \frac{\alpha_k}{a_k} \right)^{1/\mu_k}, \quad k \in 1 : n.$$

Теорема доказана. □

8. Разные задачи

8.1. Два корабля движутся по двум взаимно перпендикулярным направлениям со скоростями v_1 и v_2 соответственно. В начальный момент времени первый корабль находится на расстоянии s_1 до точки пересечения маршрутов, а второй корабль — на расстоянии s_2 . В какой момент расстояние между кораблями будет наименьшим и чему равно это наименьшее расстояние?

8.2. Найдите наименьшее значение величины

$$w = a^2 + ab + b^2 + a + b,$$

где a и b — произвольные вещественные числа.

8.3. Пусть c — положительная константа. Чему равно наименьшее значение выражения

$$w = (1 + c)a^2 + (1 + \frac{1}{c})b^2$$

при ограничении $a + b = 1$?

8.4. Пусть a, b, c — произвольные вещественные числа, сумма которых равна единице. Найдите наименьшее значение выражения

$$w = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca.$$

8.5. Какова наибольшая площадь выпуклого четырехугольника при условии, что длина трех его сторон равна единице?

8.6. Периметр кругового сектора равен P . Укажите параметры сектора, при которых его площадь будет наибольшей.

8.7. Прямоугольник вписан в фигуру, ограниченную параболой $y = ax^2$ и прямой $y = h$. Здесь a и h — положительные параметры. Чему равна наибольшая площадь такого прямоугольника?

8.8. Окно имеет форму прямоугольника, завершеного сверху полукругом. Каковы должны быть размеры окна, чтобы при заданном периметре его площадь была наибольшей?

8.9. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершённый сверху полусферой. Какова наименьшая площадь поверхности тела, если его объём равен V ?

8.10. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq abc.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.11. Обозначим через a, b, c длины сторон треугольника. Найдите наименьшее значение выражения

$$w = \frac{1}{a + b - c} + \frac{1}{a - b + c} + \frac{1}{-a + b + c}$$

при условии, что среднее гармоническое чисел a, b, c равно H .

8.12. Докажите неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} &\geq \\ &\geq \frac{3(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}{a + b + c}, \end{aligned}$$

где a, b, c — длины сторон треугольника. Когда неравенство выполняется как равенство?

8.13. Задана площадь S треугольника. Найдите наименьшее значение выражения

$$w = ab + bc + ca,$$

где a, b, c — длины сторон треугольника.

8.14. Пусть числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ принадлежат отрезку $[0, 1]$. Докажите неравенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.15. Наибольшее из неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ равно $a > 0$. Докажите, что

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.16. Пусть $a > 1$ и $b > 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \leq \sqrt{ab}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.17. Докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.18. Пусть a, b — неотрицательные числа, причем $a^2 + b^2 = 1$. Докажите, что

$$a^3 + b^3 \geq \sqrt{2}ab.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.19. Докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq \frac{4}{27}(a+b+c)^3.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.20. Докажите, что для неотрицательных чисел a, b справедливо неравенство

$$(a+b)^4 \geq 8ab(a^2+b^2).$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.21. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.22. (Неравенство Гёльдера). Возьмем два положительных числа p, q , удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Докажите, что для неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.23. (Неравенство Чебышёва). Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — две одинаково монотонные последовательности вещественных чисел (это означает, что $(a_k - a_i)(b_k - b_i) \geq 0$ при всех k, i из $1:n$). Докажите, что

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.24. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его веса. Докажите, что если разделить бриллиант на несколько

частей, то стоимость его уменьшится, причем понижение стоимости будет наибольшим, когда все части будут иметь одинаковый вес.

8.25. Рассмотрим числовую последовательность

$$a_n = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdots \lg n}{2^{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots$$

При каком n значение a_n минимально?

8.26. Двойной факториал определяется следующим образом:

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1);$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n).$$

Докажите, что при $n \geq 2$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

8.27. Найдите все решения в целых числах уравнения

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3.$$

8.28. Пусть a и b — положительные числа. Найдите наибольшее и наименьшее значения на $\mathbb{R}$ функции

$$f(x) = \frac{x}{ax^2 + b}.$$

8.29. Рассмотрим на полуоси $(p, +\infty)$ функцию

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - p}.$$

Положим $A = ap^2 + bp + c$. Докажите, что функция $f(x)$ строго выпукла при $A > 0$, строго вогнута при $A < 0$ и линейна при $A = 0$.

8.30. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — положительные числа, не все равные между собой. Докажите, что функция

$$F(p) = \ln \frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n}$$

строго выпукла на $\mathbb{R}$.

8.31. Возьмем два числа $a > 1$ и $b > 1$. Докажите, что

$$(1+a)(1+b) \leq (1+\sqrt{ab})\left(1+\frac{a+b}{2}\right).$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.32. Докажите, что при положительных a, b справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} \leq \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.33. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — неотрицательные числа. Докажите, что

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \dots + \sqrt{a_n b_n} \leq \\ & \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}. \end{aligned}$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.34. Найдите решение экстремальной задачи: минимизировать сумму

$$w = \sum_{k=1}^n x_k \ln x_k$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n x_k = A; \quad x_k \geq 0 \text{ при всех } k \in 1:n.$$

Предполагается, что A — положительная константа.

8.35. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_n$ — положительные и $a_1, a_2, \dots, a_n, c$ — произвольные вещественные числа. Докажите, что

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} - c \leq \max_{k \in 1:n} \left\{ \frac{a_k}{b_k} - c \right\}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.36. Около окружности опишите n -угольник наименьшей площади.

8.37. Впишите в окружность n -угольник наибольшей площади.

8.38. Пусть α, β, γ — углы остроугольного треугольника. Докажите, что

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.39. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Докажите неравенство

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

8.40. Докажите, что

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} \geq 2\sqrt{3}.$$

Здесь α, β, γ — углы треугольника. Когда неравенство выполняется как равенство?

8.41. Найдите наибольшее значение выражения

$$w = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha + \cos \beta$$

по всем α и β из отрезка $[0, \frac{\pi}{2}]$.

8.42. Пусть α, β, γ — углы остроугольного треугольника. Докажите, что

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma > 2.$$

Можно ли увеличить константу в правой части неравенства?

8.43. Пусть α, β, γ — углы остроугольного треугольника. Докажите, что

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} > 2.$$

Можно ли увеличить константу в правой части неравенства?

8.44. Докажите, что при натуральном $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$(n+1) \cos \frac{\pi}{n+1} - n \cos \frac{\pi}{n} > 1.$$

Можно ли увеличить константу в правой части неравенства?

8.45. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 2^{\sin x} + 2^{\cos x}$$

на отрезке $[0, 2\pi]$.

8.46. Пусть n — произвольное натуральное число. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{\sin^n x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos^n x}\right)$$

на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$.

8.47. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sin x \cdot \sin 2x$$

на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$.

8.48. Пусть m и n — произвольные натуральные числа. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n-1} x$$

на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$.

8.49. Найдите наименьшее значение выражения

$$w = \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \right) (1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_n),$$

где $n \geq 2$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — положительные числа.

8.50. Докажите, что при положительных $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leq \frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)}{\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

9. Гипотеза Шапиро и теорема Дринфельда

9.1. Введем циклическую функцию вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1} + x_{n+2}},$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — положительные числа и $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$. Гипотеза Г. Шапиро заключалась в следующем: при $n \geq 3$ справедливо неравенство

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \frac{n}{2}. \quad (9.1)$$

Проверим гипотезу Шапиро при $n = 3$ и $n = 4$.

9.2. Докажем, что

$$F(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \geq \frac{3}{2}. \quad (9.2)$$

В числителе каждой дроби добавим и вычтем знаменатель. Получим

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_2 + x_3} + \frac{1}{x_3 + x_1} + \frac{1}{x_1 + x_2} \right) - 3. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Согласно неравенству (А.1.5) между средним гармоническим и средним арифметическим имеем

$$\frac{1}{x_2 + x_3} + \frac{1}{x_3 + x_1} + \frac{1}{x_1 + x_2} \geq \frac{9}{2(x_1 + x_2 + x_3)}. \quad (9.4)$$

Объединив (9.3) и (9.4), придем к (9.2).

Неравенство (9.2) выполняется как равенство только тогда, когда

$$x_2 + x_3 = x_3 + x_1 = x_1 + x_2,$$

то есть при $x_1 = x_2 = x_3$.

9.3. Докажем, что

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) := \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_3}{x_4 + x_1} + \frac{x_4}{x_1 + x_2} \geq 2. \quad (9.5)$$

По неравенству Коши между средним геометрическим и средним арифметическим имеем

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_4 + x_1} &= \frac{x_1(x_4 + x_1) + x_3(x_2 + x_3)}{(x_2 + x_3)(x_4 + x_1)} \geq \\ &\geq \frac{4(x_1^2 + x_3^2 + x_1x_4 + x_2x_3)}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}; \\ \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_4}{x_1 + x_2} &= \frac{x_2(x_1 + x_2) + x_4(x_3 + x_4)}{(x_3 + x_4)(x_1 + x_2)} \geq \\ &\geq \frac{4(x_2^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_3x_4)}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}. \end{aligned}$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4) &\geq \\ &\geq \frac{2[(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_4 + x_1)^2]}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}. \end{aligned}$$

Теперь оценим числитель с помощью неравенства между средним квадратичным и средним арифметическим, которое запишем в виде

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2.$$

Придем к (9.5).

Неравенство (9.5) выполняется как равенство только тогда, когда все промежуточные неравенства выполняются как

равенства, то есть когда

$$x_2 + x_3 = x_4 + x_1, \quad x_3 + x_4 = x_1 + x_2,$$

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = x_4 + x_1.$$

Это возможно лишь в случае $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$.

Отметим, что функция $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ определена в предельных точках $(x_1, 0, x_1, 0)$ и $(0, x_2, 0, x_2)$. В них она принимает минимальное значение 2.

9.4. На гипотезу Шапиро работает и следующий результат.

Лемма 9.1. *Справедливо неравенство*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}. \quad (9.6)$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда все x_k равны между собой. В этом случае обе части неравенства (9.6) равны $\frac{n}{2}$.

Доказательство. Обозначим

$$a_k = \sqrt{\frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}}}, \quad b_k = \sqrt{x_k(x_{k+1} + x_{k+2})}.$$

По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k(x_{k+1} + x_{k+2}) \right). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Приняв во внимание, что $x_{n+1} = x_1$ и $x_{n+2} = x_2$, запишем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k(x_{k+1} + x_{k+2}) &= \sum_{k=1}^n (x_k x_{k+1} + x_k x_{k+2}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(x_k^2 + x_{k+1}^2) + (x_k^2 + x_{k+2}^2)] = 2 \sum_{k=1}^n x_k^2. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Из (9.7) и (9.8) следует (9.6).

Если неравенство (9.6) выполняется как равенство, то и неравенство (9.8) выполняется как равенство. А это возможно только тогда, когда $x_k = x_{k+1} = x_{k+2}$ при всех $k \in 1 : n$, то есть при условии $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

То, что при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ обе части неравенства (9.6) равны $\frac{n}{2}$, очевидно.

Лемма доказана. $\square$

К сожалению, лемма 9.1 не гарантирует справедливость гипотезы Шапиро (9.1). На рисунке 12 представлена возможная ситуация, которая поясняет такое предостережение.

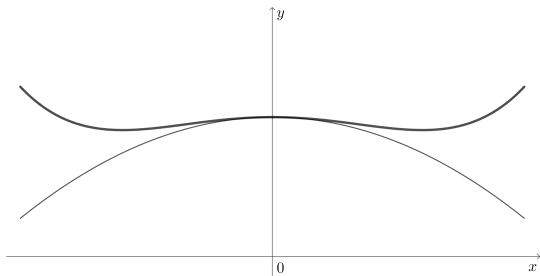


Рис. 12. Иллюстрация к лемме 9.1

9.5. Гипотеза Шапиро вызвала широкий интерес среди математиков. Коллективными усилиями было установлено, что неравенство (9.1) верно при $n \leq 13$ и нечетных n от 15 до 23. При остальных n неравенство (9.1) нарушается.

Возникает вопрос: в случае, когда неравенство (9.1) нарушается, насколько минимум функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ отличается от $\frac{n}{2}$? Ответ на этот вопрос содержится в приводимой ниже замечательной теореме В. Г. Дринфельда.

Теорема 9.1. *В случае, когда неравенство (9.1) нарушается, справедлива оценка*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) > c \frac{n}{2},$$

где $c = 0.989$.

Для доказательства нам понадобится вспомогательное предложение.

Лемма 9.2. Пусть $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n$ — упорядоченная по невозрастанию последовательность чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$ — упорядоченная по неубыванию последовательность $y_1, y_2, \dots, y_n$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \geq \sum_{k=1}^n u_k v_k. \quad (9.9)$$

Доказательство. За счет перестановки слагаемых неравенство (9.9) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^n u_k y_k^0 \geq \sum_{k=1}^n u_k v_k, \quad (9.10)$$

где $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ — некоторая перестановка чисел $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Пусть $v_1 = y_{k_0}^0$. Так как

$$(u_1 - u_{k_0})(y_1^0 - v_1) \geq 0,$$

то

$$u_1 y_1^0 + u_{k_0} y_{k_0}^0 \geq u_1 v_1 + u_{k_0} y_1^0.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^n u_k y_k^0 \geq u_1 v_1 + \sum_{k=2}^n u_k y_k^1, \quad (9.11)$$

где $y_{k_0}^1 = y_1^0$ и $y_k^1 = y_k^0$ при $k \neq k_0$. Очевидно, что

$$\min_{k \in 2:n} y_k^1 = v_2.$$

С помощью описанного приема в сумме из правой части неравенства (9.11) можно выделить слагаемое $u_2 v_2$ и так далее. В результате придем к неравенству (9.10). $\square$

Доказательство теоремы. Обозначим $\xi_k = x_{k+1}/x_k$. Тогда

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\xi_k(1 + \xi_{k+1})}.$$

Здесь $\xi_{n+1} = \xi_1$, так как по определению $x_{n+2} = x_2$, $x_{n+1} = x_1$. Отметим, что $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n = 1$. Упорядочим числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ по неубыванию. Получим последовательность $0 < y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$. По лемме 9.2 имеем

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{y_k(1 + y_{n-k+1})}.$$

Положим

$$r_k = \frac{1}{y_k(1 + y_{n-k+1})} + \frac{1}{y_{n-k+1}(1 + y_k)}.$$

Очевидно, что

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r_k. \quad (9.12)$$

Обозначим $\eta_k = y_k y_{n-k+1}$. Имеем $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n = 1$ и

$$r_k = \frac{1}{\eta_k} \left(1 + \frac{\eta_k - 1}{(1 + y_k)(1 + y_{n-k+1})} \right).$$

Так как

$$(1 + y_k)(1 + y_{n-k+1}) = 1 + \eta_k + 2 \frac{y_k + y_{n-k+1}}{2} \geq (1 + \sqrt{\eta_k})^2,$$

то

$$r_k \geq \begin{cases} 1/\eta_k & \text{при } \eta_k \geq 1, \\ \frac{1}{\eta_k} \left(1 + \frac{\sqrt{\eta_k} - 1}{\sqrt{\eta_k} + 1} \right) = \frac{2}{\eta_k + \sqrt{\eta_k}} & \text{при } \eta_k \in (0, 1). \end{cases} \quad (9.13)$$

Введем обозначения

$$z_k = \ln \eta_k, \quad f(z) = e^{-z}, \quad g(z) = 2(e^z + e^{z/2})^{-1}.$$

В этих обозначениях формула (9.13) примет вид

$$r_k \geq \begin{cases} f(z_k) & \text{при } z_k \geq 0, \\ g(z_k) & \text{при } z_k < 0. \end{cases} \quad (9.14)$$

Отметим, что

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = \ln(\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n) = 0. \quad (9.15)$$

На рисунке 13 изображены графики функций $f(z)$ и $g(z)$.

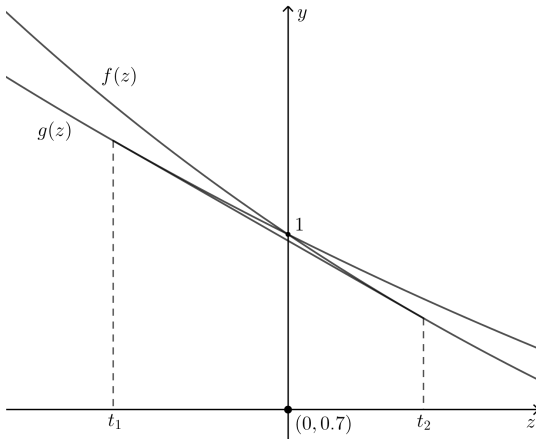


Рис. 13. Графики функций $f(z)$ и $g(z)$

Нетрудно проверить, что $f(0) = g(0) = 1$ и

$$f(z) < g(z) \quad \text{при } z > 0 \quad \text{и} \quad f(z) > g(z) \quad \text{при } z < 0.$$

Данные свойства позволяют переписать неравенство (9.14) в компактной форме

$$r_k \geq \min\{f(z_k), g(z_k)\}, \quad k \in 1 : n. \quad (9.16)$$

Введем функцию

$$\psi(z) = \min\{f(z), g(z)\}.$$

Несмотря на то, что функции $f(z)$ и $g(z)$ строго выпуклые, функция $\psi(z)$ не является выпуклой. Однако ее можно «овыпуклить». Это можно сделать с помощью общей касательной функций $f(z)$ и $g(z)$ (см. рис. 13). Обозначим точки касания через t_1 и t_2 . Они удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} f'(t_2) = g'(t_1), \\ f'(t_2)(t_1 - t_2) + f(t_2) = g(t_1). \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что

$$e^{-t_2} = \frac{2e^{t_1} + e^{t_1/2}}{(e^{t_1} + e^{t_1/2})^2},$$

так что

$$t_2 = -\ln\left(\frac{2e^{t_1} + e^{t_1/2}}{(e^{t_1} + e^{t_1/2})^2}\right).$$

Второе уравнение преобразуется к виду

$$\frac{2e^{t_1} + e^{t_1/2}}{e^{t_1} + e^{t_1/2}} \left(t_1 + \ln\left(\frac{2e^{t_1} + e^{t_1/2}}{(e^{t_1} + e^{t_1/2})^2}\right) - 1 \right) + 2 = 0.$$

Решение последнего уравнения находим численно:

$$t_1 = -0.200811\dots$$

При этом $t_2 = 0.155195\dots$

Обозначим через $\tilde{\psi}(z)$ овыпукленную функцию $\psi(z)$. Очевидно, что $\psi(z) \geq \tilde{\psi}(z)$ при всех z . В силу (9.16) имеем $r_k \geq \tilde{\psi}(z_k)$, $k \in 1:n$.

Вернемся к формуле (9.12). Из нее следует, что

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tilde{\psi}(z_k).$$

Функция $\tilde{\psi}(z)$ выпуклая. На основании неравенства Йенсена и (9.15) получаем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{\psi}(z_k) \geq \tilde{\psi}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k\right) = \tilde{\psi}(0).$$

Таким образом,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \frac{n}{2} \tilde{\psi}(0).$$

Значение $\tilde{\psi}(0)$ легко вычисляется:

$$\tilde{\psi}(0) = f(t_2) - f'(t_2)t_2 = 0.989134 \dots$$

В частности, $\tilde{\psi}(0) > 0.989$.

Теорема доказана.

□

10. Лемма Гиббса и задача Данскина

10.1. Функция n переменных $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *сепарабельной*, если

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n f_k(x_k).$$

Рассмотрим экстремальную задачу:

максимизировать сепарабельную функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n x_k = A, \quad x_k \geq 0 \text{ при всех } k \in 1:n.$$

Здесь A — положительная константа.

Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, компоненты которого удовлетворяют ограничениям этой задачи, будем называть ее планом. Множество планов обозначим Ω . Коротко сформулированную задачу можно записать так:

$$F(x) := \sum_{k=1}^n f_k(x_k) \longrightarrow \max_{x \in \Omega}. \quad (10.1)$$

10.2. В случае, когда все функции одной переменной $f_k(t)$ дифференцируемы на отрезке $[0, A]$, несложно получить необходимые условия оптимальности для задачи (10.1).

Лемма Гиббса. *Для того чтобы план $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ задачи (10.1) был оптимальным, необходимо, чтобы нашлось число λ , такое, что*

$$f'_k(x_k^*) = \lambda, \quad \text{если } x_k^* > 0, \quad (10.2)$$

$$f'_k(x_k^*) \leq \lambda, \quad \text{если } x_k^* = 0. \quad (10.3)$$

Доказательство. Пусть $x_k^* > 0$. Возьмём $i \neq k$ и на отрезке $[0, x_k^*]$ введем функцию

$$p_i(\varepsilon) = f_k(x_k^* - \varepsilon) + f_i(x_i^* + \varepsilon) + \sum_{j \notin \{k, i\}} f_j(x_j^*).$$

Эта функция достигает максимального значения при $\varepsilon = 0$. Значит, $p'_i(0) \leq 0$, что равносильно неравенству

$$f'_i(x_i^*) \leq f'_k(x_k^*). \quad (10.4)$$

При $x_i^* > 0$ справедливо и обратное неравенство. Следовательно, для всех $k \in 1 : n$, при которых $x_k^* > 0$, производные $f'_k(x_k^*)$ имеют одинаковое значение. Обозначив его λ , придем к равенству (10.2).

При $x_i^* = 0$ неравенство (10.4) принимает вид $f'_i(x_i^*) \leq \lambda$. Поменяв здесь индекс i на k , получим неравенство (10.3).

Лемма доказана. $\square$

Дополнение. Предположим, что все функции $f_k(t)$ наряду с дифференцируемостью являются строго вогнутыми на $[0, A]$. Тогда условия (10.2), (10.3) будут не только необходимыми, но и достаточными для оптимальности плана x^* . При этом гарантируется единственность оптимального плана.

Доказательство. Прежде всего отметим, что из (10.2) следует равенство

$$\sum_{k=1}^n f'_k(x_k^*) x_k^* = \sum_{k: x_k^* > 0} f'_k(x_k^*) x_k^* = \lambda A. \quad (10.5)$$

Теперь воспользуемся теоремой В.2.1. В случае строго вогнутых функций для любого плана x , отличного от x^* , в си-

лу (10.2), (10.3) и (10.5) имеем

$$\begin{aligned} F(x) - F(x^*) &= \sum_{k=1}^n [f_k(x_k) - f_k(x_k^*)] < \sum_{k=1}^n f'_k(x_k^*) (x_k - x_k^*) = \\ &= \sum_{k=1}^n f'_k(x_k^*) x_k - \lambda A \leq 0. \end{aligned}$$

Значит, вектор x^* является единственным решением задачи (10.1). $\square$

10.3. Дж. Данскин рассмотрел частный случай задачи (10.1), когда

$$f_k(t) = c_k(1 - e^{-b_k t}), \quad k \in 1 : n.$$

Здесь c_k и b_k — положительные параметры. Отметим, что все функции $f_k(t)$ дифференцируемые и строго вогнутые на $\mathbb{R}$. Подробная запись задачи Данскина выглядит так:

$$F(x) := \sum_{k=1}^n c_k(1 - e^{-b_k x_k}) \longrightarrow \max_{x \in \Omega}. \quad (10.6)$$

Запишем критерий оптимальности (10.2), (10.3) для задачи (10.6):

$$c_k b_k e^{-b_k x_k} = \lambda, \quad \text{если } x_k > 0, \quad (10.7)$$

$$c_k b_k \leq \lambda, \quad \text{если } x_k = 0. \quad (10.8)$$

Из (10.7), (10.8) следует, что

$$x_k > 0, \quad \text{если } c_k b_k > \lambda, \quad (10.9)$$

$$x_k = 0, \quad \text{если } c_k b_k \leq \lambda. \quad (10.10)$$

Действительно, при $c_k b_k \leq \lambda$ необходимо $x_k = 0$, ибо в противном случае в силу (10.7) получим $c_k b_k = \lambda e^{b_k x_k} > \lambda$, что

противоречит исходному условию. При $c_k b_k > \lambda$ будет $x_k > 0$, ибо иначе получим противоречие с (10.8).

Отметим, что условие (10.7) гарантирует положительность λ . На основании (10.9) и (10.7) имеем

$$x_k = \frac{1}{b_k} \ln \left(\frac{c_k b_k}{\lambda} \right), \quad \text{если } c_k b_k > \lambda. \quad (10.11)$$

Обозначим $a_k = \ln(c_k b_k)$, $u = \ln(\lambda)$. Тогда формулы (10.11) и (10.10) примут вид

$$x_k = \frac{1}{b_k} (a_k - u), \quad \text{если } a_k > u,$$

$$x_k = 0, \quad \text{если } a_k \leq u.$$

Их можно объединить:

$$x_k = \frac{1}{b_k} (a_k - u)_+, \quad k \in 1 : n, \quad (10.12)$$

где $(t)_+ = \max\{t, 0\}$. Уравнение

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} (a_k - u)_+ = A \quad (10.13)$$

позволяет определить значение параметра u .

Таким образом, решение задачи Данскина (10.6) сводится к решению уравнения (10.13) и вычислению компонент оптимального плана по формуле (10.12). Напомним, что $a_k = \ln(c_k b_k)$.

10.4. Опишем быстрый алгоритм решения уравнения (10.13). Начнем с того, что упорядочим пары (a_k, b_k) по невозрастанию первой компоненты. Получим последовательность

$$(\hat{a}_1, \hat{b}_1), (\hat{a}_2, \hat{b}_2), \dots, (\hat{a}_n, \hat{b}_n),$$

где $\hat{a}_1 \geq \hat{a}_2 \geq \dots \geq \hat{a}_n$. Очевидно, что

$$\varphi(u) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} (a_k - u)_+ = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\hat{b}_k} (\hat{a}_k - u)_+. \quad (10.14)$$

На рисунке 14 изображен график функции $(\widehat{a}_k - u)_+$.

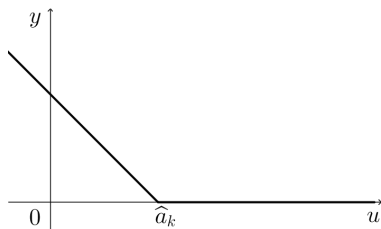


Рис. 14. График функции $(\widehat{a}_k - u)_+$

Имеем

$$\varphi(u) = 0 \quad \text{при } u \geq \widehat{a}_1. \quad (10.15)$$

При $u \in [\widehat{a}_{i+1}, \widehat{a}_i]$, $i \in 1 : n - 1$, справедливо представление

$$\varphi(u) = \sum_{k=1}^i \frac{1}{\widehat{b}_k} (\widehat{a}_k - u) = \sum_{k=1}^i \frac{\widehat{a}_k}{\widehat{b}_k} - \left(\sum_{k=1}^i \frac{1}{\widehat{b}_k} \right) u. \quad (10.16)$$

Наконец,

$$\varphi(u) = \sum_{k=1}^n \frac{\widehat{a}_k}{\widehat{b}_k} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\widehat{b}_k} \right) u \quad \text{при } u \leq \widehat{a}_n. \quad (10.17)$$

В силу (10.16) получаем

$$\varphi(u) - \varphi(\widehat{a}_i) = \left(\sum_{k=1}^i \frac{1}{\widehat{b}_k} \right) (\widehat{a}_i - u).$$

Обозначив

$$p_i = \sum_{k=1}^i \frac{1}{\widehat{b}_k},$$

придем к формуле

$$\varphi(u) = \varphi(\widehat{a}_i) + p_i(\widehat{a}_i - u), \quad u \in [\widehat{a}_{i+1}, \widehat{a}_i], \quad i \in 1 : n - 1. \quad (10.18)$$

Аналогично из (10.17) следует, что

$$\varphi(u) = \varphi(\widehat{a}_n) + p_n(\widehat{a}_n - u), \quad u \leq \widehat{a}_n. \quad (10.19)$$

На основании (10.14), (10.15), (10.18) и (10.19) заключаем, что функция $\varphi(u)$ является непрерывной ломаной, выпуклой и строго убывающей от $+\infty$ до 0 на полуоси $(-\infty, \widehat{a}_1]$ (рис. 15).

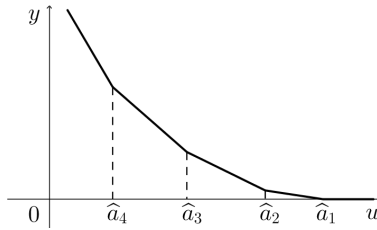


Рис. 15. График ломаной $\varphi(u)$

Отметим, что ломаная $\varphi(u)$ на отрезке $[\widehat{a}_n, \widehat{a}_1]$ полностью определяется своими значениями $\varphi(\widehat{a}_i)$ в узлах $\widehat{a}_i$, $i \in 1 : n$. В силу (10.18) эти значения связаны формулой

$$\varphi(\widehat{a}_{i+1}) = \varphi(\widehat{a}_i) + p_i(\widehat{a}_i - \widehat{a}_{i+1}), \quad i \in 1 : n - 1.$$

Обозначив $\varphi_i = \varphi(\widehat{a}_i)$, получим для последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ рекуррентное соотношение

$$\varphi_1 = 0, \quad p_0 = 0,$$

$$p_i = p_{i-1} + \frac{1}{b_i}, \quad (10.20)$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + p_i(\widehat{a}_i - \widehat{a}_{i+1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Нас интересует решение u^* уравнения $\varphi(u) = A$. Из свойств функции $\varphi(u)$ следует, что такое решение существует

и единственно. Для его нахождения будем последовательно вычислять значения $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ по формулам (10.20), пока не встретится индекс i_0 , на котором

$$\varphi_{i_0} < A \leq \varphi_{i_0+1}.$$

В этом случае u^* принадлежит отрезку $[\hat{a}_{i_0+1}, \hat{a}_{i_0}]$ (рис. 16).

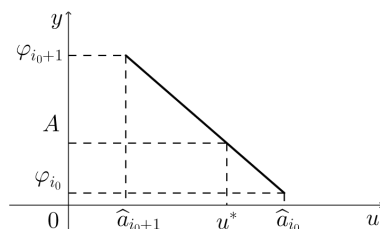


Рис. 16. Локализация решения u^* уравнения $\varphi(u) = A$

Согласно (10.18) имеем

$$u^* = \hat{a}_{i_0} - \frac{1}{p_{i_0}}(A - \varphi_{i_0}). \quad (10.21)$$

Если $\varphi_n < A$, то $u^* < \hat{a}_n$. В силу (10.19) значение u^* вычисляется по той же формуле (10.21) при $i_0 = n$ и $p_n = p_{n-1} + \frac{1}{b_n}$.

На основании (10.12) для компонент решения $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ задачи Данскина (10.6) получаем представление

$$x_k^* = \frac{1}{b_k}(a_k - u^*)_+, \quad k \in 1 : n.$$

10.5. Задачу (10.6) Дж. Данскин рассматривал как формализацию следующей задачи поиска. Пусть в нашем распоряжении имеется A единиц времени, чтобы обнаружить некоторый объект. Этот объект может находиться в одном из n

мест. Если объект находится в k -м месте, то, потратив x_k единиц времени, мы обнаружим его с вероятностью $1 - e^{-b_k x_k}$. Вероятность того, что объект находится в k -м месте, равна c_k . Как разбить общее время поиска A на части $x_1, x_2, \dots, x_n$ так, чтобы максимизировать вероятность обнаружения интересующего нас объекта?

Возьмем конкретные данные. Пусть $A = 3$, $n = 4$, $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0.3$, $c_3 = 0.2$, $c_4 = 0.1$. При $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$ оптимальное распределение времени поиска $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ имеет вид

$$x^* = (1.327, 1.039, 0.634, 0).$$

Оно получено с помощью описанного выше метода.

Параметр b_k можно интерпретировать как уровень условий, благоприятствующих поиску объекта в k -м месте. Читателю предлагается исследовать зависимость решения задачи Данскина от параметров b_k, c_k .

11. Задача Гермейера

11.1. Пусть $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ — функции, непрерывные и строго возрастающие на отрезке $[0, A]$. Задачей Гермейера называется экстремальная задача вида

$$F(x) := \min_{k \in 1:n} f_k(x_k) \longrightarrow \max_{x \in \Omega}, \quad (11.1)$$

где Ω — множество векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, компоненты которых удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^n x_k = A, \quad x_k \geq 0 \text{ при всех } k \in 1:n.$$

На содержательном уровне задачу Гермейера можно интерпретировать, например, так. Имеется A единиц некоторого ресурса, который нужно распределить между предприятиями. Если k -е предприятие получит x_k единиц ресурса, то его эффективность достигнет уровня $f_k(x_k)$. Требуется найти такое распределение ресурса, при котором минимальная эффективность предприятий будет наибольшей (подтянуть отстающие предприятия).

Ниже будет показано, как решать задачу Гермейера.

11.2. Нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Лемма 11.1. Пусть векторы u и v принадлежат множеству Ω и $u \neq v$. Тогда найдется индекс $k \in 1:n$, такой, что $u_k < v_k$.

Доказательство. Допустим противное, что $u_k \geq v_k$ при всех $k \in 1:n$. По определению множества Ω имеем

$$\sum_{k=1}^n (u_k - v_k) = 0,$$

причем все слагаемые неотрицательны. Это возможно только тогда, когда $u_k - v_k = 0$ при всех $k \in 1 : n$, что противоречит условию $u \neq v$. $\square$

Лемма 11.2. *Если для вектора $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, принадлежащего Ω , выполняется условие*

$$f_1(x_1^*) = f_2(x_2^*) = \dots = f_n(x_n^*) =: \mu, \quad (11.2)$$

то x^ — единственное решение задачи (11.1).*

Доказательство. Очевидно, что $F(x^*) = \mu$.

Возьмем вектор $x \in \Omega$, отличный от x^* . По лемме 11.1 найдется индекс $k_0 \in 1 : n$, такой, что $x_{k_0} < x_{k_0}^*$. В силу строгого возрастания функций $f_k(t)$ и (11.2) имеем

$$F(x) = \min_{k \in 1:n} f_k(x_k) \leq f_{k_0}(x_{k_0}) < f_{k_0}(x_{k_0}^*) = \mu = F(x^*).$$

Значит, x^* — единственное решение задачи (11.1). $\square$

11.3. Рассмотрим частный случай задачи (11.1), когда

$$f_1(0) = f_2(0) = \dots = f_n(0) =: c. \quad (11.3)$$

Обозначим

$$d = \min_{k \in 1:n} f_k(A).$$

В силу непрерывности и строгого возрастания функций $f_k(t)$ существуют обратные функции $f_k^{-1}(y)$, которые мы будем рассматривать на отрезке $[c, d]$. Введем функцию

$$h(y) = \sum_{k=1}^n f_k^{-1}(y), \quad y \in [c, d].$$

Она также является непрерывной и строго возрастающей, причем $h(c) = 0$, $h(d) > A$. Как следствие, существует единственная точка $y^* \in (c, d)$, в которой $h(y^*) = A$ (рис. 17).

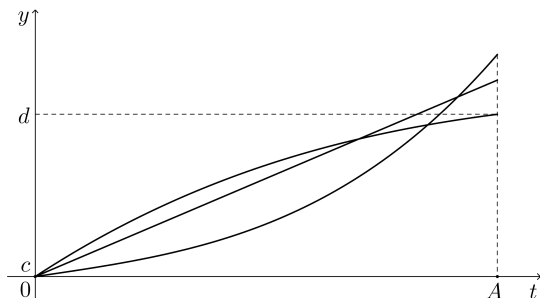


Рис. 17. Иллюстрация к задаче Гермейера при условии (11.3)

Положим

$$x_k^* = f_k^{-1}(y^*), \quad k \in 1:n. \quad (11.4)$$

Очевидно, что вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ принадлежит множеству Ω и выполняется условие (11.2) с $\mu = y^*$. По лемме 11.2 вектор x^* — единственное решение задачи (11.1).

Подведем предварительный итог.

Теорема 11.1. *Если выполнено условие (11.3), то задача Гермейера (11.1) имеет единственное решение $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Компоненты x_k^* вычисляются по формуле (11.4), в которой y^* — единственное на интервале (c, d) решение уравнения $h(y) = A$. При этом все компоненты x_k^* положительные и $F(x^*) = y^*$.*

11.4. Перейдем к общему случаю. Будем считать, что

$$f_1(0) \leq f_2(0) \leq \dots \leq f_n(0) \quad \text{и} \quad f_1(0) < f_n(0). \quad (11.5)$$

Введем обозначения

$$c = f_1(0), \quad d = \min_{k \in 1:n} f_k(A) = f_{k_0}(A).$$

Если минимум при определении d достигается на нескольких индексах, то в качестве k_0 берем любой из них. Положим

$$s = \max \{k \in 1 : n \mid f_k(0) < d\}, \quad (11.6)$$

так что

$$f_k(0) \geq d \text{ при } k \in s + 1 : n \quad (11.7)$$

Теорема 11.2. При $s = 1$ единственным решением задачи (11.1) является вектор $x^* = (A, 0, \dots, 0)$.

Рисунок 18 иллюстрирует данную ситуацию.

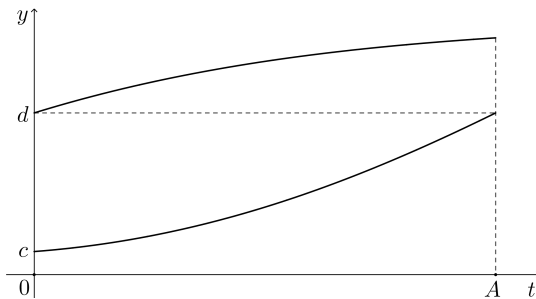


Рис. 18. Случай $s = 1$

Доказательство. Согласно (11.7) и условию $s = 1$ имеем $f_k(0) \geq d$ при $k \in 2 : n$. В силу строгого возрастания функций $f_k(t)$ справедливо неравенство $f_k(A) > d$ при $k \in 2 : n$. Принимая во внимание определение d , заключаем, что $f_1(A) = d$.

Вектор $x^* = (A, 0, \dots, 0)$ принадлежит множеству Ω . Значение целевой функции $F(x)$ на нем равно d . Действительно,

$$F(x^*) := \min \{f_1(A), f_2(0), \dots, f_n(0)\} = d.$$

Возьмем любой вектор $x \in \Omega$, отличный от x^* . Тогда необходимо $x_1 < A$. Запишем

$$F(x) = \min_{k \in 1:n} f_k(x_k) \leq f_1(x_1) < f_1(A) = d = F(x^*).$$

Отсюда следуют и оптимальность x^* , и его единственность. $\square$

11.5. В дальнейшем считаем, что $s \geq 2$. Обозначим $y_k = f_k(0)$. Согласно (11.5) и определению (11.6) индекса s имеем

$$c = y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_s < d \quad \text{и} \quad y_{s+1} \geq d.$$

Так как на введенном ранее индексе k_0 выполняется равенство $f_{k_0}(A) = d$, то $f_{k_0}(0) < d$, так что $k_0 \in 1 : s$.

При $k \in 1 : s$ на отрезке $[c, d]$ построим функции

$$g_k(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in [c, y_k], \\ f_k^{-1}(y), & \text{если } y \in [y_k, d]. \end{cases}$$

Обозначим через $h(y)$ их сумму,

$$h(y) = \sum_{k=1}^s g_k(y), \quad y \in [c, d].$$

По построению при $k \in 1 : s - 1$ на отрезке $[y_k, y_{k+1}]$ имеем

$$h(y) = \sum_{i=1}^k f_i^{-1}(y). \quad (11.8)$$

К этому нужно добавить, что

$$h(y) = \sum_{i=1}^s f_i^{-1}(y) \quad \text{при } y \in [y_s, d]. \quad (11.9)$$

Лемма 11.3. Уравнение $h(y) = A$ имеет единственное решение y^* .

Доказательство. Напомним, что функции $f_k(t)$ непрерывные и строго возрастающие. Такими же свойствами обладают и обратные функции $f_k^{-1}(y)$. Условия

$$f_k^{-1}(y_k) = f_k^{-1}(f_k(0)) = 0$$

гарантируют непрерывность всех функций $g_k(y)$. Значит, непрерывной на $[c, d]$ будет и функция $h(y)$. Перебирая последовательно отрезки

$$[c, y_2], [y_2, y_3], \dots, [y_{s-1}, y_s], [y_s, d]$$

и учитывая формулы (11.8) и (11.9), приходим к выводу, что функция $h(y)$ строго возрастает на $[c, d]$.

По определению $h(c) = 0$. Согласно (11.9) имеем

$$h(d) = \sum_{i=1}^s f_i^{-1}(d).$$

Как отмечалось, $k_0 \in 1 : s$ и $f_{k_0}(A) = d$. Значит, последняя сумма включает слагаемое $f_{k_0}^{-1}(d)$, равное A . Так как $s \geq 2$, то $h(d) > A$.

Подведем итог. Имеется непрерывная и строго возрастающая на отрезке $[c, d]$ функция $h(y)$. На концах отрезка $[c, d]$ она принимает значения $h(c) = 0$, $h(d) > A$. Как известно, в этом случае существует единственная точка $y^* \in (c, d)$, в которой $h(y^*) = A$.

Лемма доказана. □

11.6. Обозначим

$$k^* = \max \{k \in 1 : s \mid y_k < y^*\},$$

где y^* — решение уравнения $h(y) = A$.

Теорема 11.3. При $s \geq 2$ единственным решением задачи (11.1) является вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ с компонентами

$$\begin{aligned} x_k^* &= f_k^{-1}(y^*) > 0, & \text{если } k \in 1 : k^*, \\ x_k^* &= 0, & \text{если } k \in k^* + 1 : n. \end{aligned} \quad (11.10)$$

При этом $F(x^*) = y^*$.

Рисунок 19 поясняет содержание теоремы 11.3 в случае $k^* = n$.

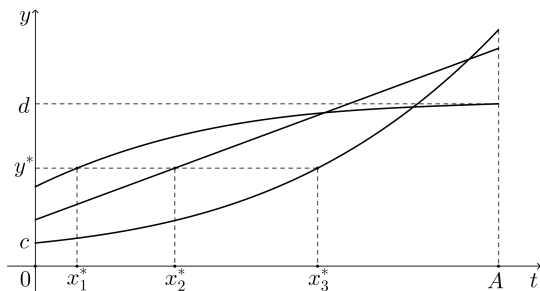


Рис. 19. Случай $k^* = n$

Доказательство. Из определений $g_k(y)$, y^* и k^* следует, что

$$g_k(y^*) = \begin{cases} f_k^{-1}(y^*), & \text{если } k \in 1 : k^*, \\ 0, & \text{если } k \in k^* + 1 : n. \end{cases}$$

Равенство $h(y^*) = A$ принимает вид

$$\sum_{k=1}^{k^*} f_k^{-1}(y^*) = A.$$

Для компонент x_k^* вида (11.10) получаем

$$\sum_{k=1}^n x_k^* = A.$$

Кроме того, в силу определения k^* и строгого возрастания функций $f_k^{-1}(y)$ при $k \in 1 : k^*$ справедливо неравенство

$$x_k^* = f_k^{-1}(y^*) > f_k^{-1}(y_k) = f_k^{-1}(f_k(0)) = 0.$$

Значит, вектор x^* с компонентами (11.10) удовлетворяет всем ограничениям задачи (11.1). При этом $x_k^* > 0$ при $k \in 1 : k^*$.

Вычислим $F(x^*)$. На основании (11.10) и (11.3) имеем

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*) &= f_2(x_2^*) = \dots = f_{k^*}(x_{k^*}^*) = y^* \leq \\ &\leq f_{k^*+1}(x_{k^*+1}^*) \leq \dots \leq f_n(x_n^*). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $F(x^*) = y^*$.

Проверим оптимальность x^* . Возьмем произвольный вектор x , удовлетворяющий ограничениям задачи (11.1) и отличный от x^* . По лемме 11.1 найдется индекс $j \in 1 : n$, такой, что $0 \leq x_j < x_j^*$. Поскольку $x_k^* = 0$ при $k \in k^* + 1 : n$, то необходимо $j \in 1 : k^*$. Теперь имеем

$$F(x) \leq \min_{k \in 1 : k^*} f_k(x_k) \leq f_j(x_j) < f_j(x_j^*) = y^* = F(x^*).$$

Это гарантирует и оптимальность x^* , и его единственность.

Теорема доказана. $\square$

11.7. Опишем схему решения задачи Гермейера (11.1).

1) Вычисляем значения $y_k = f_k(0)$, $k \in 1 : n$, и упорядочиваем функции $f_k(t)$ по неубыванию y_k . Пусть это уже сделано, так что $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$.

2) Вычисляем значения $f_k(A)$ при $k \in 1 : n$. Находим $d = \min_{k \in 1 : n} f_k(A)$ и индекс $s = \max \{k \in 1 : n \mid y_k < d\}$.

3) Если $s = 1$, то единственным решением задачи (11.1) является вектор $x^* = (A, 0, \dots, 0)$.

4) Пусть $s \geq 2$. На отрезке $[y_1, d]$ построим обратные функции $f_k^{-1}(y)$ при $k \in 1 : s$.

5) По формуле (11.8) вычисляем значения функции $h(y)$ в узлах y_k при $k \in 1 : s$:

$$h(y_1) = 0,$$

$$h(y_k) = \sum_{i=1}^{k-1} f_i^{-1}(y_k), \quad k \in 2 : s.$$

(Мы учли, что $f_k^{-1}(y_k) = 0$.) Находим индекс

$$k^* = \max \{k \in 1 : s \mid h(y_k) < A\}.$$

Очевидно, что решение уравнения $h(y) = A$ лежит на отрезке $[y_{k^*}, y_{k^*+1}]$, где $y_{k^*+1} = d$ при $k^* = s$.

6) На отрезке $[y_{k^*}, y_{k^*+1}]$ решаем уравнение

$$h(y) := \sum_{i=1}^{k^*} f_i^{-1}(y) = A.$$

Решение обозначим y^* .

7) По формуле (11.10) вычисляем компоненты решения x^* задачи (11.1).

11.8. Приведем простой пример с линейными функциями $f_k(t)$.

Пример. Пусть $n = 4$, $A = 10$ и

$$f_1(t) = t, \quad f_2(t) = \frac{2}{3}t, \quad f_3(t) = \frac{4}{15}t + 4, \quad f_4(t) = \frac{1}{10}t + 6.$$

Будем действовать по описанной выше схеме.

1) Вычисляем $y_k = f_k(0)$:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 4, \quad y_4 = 6.$$

В данном случае $y_1 = y_2 < y_3 < y_4$.

2) Вычисляем $f_k(A)$:

$$f_1(A) = 10, \quad f_2(A) = \frac{20}{3}, \quad f_3(A) = \frac{20}{3}, \quad f_4(A) = 7.$$

Имеем $d = \frac{20}{3}$, $s = 4$.

3) Так как $s \neq 1$, то переходим к следующему пункту.

4) Построим обратные функции:

$$f_1^{-1}(y) = y, \quad f_2^{-1}(y) = \frac{3}{2}y, \quad f_3^{-1}(y) = \frac{15}{4}(y - 4),$$

$$f_4^{-1}(y) = 10(y - 6).$$

5) Вычисляем $h(y_k)$:

$$h(y_1) = 0, \quad h(y_2) = 0, \quad h(y_3) = 10, \quad h(y_4) = \frac{45}{2}.$$

Имеем $k^* = 2$.

6) На отрезке $[0, 4]$ решаем уравнение $\frac{5}{2}y = 10$. Получаем $y^* = 4$.

7) Находим компоненты решения x^* задачи Гермейера:

$$x_1^* = 4, \quad x_2^* = 6, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 0.$$

Соотношения

$$f_1(x_1^*) = f_2(x_2^*) = f_3(x_3^*) < f_4(x_4^*)$$

подтверждают оптимальность вектора x^* .

Читателю предоставляется широкое поле деятельности для постановки и решения других вариантов задачи Гермейера.

Приложение А

Классические неравенства

1. Неравенство Коши

1.1. Начнем со вспомогательного утверждения.

Лемма 1.1. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$, где $n \geq 2$, — положительные числа, не все равные между собой. Если выполнено условие

$$a_1 a_2 \cdots a_n = 1,$$

то необходимо

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n > n.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 2$ имеем $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 \neq a_2$, $a_1 a_2 = 1$, поэтому

$$0 < (a_1 - a_2)^2 = (a_1 + a_2)^2 - 4a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2 - 4.$$

Отсюда следует, что $a_1 + a_2 > 2$.

Сделаем индукционный переход от n к $n + 1$. Возьмем $n + 1$ положительных чисел $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$, которые не все равны между собой и удовлетворяют условию

$$a_1 \cdots a_n a_{n+1} = 1.$$

Ясно, что среди них существует число, меньшее единицы, и число, большее единицы. Пусть для определенности $a_n < 1$, $a_{n+1} > 1$. Тогда

$$(1 - a_n)(a_{n+1} - 1) > 0$$

или

$$a_n a_{n+1} < a_n + a_{n+1} - 1. \quad (1.1)$$

Рассмотрим n положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, (a_n a_{n+1})$, произведение которых равно единице. Если не все они равны между собой, то по индукционному предположению

$$a_1 + \dots + a_{n-1} + (a_n a_{n+1}) > n. \quad (1.2)$$

Если же $a_1 = \dots = a_{n-1} = a_n a_{n+1}$ (это возможно, например, при $a_1 = 1, \dots, a_{n-1} = 1, a_n = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 2$), то строгое неравенство (1.2) выполняется как равенство. В обоих случаях

$$a_1 + \dots + a_{n-1} + (a_n a_{n+1}) \geq n.$$

С учетом (1.1) получаем

$$a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} - 1 > a_1 + \dots + a_{n-1} + (a_n a_{n+1}) \geq n,$$

что равносильно требуемому неравенству

$$a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} > n + 1. \quad \square$$

Лемма 1.1 приводит к следующему результату.

Теорема 1.1. Пусть $n \geq 2$ и $a_1, a_2, \dots, a_n$ — положительные числа, не все равные между собой. Тогда

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. \quad (1.3)$$

Доказательство. Обозначим

$$c_k = \frac{a_k}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}, \quad k \in 1 : n.$$

Числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ — положительные, не все равные между собой, и их произведение равно единице. По лемме 1.1 имеем

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n > n,$$

что равносильно (1.3). $\square$

1.2. В условиях теоремы 1.1 наряду с неравенством (1.3) справедливо еще одно неравенство

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}} < \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right),$$

которое можно переписать в эквивалентном виде

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} < \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}. \quad (1.4)$$

Величины

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \quad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

называются соответственно *средним гармоническим*, *средним геометрическим* и *средним арифметическим* чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Неравенства (1.3) и (1.4) устанавливают связь между ними.

Отметим, что следствием неравенств (1.3) и (1.4) является неравенство между средним гармоническим и средним арифметическим

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Его можно переписать в эквивалентном виде

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} > \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}. \quad (1.5)$$

1.3. Часто используется другой вариант теоремы 1.1, в котором допускаются нулевые значения a_k .

Теорема 1.2. При $n \geq 2$ и неотрицательных $a_1, a_2, \dots, a_n$ справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \quad (1.6)$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Доказательство. Если все a_k равны между собой, то неравенство (1.6) выполняется как равенство. Допустим, что не все a_k равны между собой. Покажем, что в этом случае неравенство (1.6) выполняется как строгое. Это очевидно, если имеется нулевое a_{k_0} . Если же все a_k положительны, то мы находимся в условиях теоремы 1.1, согласно которой неравенство (1.6) выполняется как строгое. $\square$

Неравенство (1.6) называется *неравенством Коши*.

Следствие 1. При $n \geq 2$ и $a \geq -1$ справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{1+a} \leq 1 + \frac{1}{n}a. \quad (1.7)$$

Неравенство выполняется как равенство только при $a = 0$.

Действительно, по теореме 1.2 имеем

$$\sqrt[n]{1+a} = \sqrt[n]{(1+a) \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{(n-1) \text{ раз}}} \leq \frac{n+a}{n} = 1 + \frac{1}{n}a.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $1+a=1$, то есть только при $a=0$.

Неравенство (1.7) называется *неравенством Бернулли*.

Следствие 2. При $n \geq 2$ и неотрицательных $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)}. \quad (1.8)$$

Неравенство выполняется как равенство в четырех случаях:

(i) $a_k = b_k = 0$ при некотором $k \in 1 : n$;

(ii) $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$;

(iii) $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$;

(iv) $b_k = \lambda a_k$ при всех $k \in 1 : n$ и некотором $\lambda > 0$.

Доказательство. Очевидно, что в случаях (i)–(iv) неравенство (1.8) выполняется как равенство. Проверим, что в остальных случаях это неравенство выполняется как строгое.

Отрицание условий (i)–(iii) гарантирует, что $a_k + b_k > 0$ при всех $k \in 1 : n$ и что среди чисел a_k и b_k есть ненулевые. Перепишем неравенство (1.8) в эквивалентном виде

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1} \cdot \frac{a_2}{a_2+b_2} \cdots \frac{a_n}{a_n+b_n}} + \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2+b_2} \cdots \frac{b_n}{a_n+b_n}} \leq 1. \quad (1.9)$$

По неравенству Коши имеем

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1} \cdot \frac{a_2}{a_2+b_2} \cdots \frac{a_n}{a_n+b_n}} &\leq \frac{1}{n} \left(\frac{a_1}{a_1+b_1} + \frac{a_2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_n+b_n} \right), \\ \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2+b_2} \cdots \frac{b_n}{a_n+b_n}} &\leq \frac{1}{n} \left(\frac{b_1}{a_1+b_1} + \frac{b_2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n+b_n} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Неравенства (1.10) выполняются как равенства только тогда, когда

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_1+b_1} = \frac{a_2}{a_2+b_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_n+b_n} =: c, \\ \frac{b_1}{a_1+b_1} = \frac{b_2}{a_2+b_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n+b_n} = 1 - c. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Очевидно, что $c \in [0, 1]$. На самом деле, $c \in (0, 1)$, так как среди чисел a_k и b_k есть ненулевые.

Теперь запишем $a_k = c(a_k + b_k)$,

$$b_k = (1 - c)(a_k + b_k) = \frac{1 - c}{c} a_k, \quad k \in 1 : n.$$

Обозначив $\lambda = \frac{1-c}{c}$, получим $b_k = \lambda a_k$ при $k \in 1 : n$ и $\lambda > 0$. Это совпадает с условием (iv). Но по предположению это условие не выполняется. Значит, не выполняются

условия (1.11). Отсюда следует, что неравенства (1.10) выполняются как строгие. Сложив их, придем к строгому неравенству (1.9).

Утверждение доказано. $\square$

Неравенство (1.8) называется *неравенством Минковского* 20.

Задачи

А.1. Пусть m и n — натуральные числа, причем $m < n$. Докажите, что

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

А.2. Докажите, что при всех натуральных m, n справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} > 1.$$

А.3. Докажите, что при всех натуральных $n \geq 3$ выполняется неравенство

$$n! < \frac{n^n}{2^{n-1}}.$$

А.4. Докажите, что при $n \geq 2$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt[n]{\frac{n}{n-1}} < n.$$

А.5. Докажите, что при $n \geq 2$ и $a > -1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}} \geq 1 - \frac{1}{n}a.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

А.6. Докажите, что при $a > 0$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{1+na}{n+1}\right)^{n+1} \geq a^n.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

А.7. Пусть $n \geq 2$ и $a_1, a_2, \dots, a_n$ — неотрицательные числа. Докажите, что

$$n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} - (n-1) \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \leq a_n.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

А.8. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$, где $n \geq 2$, — неотрицательные числа. Докажите, что

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n \geq na_1 a_2 \dots a_n.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

А.9. Пусть n — натуральное число и $a \geq 0$. Докажите, что

$$1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n} \geq (n+1)a^n.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

А.10. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$, где $n \geq 2$, — неотрицательные числа. Докажите, что

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})^n &\leq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Когда неравенства выполняются как равенства?

2. Неравенство Коши–Буняковского

2.1. Вывод классического неравенства Коши–Буняковского основан на свойствах квадратичной функции.

Теорема 2.1. *Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ справедливо неравенство*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2). \quad (2.1)$$

Если не все a_k равны нулю, то неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $b_k = ta_k$ при всех $k \in 1 : n$ и некотором $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Введем обозначения

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2, \quad B = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2,$$

$$C = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

Нужно проверить, что $C^2 \leq AB$.

Если $A = 0$ (то есть все a_k равны нулю), то $C^2 = AB = 0$, так что неравенство $C^2 \leq AB$ выполняется как равенство.

Предположим, что $A \neq 0$. При всех вещественных t имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^n (a_k t - b_k)^2 = At^2 - 2Ct + B = \\ &= A(t - C/A)^2 - (C^2 - AB)/A. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Полагая в этом неравенстве $t = C/A$ и учитывая, что $A > 0$, получаем $C^2 - AB \leq 0$ или $C^2 \leq AB$. Неравенство (2.1) установлено.

Пусть по-прежнему $A \neq 0$.

Если $b_k = ta_k$ при всех $k \in 1 : n$ и некотором $t \in \mathbb{R}$, то $B = t^2 A$, $C = tA$. В этом случае $C^2 = t^2 A^2 = AB$. Наоборот,

пусть $C^2 = AB$. Положим в (2.2) $t = C/A$. Тогда правая часть неравенства (2.2) обратится в ноль. Получим

$$\sum_{k=1}^n (a_k t - b_k)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $b_k = ta_k$ при всех $k \in 1 : n$ и указанном t .

Теорема доказана $\square$

Неравенство (2.1) можно переписать в эквивалентном виде

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

Это неравенство вместе с неравенством (2.1) представляют собой две разные формы *неравенства Коши–Буняковского*.

2.2. Так как

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}, \quad (2.3)$$

то

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}. \quad (2.4)$$

Покажем, что в случае, когда не все a_k равны нулю, неравенство (2.4) выполняется как равенство только тогда, когда $b_k = ta_k$ при всех $k \in 1 : n$ и некотором $t \geq 0$.

Пусть неравенство (2.4) выполняется как равенство. Тогда и оба неравенства в (2.3) выполняются как равенства. Второе из этих равенств по теореме 2.1 гарантирует, что $b_k = ta_k$ при всех $k \in 1 : n$ и некотором $t \in \mathbb{R}$. Первое равенство принимает вид

$$t \sum_{k=1}^n a_k^2 = |t| \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

Отсюда следует, что $t = |t|$, а это возможно только при $t \geq 0$.

Обратное утверждение о том, что неравенство (2.4) выполняется как равенство, когда $b_k = ta_k$ при всех $k \in 1 : n$ и некотором $t \geq 0$, проверяется непосредственно. Нужно только учесть, что $\sqrt{t^2} = t$ при $t \geq 0$.

2.3. Положим в (2.4) $a_k = \frac{1}{n}$ при всех $k \in 1 : n$. Получим неравенство

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n}}. \quad (2.5)$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $b_k = t \frac{1}{n}$ при всех $k \in 1 : n$ и $t \geq 0$. Другими словами, неравенство (2.5) выполняется как равенство только тогда, когда все b_k неотрицательны и равны между собой.

Величина

$$\sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n}}$$

называется *средним квадратичным* чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$. Неравенство (2.5) показывает, что среднее арифметическое не превосходит среднего квадратичного.

Объединив неравенство Коши (1.6) и неравенство (2.5), придем к следующему результату.

Теорема 2.2. *Для всех неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, где $n \geq 2$, справедливо неравенство*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}. \quad (2.6)$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2.4. Вернемся к неравенству (2.1) и покажем, что оно связано с некоторым тождеством.

Теорема 2.3. *При всех вещественных $a_1, a_2, \dots, a_n$ и*

$b_1, b_2, \dots, b_n$ справедливо тождество

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (a_k b_j - a_j b_k)^2. \quad (2.7)$$

Из тождества (2.7) следует как неравенство (2.1), так и условие обращения его в равенство, которое в общем случае принимает вид $a_k b_j = a_j b_k$ при всех $k, j \in 1 : n$.

Доказательство тождества (2.7) проведем «справа налево». Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (a_k b_j - a_j b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (a_k^2 b_j^2 - 2(a_k b_k)(a_j b_j) + a_j^2 b_k^2) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j\right) + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right), \end{aligned}$$

что равносильно (2.7). $\square$

Задачи

А.11. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_n$ — произвольные вещественные числа. Докажите неравенство

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 \leq n(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

А.12. Докажите, что для положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

А.13. Докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

А.14. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — положительные и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — произвольные вещественные числа. Докажите неравенство

$$\frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \dots + \frac{b_n^2}{a_n} \geq \frac{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

А.15. Возьмем положительные числа $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$, где $a_{n+1} = a_1$. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k + a_{k+1}} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

А.16. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} \geq \frac{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

А.17. Докажите, что для положительных чисел a, b, c и положительных параметров p, q справедливо неравенство

$$\frac{a}{pb + qc} + \frac{b}{pc + qa} + \frac{c}{pa + qb} \geq \frac{3}{p + q}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

- А.18. Докажите, что для произвольных вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + \\ & + (b_1 + a_1)^2 + (b_2 + a_2)^2 + \dots + (b_n + a_n)^2 \geq \\ & \geq \frac{1}{n+1} (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2. \end{aligned}$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

- А.19. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — произвольные вещественные числа. Докажите неравенство

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2} \leq \\ & \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}. \end{aligned}$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

- А.20. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — произвольные вещественные числа. Докажите неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \right| \leq \\ & \leq \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}. \end{aligned}$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

Приложение В

Строго выпуклые функции и неравенство Йенсена

1. Строго выпуклые функции

1.1. Пусть (a, b) — открытый интервал на вещественной оси, конечный или бесконечный.

Определение. Функция одной переменной $f(x)$ называется *строго выпуклой* на интервале (a, b) , если для любых точек x_0, x_1 из (a, b) , $x_0 \neq x_1$, и всех $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) < tf(x_1) + (1-t)f(x_0). \quad (1.1)$$

Это неравенство можно записать в эквивалентном виде

$$f(x_0 + t(x_1 - x_0)) < f(x_0) + t(f(x_1) - f(x_0)). \quad (1.2)$$

Простейшим примером строго выпуклой на $\mathbb{R}$ функции является квадратичная функция $f(x) = x^2$. Проверим это.

Нужно доказать, что

$$(x_0 + t(x_1 - x_0))^2 < x_0^2 + t(x_1^2 - x_0^2) \quad (1.3)$$

при $x_1 \neq x_0$ и $t \in (0, 1)$. Преобразуем разность между правой и левой частями неравенства (1.3). Запишем

$$\begin{aligned} & x_0^2 + t(x_1^2 - x_0^2) - (x_0 + t(x_1 - x_0))^2 = \\ & = t(x_1^2 - x_0^2) - 2tx_0(x_1 - x_0) - t^2(x_1 - x_0)^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t(x_1 - x_0)(x_1 + x_0 - 2x_0 - t(x_1 - x_0)) = \\
&= t(1 - t)(x_1 - x_0)^2 > 0.
\end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом следует (1.3).

1.2. В определении строго выпуклой функции имеются две возможности: $x_0 < x_1$ и $x_0 > x_1$. Покажем, что при проверке на строгую выпуклость достаточно ограничиться случаем $x_0 < x_1$.

Лемма 1.1. *Если неравенство (1.2) выполняется для любых $x_0 < x_1$ и всех $t \in (0, 1)$, то оно остается справедливым для любых $x_0 > x_1$ и всех $t \in (0, 1)$.*

Доказательство. Возьмем $x_0 > x_1$ и $t \in (0, 1)$. Очевидно, что $x_1 < x_0$ и $(1 - t) \in (0, 1)$. По условию леммы имеем

$$f(x_1 + (1 - t)(x_0 - x_1)) < f(x_1) + (1 - t)(f(x_0) - f(x_1)).$$

Легко проверить, что это неравенство равносильно (1.2). Следует учесть, что

$$x_1 + (1 - t)(x_0 - x_1) = t(x_1 - x_0) + x_0. \quad \square$$

1.3. Обратимся к геометрическим свойствам строго выпуклых функций.

Лемма 1.2. *Если $f(x)$ строго выпуклая на (a, b) функция и*

$$a < x_0 < x < x_1 < b, \quad (1.4)$$

то (рис. 20)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}; \quad (1.5)$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}; \quad (1.6)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}. \quad (1.7)$$

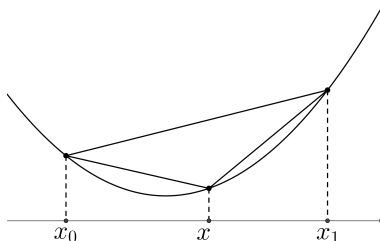


Рис. 20. Иллюстрация к формулам (1.5)–(1.7)

Доказательство. Имеем

$$x = x_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0).$$

Коэффициент $t = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ принадлежит интервалу $(0, 1)$. В силу строгой выпуклости функции получаем

$$f(x) < f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0)). \quad (1.8)$$

Отсюда непосредственно следует неравенство (1.5).

Перепишем (1.8) в виде

$$f(x) < f(x_1) - \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0)).$$

Это неравенство равносильно (1.6).

Сложив неравенства (1.5) и (1.6), придем к (1.7).

Лемма доказана. $\square$

1.4. Лемма имеет важные следствия.

Теорема 1.1. Для того чтобы функция $f(x)$ была строго выпуклой на интервале (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (1.7) при условии (1.4).

Доказательство. Необходимость установлена в лемме 1.2. Проверим достаточность.

Возьмем точки $x_0 < x_1$ из (a, b) и число $t \in (0, 1)$. Положим

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0). \quad (1.9)$$

Очевидно, что $x_0 < x < x_1$ и $x - x_0 = t(x_1 - x_0)$, $x_1 - x = (1 - t)(x_1 - x_0)$. Неравенство (1.7) после умножения на $t(1 - t)(x_1 - x_0)$ примет вид

$$(1 - t)(f(x) - f(x_0)) < t(f(x_1) - f(x)).$$

Отсюда следует, что

$$f(x) < f(x_0) + t(f(x_1) - f(x_0)).$$

Остается сослаться на формулу (1.9) и лемму 1.1. $\square$

1.5. Пусть отрезок $[c, d]$ содержится в (a, b) . Функции $f(x)$, заданной на (a, b) , сопоставим две функции

$$K_c(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad K_d(x) = \frac{f(d) - f(x)}{d - x}.$$

Лемма 1.3. Если $f(x)$ строго выпуклая функция, то функции $K_c(x)$ и $K_d(x)$ строго возрастают на промежутках $(c, d]$ и $[c, d)$ соответственно.

Доказательство. Возьмем точки $c < x_0 < x_1 \leq d$ (рис. 21). Требуемое неравенство $K_c(x_0) < K_c(x_1)$ следует из неравенства (1.5), если в нем заменить тройку (x, x_0, x_1) на (x_0, c, x_1) (рис. 20).

Возьмем точки $c \leq x_0 < x_1 < d$. Требуемое неравенство $K_d(x_0) < K_d(x_1)$ следует из неравенства (1.6), если в нем заменить тройку (x, x_1, x_0) на (x_1, d, x_0) (рис. 20).

Лемма доказана. $\square$

Эта лемма позволяет получить часто используемую предельную теорему.

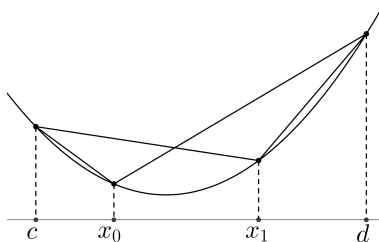


Рис. 21. Пояснение к лемме 1.3

Теорема 1.2. Пусть (a, b) — конечный интервал. Если функция $f(x)$ строго выпукла на (a, b) и непрерывна на $[a, b]$, то она строго выпукла на $[a, b]$.

Доказательство. Вначале установим строгую выпуклость функции $f(x)$ на промежутке $(a, b]$. На основании теоремы 1.1 достаточно проверить справедливость неравенства (рис. 22)

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < \frac{f(b) - f(x_1)}{b - x_1} \quad (1.10)$$

при условии $a < x_0 < x_1 < b$.

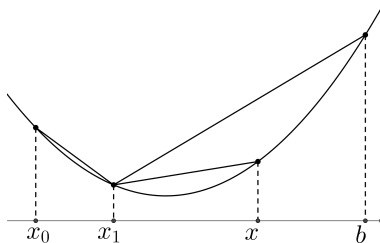


Рис. 22. Иллюстрация к неравенству (1.10)

Возьмем точку $x \in (x_1, b)$. В силу строгой выпуклости функции $f(x)$ на (a, b) имеем

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $x \rightarrow b$. Правая часть неравенства стремится к $\frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1}$ (по непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = b$), монотонно возрастаая (на основании леммы 1.3). В результате получим неравенство (1.10). Строгая выпуклость $f(x)$ на $(a, b]$ установлена.

Для доказательства строгой выпуклости функции $f(x)$ на $[a, b]$ достаточно проверить справедливость неравенства (рис. 23)

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (1.11)$$

при условии $a < x_0 < x_1 \leq b$.

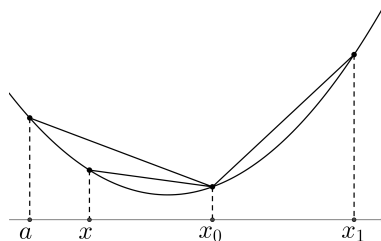


Рис. 23. Иллюстрация к неравенству (1.11)

Возьмем точку $x \in (a, x_0)$. В силу строгой выпуклости функции $f(x)$ на $(a, b]$ имеем

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $x \rightarrow a$. Левая часть неравенства стремится к $\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$ (по непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = a$), монотонно убывая (на основании леммы 1.3). В результате получим неравенство (1.11).

Теорема доказана. $\square$

2. Дифференцируемые строго выпуклые функции

2.1. Выясним, когда дифференцируемая функция является строго выпуклой.

Теорема 2.1. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая на (a, b) функция. Для того чтобы она была строго выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы при любых x_0, x_1 из (a, b) , $x_0 \neq x_1$, выполнялось неравенство

$$f(x_1) - f(x_0) > f'(x_0)(x_1 - x_0). \quad (2.1)$$

Доказательство. Необходимость. Возьмем точки $a < x_0 < x < x_1 < b$. По лемме 1.2 выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Перейдем в нем к пределу при $x \rightarrow x_0$. Левая часть неравенства стремится к пределу $f'(x_0)$, монотонно убывая. В результате получаем

$$f'(x_0) < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

что равносильно (2.1).

Пусть теперь $a < x_1 < x < x_0 < b$. Согласно (1.6) имеем

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} < \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $x \rightarrow x_0$. Правая часть неравенства стремится к $f'(x_0)$, монотонно возрастаая. В результате получаем

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} < f'(x_0).$$

Умножим обе части последнего неравенства на положительное число $x_0 - x_1$. Придем к неравенству

$$f(x_0) - f(x_1) < f'(x_0)(x_0 - x_1),$$

равносильному (2.1).

Достаточность. Возьмем точки $a < x_0 < x_1 < b$ и число $t \in (0, 1)$. Обозначим $x = tx_1 + (1 - t)x_0$. Согласно (2.1) имеем

$$f(x_1) - f(x) > f'(x)(x_1 - x);$$

$$f(x_0) - f(x) > f'(x)(x_0 - x).$$

Первое неравенство умножим на t , второе — на $t - 1$, после чего результаты сложим «в столбик». Получим

$$tf(x_1) + (1 - t)f(x_0) - f(x) > 0.$$

Остается сослаться на определение строго выпуклой функции и лемму 1.1.

Теорема доказана. □

2.2. Можно предложить более простой вариант критерия строгой выпуклости дифференцируемой функции.

Теорема 2.2. *Дифференцируемая на (a, b) функция $f(x)$ будет строго выпуклой тогда и только тогда, когда её первая производная $f'(x)$ строго возрастает на (a, b) .*

Доказательство. Пусть $f(x)$ дифференцируемая и строго выпуклая на (a, b) функция. Возьмем точки $a < x_0 < x_1 < b$. Нужно проверить, что $f'(x_0) < f'(x_1)$. Согласно теореме 2.1 имеем

$$f(x_1) - f(x_0) > f'(x_0)(x_1 - x_0);$$

$$f(x_0) - f(x_1) > f'(x_1)(x_0 - x_1).$$

Отсюда следует, что

$$f'(x_0) < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} < f'(x_1).$$

Наоборот, предположим, что производная $f'(x)$ строго возрастает на интервале (a, b) . Возьмем точки $a < x_0 < x < x_1 < b$. По формуле Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi), \quad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(\eta), \quad (2.2)$$

где $x_0 < \xi < x$ и $x < \eta < x_1$. Ясно, что $\xi < \eta$. По условию $f'(\xi) < f'(\eta)$. На основании (2.2) последнее неравенство можно переписать в виде

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Мы находимся в условиях теоремы 1.1, согласно которой $f(x)$ — строго выпуклая на интервале (a, b) функция.

Теорема доказана. $\square$

2.3. Получим критерий строгой выпуклости для дважды дифференцируемых функций.

Теорема 2.3. Пусть $f(x)$ дважды дифференцируемая на (a, b) функция. Для того чтобы она была строго выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

- (i) $f''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$;
- (ii) не существует интервала $(x_0, x_1) \subset (a, b)$, на котором $f''(x) \equiv 0$.

Второе условие означает, что не существует интервала $(x_0, x_1) \subset (a, b)$, на котором $f(x)$ является линейной функцией.

Доказательство. Необходимость. Согласно теореме 2.2 производная $f'(x)$ строго возрастает на (a, b) . Следовательно, $f''(x) \geq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Допустив, что существует интервал $(x_0, x_1) \subset (a, b)$, на котором $f''(x) \equiv 0$, получим, что $f'(x) \equiv \text{const}$ на (x_0, x_1) . Это противоречит строгому возрастанию $f'(x)$.

Достаточность. Условие (i) гарантирует монотонное неубывание производной $f'(x)$. Допустим, что $f'(x_0) = f'(x_1)$ в некоторых точках $x_0 < x_1$ из (a, b) . Тогда $f'(x) = f'(x_0)$ при всех $x \in (x_0, x_1)$. Отсюда следует, что $f''(x) \equiv 0$ на (x_0, x_1) . Это противоречит условию (ii).

Теорема доказана. $\square$

Замечание. Условия теоремы 2.3 заведомо выполняются, когда $f''(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$. Они выполняются также, если $f''(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$ за исключением конечного числа точек, в которых $f''(x) = 0$.

2.4. Приведем примеры строго выпуклых функций.

1) Функция $f(x) = x^{2n}$ строго выпукла на $\mathbb{R}$ при всех натуральных n . Действительно, $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}$. При $n = 1$ вторая производная положительна на $\mathbb{R}$, а при $n > 1$ обращается в ноль только в точке $x = 0$.

2) Функция $f(x) = \sqrt{c^2 + x^2}$ при $c \neq 0$ строго выпукла на $\mathbb{R}$. Имеем

$$f''(x) = \frac{c^2}{(c^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Вторая производная положительна на $\mathbb{R}$.

3) Функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ строго выпукла на полуоси $(0, +\infty)$ при всех положительных вещественных p . Имеем

$$f''(x) = p(p+1)x^{-p-2}.$$

Вторая производная положительна на $(0, +\infty)$.

4) Функция $f(x) = x \ln x$ строго выпукла на $[0, +\infty)$. Имеем

$$f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Вторая производная положительна на $(0, +\infty)$. Вместе с тем существует предел $f(x)$ при $x \rightarrow +0$, равный нулю. Доопределим функцию $f(x)$ в точке $x = 0$, положив $f(0) = 0$. По теореме 1.2 получим функцию, строго выпуклую на $[0, +\infty)$.

5) Функция $f(x) = -\ln \operatorname{tg} x$ строго выпукла на $(0, \frac{\pi}{4}]$. Имеем

$$f''(x) = \frac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

Вторая производная положительна на $(0, \frac{\pi}{4})$. Сама функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{4}$. По теореме 1.2 функция $f(x)$ строго выпукла на $(0, \frac{\pi}{4}]$.

Ниже представлена более полная таблица строго выпуклых функций.

2.5. Наряду с понятием строго выпуклой функции вводится понятие строго вогнутой функции.

Определение. Функция одной переменной $f(x)$ называется *строго вогнутой* на интервале (a, b) , если строго выпуклой на (a, b) является функция $-f(x)$.

Для строго вогнутой функции при любых x_0, x_1 из (a, b) , $x_0 \neq x_1$, и всех $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) > tf(x_1) + (1-t)f(x_0).$$

Таблица строго выпуклых функций

№	Вид функции	Промежуток
1	x^{2n} , где $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$
2	$\sqrt{c^2 + x^2}$ при $c \neq 0$	$\mathbb{R}$
3	x^p , где $p > 1$	$[0, +\infty)$
4	$-x^p$, где $0 < p < 1$	$[0, +\infty)$
5	x^{-p} , где $p > 0$	$(0, +\infty)$
6	a^x , где $a > 0$, $a \neq 1$	$\mathbb{R}$
7	$-\ln x$	$(0, +\infty)$
8	$x \ln x$	$[0, +\infty)$
9	$-\ln(1 - x^2)$	$(-1, 1)$
10	$\ln(1 + e^x)$	$\mathbb{R}$
11	$-\sin x$	$[0, \pi]$
12	$-\cos x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
13	$\operatorname{tg} x$	$[0, \frac{\pi}{2})$
14	$-\ln \sin x$	$(0, \pi)$
15	$-\ln \cos x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
16	$-\ln \operatorname{tg} x$	$(0, \frac{\pi}{4}]$

3. Неравенство Йенсена и его обращение

3.1. Обозначим через I произвольный промежуток на вещественной оси (открытый, замкнутый или полужамкнутый, конечный или бесконечный). Покажем, что для строго выпуклой на I функции $f(x)$ неравенство (1.1), определяющее строгую выпуклость, допускает естественное обобщение.

Теорема 3.1. Пусть $f(x)$ — функция, строго выпуклая на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, n — произвольное натуральное число и $t_0, t_1, \dots, t_n$ — положительные числа, в сумме равные единице. Утверждается, что для любых точек

$x_0, x_1, \dots, x_n$ из I , удовлетворяющих условию

$$\min_{k \in 0:n} x_k < \max_{k \in 0:n} x_k, \quad (3.1)$$

выполняется неравенство

$$f\left(\sum_{k=0}^n t_k x_k\right) < \sum_{k=0}^n t_k f(x_k). \quad (3.2)$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 1$ неравенство (3.2) следует из определения строгой выпуклости функции $f(x)$ (достаточно в неравенстве (1.1) положить $t = t_1$). Сделаем индукционный переход от n к $n + 1$.

Пусть имеются $n + 2$ положительных чисел $t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}$, в сумме равных единице. Возьмем $n + 2$ точек $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ из I , удовлетворяющих условию (3.1). Это значит, что не все x_k равны между собой. Будем считать для определенности, что $x_n \neq x_{n+1}$. Запишем

$$\sum_{k=0}^{n+1} t_k x_k = \sum_{k=0}^{n-1} t_k x_k + (t_n + t_{n+1}) \left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1} \right).$$

Обозначим $t'_n = t_n + t_{n+1}$, $x'_n = \frac{t_n}{t'_n} x_n + \frac{t_{n+1}}{t'_n} x_{n+1}$. Точки

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n \quad (3.3)$$

принадлежат промежутку I , а числа $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t'_n$ положительные и в сумме равны единице. По индукционному предположению имеем

$$f\left(\sum_{k=0}^{n+1} t_k x_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} t_k f(x_k) + t'_n f(x'_n). \quad (3.4)$$

Мы пишем знак « $\leq$ », потому что может оказаться, что все точки (3.3) равны между собой. В таком случае неравенство (3.4) выполняется как равенство.

Теперь отметим, что в силу строгой выпуклости функции $f(x)$ и условия $x_n \neq x_{n+1}$ справедливо строгое неравенство

$$f(x'_n) = f\left(\frac{t_n}{t'_n}x_n + \frac{t_{n+1}}{t'_n}x_{n+1}\right) < \frac{t_n}{t'_n}f(x_n) + \frac{t_{n+1}}{t'_n}f(x_{n+1}).$$

Подставив это в (3.4), придем к требуемому неравенству

$$f\left(\sum_{k=0}^{n+1} t_k x_k\right) < \sum_{k=0}^{n+1} t_k f(x_k).$$

Теорема доказана. $\square$

Теорему 3.1 можно переформулировать в эквивалентном виде.

Теорема 3.2. Пусть $f(x)$ — функция, строго выпуклая на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, n — произвольное натуральное число и $t_0, t_1, \dots, t_n$ — положительные числа, в сумме равные единице. Тогда для любых точек $x_0, x_1, \dots, x_n$ из I справедливо неравенство

$$f\left(\sum_{k=0}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=0}^n t_k f(x_k). \quad (3.5)$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда все x_k равны между собой.

Неравенство (3.5) называется *неравенством Йенсена*.

3.2. Теорема 3.2 порождает много конкретных неравенств в зависимости от вида строго выпуклой функции $f(x)$. Приведем три примера, когда в качестве $f(x)$ выступают функции x^2 , $\frac{1}{x}$ и $-\ln x$.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^2$. Эта функция строго выпукла на $\mathbb{R}$. По теореме 3.2 справедливо неравенство

$$(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n)^2 \leq t_1 x_1^2 + t_2 x_2^2 + \dots + t_n x_n^2, \quad (3.6)$$

где $t_1, t_2, \dots, t_n$ — положительные числа, в сумме равные единице, и $x_1, x_2, \dots, x_n$ — произвольные вещественные числа. Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Очевидно, что функция $f(x) = x^2$ строго выпукла на полуоси $[0, +\infty)$. При неотрицательных x_k неравенство (3.6) можно переписать в эквивалентном виде

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n \leq \sqrt{t_1 x_1^2 + t_2 x_2^2 + \dots + t_n x_n^2}. \quad (3.7)$$

В частном случае $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ неравенство (3.7) соответствует неравенству (А.2.5) между средним арифметическим и средним квадратичным неотрицательных чисел.

Пример 2. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Эта функция строго выпукла на полуоси $(0, +\infty)$. По теореме 3.2 справедливо неравенство

$$\frac{1}{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n} \leq \frac{t_1}{x_1} + \frac{t_2}{x_2} + \dots + \frac{t_n}{x_n}, \quad (3.8)$$

где $t_1, t_2, \dots, t_n$ — положительные числа, в сумме равные единице, и $x_1, x_2, \dots, x_n$ — произвольные положительные числа. Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

В частном случае $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ неравенство (3.8) соответствует неравенству (А.1.5) между средним гармоническим и средним арифметическим положительных чисел.

Пример 3. Пусть $f(x) = -\ln x$. Эта функция строго выпукла на полуоси $(0, +\infty)$. По теореме 3.2 справедливо неравенство

$$-\ln(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) \leq -t_1 \ln x_1 - t_2 \ln x_2 - \dots - t_n \ln x_n, \quad (3.9)$$

где $t_1, t_2, \dots, t_n$ — положительные числа, в сумме равные единице, и $x_1, x_2, \dots, x_n$ — произвольные положительные

числа. Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Перепишем неравенство (3.9) в эквивалентном виде

$$\ln(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) \geq \ln(x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}).$$

Отсюда следует, что

$$x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n. \quad (3.10)$$

В частном случае $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ неравенство (3.10) соответствует неравенству (А.1.6) между средним геометрическим и средним арифметическим положительных чисел.

3.3. На неравенство Йенсена (3.5) можно посмотреть как на оценку снизу для суммы

$$\sum_{k=1}^n t_k f(x_k)$$

в случае, когда $f(x)$ строго выпуклая функция. Эту сумму можно оценить и сверху.

Теорема 3.3. Пусть $f(x)$ — функция, строго выпуклая на отрезке $I = [m, M]$, $t_1, t_2, \dots, t_n$ — положительные числа, в сумме равные единице, и $x_1, x_2, \dots, x_n$ — произвольные точки из I . Утверждается, что справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n t_k f(x_k) \leq \frac{M - \hat{x}}{M - m} f(m) + \frac{\hat{x} - m}{M - m} f(M), \quad (3.11)$$

где $\hat{x} = \sum_{k=1}^n t_k x_k$. Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда каждое x_k равно m или M .

Доказательство. При фиксированном $k \in 1 : n$ имеем

$$x_k = \frac{M - x_k}{M - m} m + \frac{x_k - m}{M - m} M,$$

поэтому

$$f(x_k) \leq \frac{M - x_k}{M - m} f(m) + \frac{x_k - m}{M - m} f(M). \quad (3.12)$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда x_k равно m или M . Умножим обе части неравенства (3.12) на t_k , после чего просуммируем по k от 1 до n все полученные неравенства. Придем к (3.11).

Неравенство (3.11) выполняется как равенство только тогда, когда неравенство (3.12) выполняется как равенство при всех $k \in 1 : n$, то есть когда каждое x_k равно m или M .

Теорема доказана. $\square$

Неравенство (3.11) называется *обращением неравенства Йенсена*.

4. Взвешенные средние положительного порядка

4.1. Зафиксируем положительные числа $t_1, t_2, \dots, t_n$, в сумме равные единице, и произвольные положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Величина

$$M(p) = \left(\sum_{k=1}^n t_k a_k^p \right)^{1/p},$$

где p — положительное вещественное число, называется *взвешенным средним порядка p* чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. В частности, $M(1)$ — взвешенное среднее арифметическое, $M(2)$ — взвешенное среднее квадратичное.

Если $a_1 = a_2 = \dots = a_n =: a$, то $M(p) = a$ при всех $p > 0$. В дальнейшем считаем, что среди положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ есть хотя бы два различных.

Теорема 4.1. При $0 < p < q$ справедливо неравенство

$$M(p) < M(q). \quad (4.1)$$

Доказательство. Положим $x_k = a_k^p$, $k \in 1 : n$; $s = \frac{q}{p}$. Так как $s > 1$, то функция $f(x) = x^s$ является строго выпуклой на $(0, +\infty)$. По неравенству Йенсена имеем

$$\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k \right)^s < \sum_{k=1}^n t_k x_k^s.$$

Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned} M(q) &= \left(\sum_{k=1}^n t_k a_k^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^n t_k x_k^s \right)^{1/q} > \left(\sum_{k=1}^n t_k x_k \right)^{s/q} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n t_k a_k^p \right)^{1/p} = M(p). \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

В частном случае $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ неравенство (4.1) принимает вид

$$\left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{1/p} < \left(\frac{a_1^q + a_2^q + \dots + a_n^q}{n} \right)^{1/q}.$$

Здесь $a_1, a_2, \dots, a_n$ — произвольные положительные числа, не все равные между собой, и $0 < p < q$.

4.2. Покажем, что функция $M(p)$ имеет предел при $p \rightarrow +0$.

Теорема 4.2. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{p \rightarrow +0} M(p) = a_1^{t_1} a_2^{t_2} \dots a_n^{t_n}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\ln M(p) = \frac{1}{p} \ln \left(\sum_{k=1}^n t_k a_k^p \right).$$

По правилу Лопиталья имеем

$$\lim_{p \rightarrow +0} \ln M(p) = \lim_{p \rightarrow +0} \frac{\sum_{k=1}^n t_k a_k^p \ln a_k}{\sum_{k=1}^n t_k a_k^p} = \sum_{k=1}^n t_k \ln a_k.$$

Воспользуемся непрерывностью функции $f(x) = e^x =: \exp(x)$.
Получим

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +0} M(p) &= \lim_{p \rightarrow +0} \exp(\ln M(p)) = \exp\left(\lim_{p \rightarrow +0} \ln M(p)\right) = \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^n t_k \ln a_k\right) = a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_n^{t_n}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Величина

$$M(0) := a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_n^{t_n}$$

называется *взвешенным средним геометрическим* чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

На основании теорем 4.1 и 4.2 заключаем, что функция $M(p)$ строго возрастает на полуоси $[0, +\infty)$.

Задачи

- В.1. Приведите пример дифференцируемой строго возрастающей на $\mathbb{R}$ функции, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю.
- В.2. Пусть $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ — строго выпуклые на промежутке $I \subset \mathbb{R}$ функции. Докажите, что функция точечного максимума

$$F(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

также строго выпукла на I .

- В.3. Возьмем положительную на (a, b) дважды дифференцируемую функцию $f(x)$, у которой $f''(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$. Докажите, что n -я степень этой функции при любом натуральном $n \geq 2$ строго выпукла на (a, b) .
- В.4. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — положительные, строго выпуклые и одинаково монотонные на промежутке $I \subset \mathbb{R}$ функции (последнее означает, что при всех x, y из I выполняется неравенство $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$). Докажите, что произведение $f(x)g(x)$ строго выпукло на I .
- В.5. Докажите, что функция $\frac{1}{f(x)}$ строго выпукла на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если $f(x)$ положительна и строго вогнута на I .
- В.6. Рассмотрим на полуоси $(0, +\infty)$ две функции

$$xf(x) \quad \text{и} \quad f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Докажите, что из строгой выпуклости одной из них следует строгая выпуклость другой.

- В.7. Пусть $n \geq 3$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$ — эквидистантные точки на вещественной оси, то есть

$$x_k = x_1 + (k-1)d, \quad k \in 1 : n,$$

где $d > 0$. Докажите, что для строго выпуклой на отрезке $[x_1, x_n]$ функции $f(x)$ выполняются неравенства

$$f\left(\frac{x_1 + x_n}{2}\right) < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) < \frac{f(x_1) + f(x_n)}{2}.$$

- В.8. Возьмем строго выпуклую на полуоси $[0, +\infty)$ функцию $f(x)$. Докажите, что для любых неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, среди которых есть два числа

x_i, x_j , удовлетворяющих условию $x_i > x_j > 0$, справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) < f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) + (n-1)f(0).$$

В.9. Докажите, что для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\right)^2.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

В.10. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1.$$

Докажите, что в этом случае справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - a_k\right) \geq (n-1)\sqrt{n}.$$

Когда неравенство выполняется как равенство?

Решения задач

Раздел 1

1.6. Обозначим через x , y длины сторон основания ящика и через h его высоту. Нужно минимизировать величину

$$S = xy + 2h(x + y)$$

при условии $xyh = V$.

Имеем

$$S \geq xy + 4h\sqrt{xy},$$

причем равенство достигается только при $x = y$.

Далее

$$\begin{aligned} xy + 4h\sqrt{xy} &= \frac{V}{h} + 4\sqrt{Vh} = \\ &= \frac{V}{h} + 2\sqrt{Vh} + 2\sqrt{Vh} \geq 3\sqrt[3]{4V^2}. \end{aligned}$$

Здесь неравенство выполняется как равенство только при $\frac{V}{h} = 2\sqrt{Vh}$, то есть только при $V = 4h^3$. Отсюда следует, что

$$h = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}.$$

Приходим к неравенству

$$S \geq 3\sqrt[3]{4V^2}.$$

Оно выполняется как равенство только тогда, когда $x = y$ и $h = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. Но $xyh = V$, поэтому

$$x = y = \sqrt[3]{2V}.$$

Отметим, что у ящика с минимальной площадью поверхности при данном объеме основание квадратное и высота в два раза меньше длины стороны основания.

1.7. Обозначим через x, y, z длины ребер параллелепипеда. Требуется максимизировать величину

$$S = 2(xy + yz + zx)$$

при ограничении $4(x + y + z) = L$, где L известно.

Запишем

$$\begin{aligned} S &\leq (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) = 2(x^2 + y^2 + z^2) = \\ &= 2[(x + y + z)^2 - S]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $3S \leq \frac{1}{8}L^2$ или

$$S \leq \frac{1}{24}L^2.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$x = y = z = \frac{1}{12}L.$$

1.8. Обозначим через x, y длину сторон основания и через h высоту ящика. Нужно минимизировать величину

$$S = xy + 2h(x + y)$$

при ограничениях $xyh = V$, $y = kx$.

Так как $h = \frac{V}{kx^2}$ и $hx = \frac{V}{kx}$, то

$$S = kx^2 + \frac{(1+k)V}{kx} + \frac{(1+k)V}{kx} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(1+k)^2}{k}}V^{\frac{2}{3}}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $k^2x^3 = (1+k)V$. Значит,

$$x = \sqrt[3]{\frac{1+k}{k^2}}V, \quad y = kx, \quad h = \frac{V}{kx^2} = \sqrt[3]{\frac{k}{(1+k)^2}}V.$$

Отметим, что $h = \frac{k}{1+k}x$.

1.9. Обозначим через r радиус основания цилиндра и через h его высоту. Нужно максимизировать величину

$$V = \pi r^2 h$$

при ограничении $2\pi r^2 + 2\pi r h = S$.

Запишем

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{\sqrt{2}} ((r\sqrt{2})\sqrt{rh}\sqrt{rh}).$$

По неравенству (А.2.6) между средним геометрическим и средним квадратичным имеем

$$V \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{2(r^2 + rh)}{3} \right)^{3/2}.$$

Учитывая, что $2(r^2 + rh) = S/\pi$, приходим к неравенству

$$V \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{S}{3\pi} \right)^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{S}{3} \right)^{3/2}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $r\sqrt{2} = \sqrt{rh}$, то есть когда $2r = h$. Радиус r найдем из условия $S = 6\pi r^2$. Получим $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

1.10. Пусть r — радиус основания и h — высота бака. Нужно минимизировать величину

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h$$

при условии $\pi r^2 h = V$.

По неравенству Коши (А.1.6) имеем

$$S = \pi r^2 + \pi r h + \pi r h \geq 3 \sqrt[3]{\pi^3 r^4 h^2} = 3 \sqrt[3]{\pi V^2}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $\pi r^2 = \pi r h$, то есть когда $r = h$. Радиус r найдем из условия $\pi r^3 = V$. Получим $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

1.11. Обозначим через x длину стороны основания призмы и через h ее высоту. Нужно максимизировать величину

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 h$$

при условии $2(x + h) = P$.

По неравенству Коши (А.1.6) имеем

$$V = \frac{\sqrt{3}}{8} (x \cdot x \cdot (2h)) \leq \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{2(x+h)}{3} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{27} P^3.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $x = 2h = \frac{1}{3}P$.

1.12. Обозначим через x, y, z длину ребер вписанного параллелепипеда и через D диаметр шара. Нужно максимизировать величину

$$V = xyz$$

при условии $x^2 + y^2 + z^2 = D^2$.

По неравенству (А.2.6) между средним геометрическим и средним квадратичным имеем

$$V = xyz \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{9} D^3.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $x = y = z = \frac{D\sqrt{3}}{3}$.

1.13. Рассмотрим вертикальное сечение цилиндра, вписанного в конус (рис. 24) Введем обозначения: R, r — радиусы основания конуса и цилиндра, H, h — высоты конуса и цилиндра. Из соображений подобия имеем

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}.$$

Отсюда следует, что

$$h = H \left(1 - \frac{r}{R} \right).$$

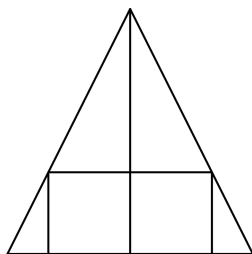


Рис. 24. Вертикальное сечение цилиндра, вписанного в конус

Запишем формулу для объема вписанного цилиндра

$$V = \pi r^2 h = 4\pi \frac{H}{R} \left(\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot (R - r) \right).$$

На основании неравенства Коши (А.1.6) получаем

$$V \leq 4\pi \frac{H}{R} \left(\frac{R}{3} \right)^3 = \frac{4\pi}{27} H R^2.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $\frac{r}{2} = R - r$, то есть при $r = \frac{2}{3}R$.

1.14. Обозначим через R радиус шара и через h высоту вписанного конуса (рис. 25).

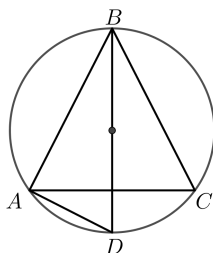


Рис. 25. Вертикальное сечение конуса, вписанного в шар

Квадрат радиуса основания конуса как высоты прямоугольного треугольника DAB равен произведению $h(2R - h)$. Для объема вписанного конуса получаем формулу

$$V = \frac{1}{3}\pi h(2R - h)h = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot (2R - h)\right).$$

Согласно неравенству Коши (А.1.6) имеем

$$V \leq \frac{4}{3}\pi\left(\frac{2R}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}\pi R^3.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $\frac{h}{2} = 2R - h$, то есть только при $h = \frac{4}{3}R$.

1.15. Формулировку задачи поясняет рисунок 26.

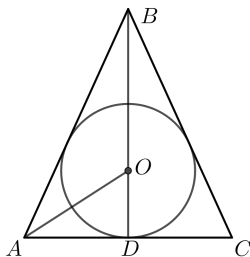


Рис. 26. Вертикальное сечение конуса, описанного около шара

Обозначим через r радиус шара и через α угол OAD . Очевидно, что $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$. Запишем формулу для объема описанного конуса

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi |AD|^2 \cdot |BD| = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{r}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 \left(\frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} \operatorname{tg} 2\alpha\right) = \\ &= \frac{1}{3}\pi r^3 \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \alpha} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{3}\pi r^3 \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}. \end{aligned}$$

По условию $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$, поэтому $\operatorname{tg}^2 \alpha \in (0, 1)$ и

$$\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \leq \frac{1}{4}.$$

Приходим к неравенству

$$V \geq \frac{8}{3}\pi r^3.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

Отметим, что объем полученного конуса в два раза больше объема шара.

Раздел 3

3.6. На рисунке 27 поясняется постановка задачи.

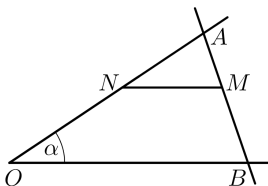


Рис. 27. Пояснение к задаче 3.6

Введем обозначения:

α — величина угла (в радианах);

a — длина отрезка NM ;

c — длина отрезка ON ;

x — длина отрезка NA ;

y — длина отрезка OB .

Точка M задана, поэтому величины a и c известны.

Треугольник ABO есть объединение треугольника AMN и трапеции $NMBO$. Его площадь S можно вычислить двумя способами:

$$S = \frac{1}{2}y(c+x)\sin\alpha = \frac{1}{2}ax\sin\alpha + \frac{1}{2}(a+y)c\sin\alpha.$$

Отсюда, в частности, следует, что $y(c+x) = ax + (a+y)c$.
Для y получаем выражение

$$y = \frac{a(c+x)}{x}.$$

Формула для S принимает вид

$$S = \frac{a(c+x)^2}{2x} \sin \alpha.$$

Очевидно, что

$$\frac{(c+x)^2}{x} = \frac{c^2}{x} + x + 2c.$$

Так как

$$\frac{c^2}{x} + x \geq 2c,$$

то

$$S \geq 2ac \sin \alpha.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $\frac{c^2}{x} = x$, то есть только при $x = c$ (при равенстве длин отрезков NA и ON).

3.7. Отразим симметрично точку M относительно сторон угла. Получим точки P и Q (рис. 28). По построению $AP = AM$ и $BQ = BM$.

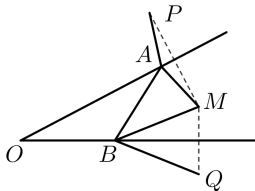


Рис. 28. Иллюстрация к задаче 3.7

Очевидно, что периметр треугольника $MA B$ равен длине ломаной $PABQ$. Длина ломаной будет наименьшей, если точки A и B лежат на пересечении отрезка, соединяющего точки P и Q со сторонами угла.

3.8. Обозначим через a длину основания треугольника и через d сумму длин x и y боковых сторон. По формуле Герона для площади треугольника имеем

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a+d)$. Так как

$$\sqrt{(p-x)(p-y)} \leq \frac{2p-d}{2} = \frac{a}{2},$$

то

$$S \leq \frac{1}{2}a\sqrt{p(p-a)}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $x = y = \frac{d}{2}$, то есть когда треугольник равнобедренный.

3.9. Для площади равнобедренного треугольника справедлива формула

$$S = \frac{1}{2}\ell^2 \sin \alpha,$$

где α — угол при вершине, $\alpha \in (0, \pi)$. Наибольшее значение S достигает при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, когда боковые стороны взаимно перпендикулярны.

3.10. Обозначим через x, y длины катетов прямоугольного треугольника и через z длину его гипотенузы. По условию $x + y = d$. Воспользуемся неравенством (А.2.5) между средним геометрическим и средним квадратичным. Получим

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2} = \frac{d}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}d.$$

Неравенство выполняется как равенство только при $x = y$.

Таким образом, длина гипотенузы прямоугольного треугольника при заданной сумме длин его катетов будет наименьшей только при равенстве длин катетов.

3.11. Сохраним обозначения x, y, z из предыдущей задачи. По условию

$$x + y = d, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Через h обозначим длину высоты, опущенной из прямого угла на гипотенузу.

Вычислим площадь треугольника двумя способами:

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}zh.$$

Отсюда следует, что

$$h = \frac{xy}{z} \leq \frac{1}{z} \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = \frac{d^2}{4z}. \quad (3.1)$$

Вместе с тем

$$z = \sqrt{2} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \sqrt{2} \frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} d. \quad (3.2)$$

Объединив (3.1) и (3.2), придем к неравенству

$$h \leq \frac{\sqrt{2}}{4} d.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $x = y$, то есть когда катеты имеют одинаковую длину.

3.12. Обозначим через a, b, c длины сторон треугольника и через r — радиус вписанной окружности. Для площади треугольника справедлива формула $S = pr$. Значит,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{1}{\sqrt{p}} \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\frac{p}{3} \right)^{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{9} p.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a = b = c$, то есть когда треугольник равносторонний.

3.13. Обозначим через a, b, c длины сторон треугольника и через p — его полупериметр. Воспользуемся формулой Герона для площади треугольника и неравенствами между средним гармоническим, средним арифметическим и средним квадратичным. Получим

$$\begin{aligned} S^2 &= p(p-a)(p-b)(p-c) \leq p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = 3\left(\frac{p}{3}\right)^4 = \\ &= \frac{3}{16}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \leq \frac{3}{16}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (4\sqrt{3})S.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда оба неравенства в (3.3) выполняются как равенства. Это возможно только при $a = b = c$.

Приходим к заключению: наименьшее значение величины $a^2 + b^2 + c^2$ при заданном S равно $(4\sqrt{3})S$ и достигается на равностороннем треугольнике.

3.14. Докажем, что искомой точкой является центр O описанной окружности (известно, что у остроугольных треугольников точка O лежит внутри треугольника).

Обозначим через R радиус описанной окружности. Достаточно проверить, что для любой точки M из треугольника, отличной от O , ее расстояние до одной из вершин больше R .

На рисунке 29 представлено основное соображение. Длины отрезков OC и OB равны R . Точка M отлична от O и лежит выше прямой, проходящей через точку O параллельно отрезку CB . Отрезки MP и OP взаимно перпендикулярны.

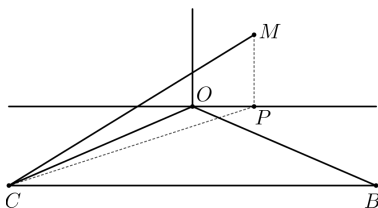


Рис. 29. Пояснение к решению задачи 3.13

Для точки M имеем

$$|CM| > |CP| > |CO| = R.$$

Таким образом, расстояние от точки M до одной из точек C или B больше R .

Теперь в исходном остроугольном треугольнике проведем через центр O описанной окружности три прямые, параллельные сторонам треугольника. Получим три полосы, покрывающие треугольник (рис. 30).

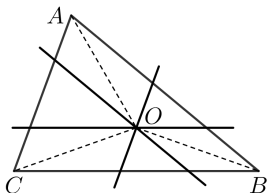


Рис. 30. Три полосы в треугольнике

Нетрудно понять, что любая точка M из треугольника, отличная от O , лежит вне одной из этих полос. По основному соображению расстояние от точки M до одной из вершин треугольника больше R .

3.15. Согласно неравенству между средним гармоническим и средним арифметическим в форме (А.1.5) имеем

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{9}{a+b+c} = \frac{9}{2p}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a = b = c$.

Раздел 5

5.6. Имеем

$$ab + bc + ca \leq \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2. \quad (5.1)$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a = b = c$. Добавим $2(ab + bc + ca)$ к обеим частям неравенства (5.1). Получим

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2.$$

Если $a + b + c = 1$, то

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}.$$

Неравенство выполняется как равенство только при $a = b = c = \frac{1}{3}$.

5.7. Очевидное неравенство

$$\left(a - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(c - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0$$

равносильно следующему:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{2}(ab + bc).$$

Если $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то

$$ab + bc \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Неравенство выполняется как равенство только при $a = c = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

5.8. На допустимых a, b, c имеем

$$\begin{aligned} w^2 &= \frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{b^2 c^2}{a^2} + \frac{c^2 a^2}{b^2} + 2(b^2 + a^2 + c^2) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{b^2 c^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2 c^2}{a^2} + \frac{c^2 a^2}{b^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c^2 a^2}{b^2} + \frac{a^2 b^2}{c^2} \right) + 2. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Коши. Получим

$$w^2 \geq b^2 + c^2 + a^2 + 2 = 3.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$\frac{a^2 b^2}{c^2} = \frac{b^2 c^2}{a^2} = \frac{c^2 a^2}{b^2},$$

то есть при $a = c = b$.

О т в е т. Наименьшее значение w равно $\sqrt{3}$. Оно достигается только при $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.9. Введем функцию $f(u) = -\sqrt{1-u^2}$. Она строго выпукла на интервале $(-1, 1)$, так как

$$f''(u) = \frac{1}{(1-u^2)^{3/2}} > 0.$$

По определению строго выпуклой функции имеем

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.$$

При $x+y=a$ получаем

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq \sqrt{4-a^2}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $x = y = \frac{a}{2}$.

5.10. При $x \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$x(2x - 1)^2 \geq 0.$$

Перепишем его в развернутом виде

$$x \geq 4x^2 - 4x^3.$$

Поделив на $1 - x$, придем к эквивалентному неравенству

$$\frac{x}{1-x} \geq 4x^2. \quad (5.2)$$

На множестве $(0, 1)$ данное неравенство выполняется как равенство только при $x = \frac{1}{2}$.

На основании (5.2) для w получаем следующую оценку:

$$w = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} + \frac{d}{1-d} \geq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2). \quad (5.3)$$

Если

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, \quad (5.4)$$

то

$$w \geq 4.$$

Числа $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ удовлетворяют условию (5.4) и на них неравенство (5.3) выполняется как равенство. Значит, наименьшее значение w равно 4 и достигается при $a = b = c = d = \frac{1}{2}$.

5.11. Оценим суммы первого и третьего, второго и четвертого слагаемых. Получим

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{a}{a+2b+c} + \frac{c}{c+2d+a} \right) + \left(\frac{b}{b+2c+d} + \frac{d}{d+2a+b} \right) = \\ &= \frac{a(c+2d+a) + c(a+2b+c)}{(a+2b+c)(c+2d+a)} + \frac{b(d+2a+b) + d(b+2c+d)}{(b+2c+d)(d+2a+b)} \geq \end{aligned}$$

$$\geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd}{(a + b + c + d)^2} = 1.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$a + 2b + c = c + 2d + a, \quad b + 2c + d = d + 2a + b,$$

то есть при $b = d$ и $a = c$.

О т в е т. Наименьшее значение w равно единице. Множество решений составляют все наборы вида (a, b, a, b) при положительных a и b .

5.12. Два раза применим неравенство Коши. Получим

$$w \geq 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_{k+1}a_{k+2}}}{a_k} \geq 2n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_{k+1}a_{k+2}}}{a_k}} = 2n.$$

Первое неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$a_2 = a_3, \quad a_3 = a_4, \quad \dots, \quad a_n = a_1, \quad a_1 = a_2,$$

то есть когда все a_k равны между собой. В этом случае и второе неравенство выполняется как равенство.

О т в е т. Наименьшее значение w равно $2n$. Это значение достигается, когда все a_k равны между собой.

5.13. Имеем

$$w = \sum_{k=1}^n \frac{(a_k - s) + s}{s - a_k} = s \sum_{k=1}^n \frac{1}{s - a_k} - n.$$

По неравенству между средним гармоническим и средним арифметическим в форме (А.1.5) запишем

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{s - a_k} \geq \frac{n^2}{ns - a_1 - a_1 - \dots - a_n} = \frac{n^2}{(n-1)s}.$$

Учитывая это, получаем

$$w \geq \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда все a_k равны между собой.

5.14. По неравенству Коши имеем

$$w = \sum_{k=1}^n \frac{s - a_k}{a_k} \geq n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{s - a_k}{a_k}}.$$

Снова воспользуемся неравенством Коши. Приняв обозначение $c = a_1 a_2 \cdots a_n$, получим

$$s - a_k \geq (n-1) \sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{k-1} a_{k+1} \cdots a_n} = (n-1) \sqrt[n-1]{\frac{c}{a_k}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{s - a_k}{a_k} \geq (n-1) \sqrt[n-1]{\frac{c}{a_k^n}}.$$

Далее

$$\prod_{k=1}^n \frac{s - a_k}{a_k} \geq (n-1)^n \sqrt[n-1]{c^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k^n}} = (n-1)^n.$$

В результате приходим к неравенству

$$w \geq n(n-1).$$

Все промежуточные неравенства выполняются как равенства только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

5.15. Обозначим $x_k = \frac{a_k}{s}$ и перепишем выражение для w в виде

$$w = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{1 + x_k}.$$

По определению, x_k положительны и в сумме равны единице.

Введем функцию

$$f(x) = -\frac{x}{1+x}.$$

Она строго выпукла на промежутке $(0, 1]$. Воспользуемся неравенством Йенсена (В.3.5) при $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$. Получим

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

Так как

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n+1},$$

то

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \geq -\frac{n}{n+1}.$$

Отсюда следует, что

$$w = -\sum_{k=1}^n f(x_k) \leq \frac{n}{n+1}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда все x_k равны между собой, то есть когда все a_k равны между собой.

Раздел 8

8.1. Рисунок 31 поясняет постановку задачи.

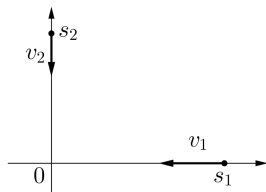


Рис. 31. Иллюстрация к задаче 8.1

Будем минимизировать квадрат расстояния между кораблями, то есть величину

$$\begin{aligned} p(t) &= (s_1 - v_1 t)^2 + (s_2 - v_2 t)^2 = \\ &= (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(s_1 v_1 + s_2 v_2)t + s_1^2 + s_2^2. \end{aligned}$$

Обозначим $a = v_1^2 + v_2^2$, $b = s_1 v_1 + s_2 v_2$, $c = s_1^2 + s_2^2$. Запишем

$$p(t) = at^2 - 2bt + c = a\left(t - \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - ac}{a}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} b^2 - ac &= s_1^2 v_1^2 + 2s_1 s_2 v_1 v_2 + s_2^2 v_2^2 - v_1^2 s_1^2 - v_2^2 s_2^2 - v_1^2 s_2^2 - v_2^2 s_1^2 = \\ &= -(v_1 s_2 - v_2 s_1)^2. \end{aligned}$$

Получаем

$$p(t) \geq \frac{(v_1 s_2 - v_2 s_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$t = \frac{b}{a} = \frac{s_1 v_1 + s_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}. \quad (8.1)$$

О т в е т. Наименьшее расстояние между кораблями равно следующей величине:

$$\frac{|v_1 s_2 - v_2 s_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Оно будет достигнуто в момент времени, определяемый формулой (8.1).

При $v_1 s_2 = v_2 s_1$ корабли столкнутся.

8.2. Имеем

$$w = \left(a + \frac{b+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b^2 + \frac{2}{3}b\right) - \frac{1}{4}.$$

Отметим, что

$$b^2 + \frac{2}{3}b = \left(b + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9},$$

поэтому

$$w = \left(a + \frac{b+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}.$$

Получаем $w \geq -\frac{1}{3}$, причем неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $b = -\frac{1}{3}$ и $a = -\frac{1}{3}$.

8.3. Имеем

$$\begin{aligned} w &= a^2 + b^2 + \left(a\sqrt{c} - \frac{b}{\sqrt{c}}\right)^2 + 2ab = \\ &= (a+b)^2 + \left(a\sqrt{c} - \frac{b}{\sqrt{c}}\right)^2. \end{aligned}$$

При $a+b=1$ получаем $w \geq 1$. Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $b = ca = \frac{c}{c+1}$.

8.4. Очевидно, что

$$w = \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(b-c)^2}{2} + \frac{(c-a)^2}{2} - (ab+bc+ca).$$

Далее,

$$ab+bc+ca \leq \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2} = a^2+b^2+c^2.$$

Добавив $2(ab+bc+ca)$ к обеим частям этого неравенства, получим

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2.$$

Значит,

$$w \geq \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(b-c)^2}{2} + \frac{(c-a)^2}{2} - \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

При $a+b+c=1$ приходим к неравенству $w \geq -\frac{1}{3}$. Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a=b=c=\frac{1}{3}$.

8.5. У выпуклого четырехугольника $ABCD$, изображенного на рисунке 32, длина сторон AB , BC и CD равна единице.

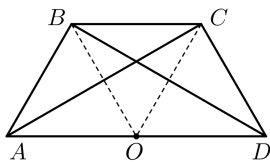


Рис. 32. Выпуклый четырехугольник с тремя равными сторонами

Площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников BCD и ABD . Если зафиксировать положение сторон BC и CD (и тем самым зафиксировать площадь треугольника BCD), то площадь треугольника ABD будет наибольшей, когда сторона AB перпендикулярна BD . Таким образом, в оптимальном случае угол ABD должен быть прямым. По тем же соображениям угол DCA также должен быть прямым. Получим, что на отрезок AD опираются два прямых угла. Это значит, что точки A , B , C и D лежат на окружности с центром в середине O отрезка AD .

Теперь легко доказать, учитывая равенство отрезков AB , BC и CD , что треугольники ABO , BOC и OCD равнобедренные. В частности, углы ABC и BCD равны 120° .

О т в е т. В условиях задачи для площади S четырехугольника справедливо неравенство $S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда четырехугольник представляет собой половину правильного шестиугольника с длиной сторон, равной единице.

8.6. Возьмем окружность с радиусом R и в ней сектор с углом φ радиан. Для площади S и периметра P сектора

справедливы формулы

$$S = \frac{1}{2} R^2 \varphi, \quad P = 2R + R\varphi.$$

Нужно максимизировать S при данном P .

По неравенству Коши имеем

$$S = \frac{1}{2} R^2 \varphi = \frac{1}{4} (2R)(R\varphi) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2R + R\varphi}{2} \right)^2 = \frac{1}{16} P^2.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $2R = R\varphi$, то есть при $\varphi = 2$ и $R = \frac{1}{4}P$.

8.7. Рисунок 33 поясняет постановку задачи.

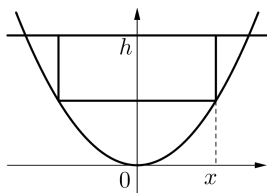


Рис. 33. Пояснение к задаче 8.7

Для площади S вписанного прямоугольника справедлива формула

$$S = 2x(h - ax^2).$$

По неравенству между средним геометрическим и средним квадратичным имеем

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{2}{a}} (x\sqrt{2a}) \sqrt{h - ax^2} \sqrt{h - ax^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\frac{2h}{3} \right)^{3/2} = \frac{4}{\sqrt{a}} \left(\frac{h}{3} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$2ax^2 = h - ax^2,$$

то есть при $ax^2 = \frac{h}{3}$.

8.8. Обозначим через a длину основания прямоугольника и через h — его высоту. Площадь S окна и его периметр P определяются формулами

$$S = ah + \frac{1}{8} \pi a^2, \quad P = 2h + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)a.$$

Нужно максимизировать S при данном P .

При любом положительном c имеем

$$S = \frac{1}{2c}(ca) \left(2h + \frac{1}{4} \pi a\right) \leq \frac{1}{8c} \left(2h + a \left(c + \frac{1}{4} \pi\right)\right)^2.$$

Возьмем $c = 1 + \frac{1}{4} \pi$. Получим

$$S \leq \frac{1}{8c} P^2.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $ca = 2h + \frac{1}{4} \pi a$, то есть при $a = 2h$.

О т в е т. Окно имеет наибольшую площадь, когда

$$a = \frac{2}{4 + \pi} P, \quad h = \frac{1}{4 + \pi} P.$$

8.9. Обозначим через r радиус основания цилиндра и через h — его высоту. Для объема V тела и площади S его поверхности справедливы формулы

$$V = \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3, \quad S = 3\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Нужно минимизировать S при данном V .

Имеем

$$\begin{aligned} 3V = \pi r^2(3h + 2r) &= \frac{\pi}{\sqrt{5}}(r\sqrt{5})\sqrt{r(3h + 2r)}\sqrt{r(3h + 2r)} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{\sqrt{5}} \left(\frac{9r^2 + 6rh}{3}\right)^{3/2} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \left(\frac{S}{\pi}\right)^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{5}\pi} S^{3/2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$S \geq (3\sqrt{5\pi} V)^{2/3} = \sqrt[3]{45\pi V^2}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $5r^2 = r(3h + 2r)$, то есть при $r = h$.

О т в е т. Площадь поверхности тела будет наименьшей, когда

$$r = h = \left(\frac{3V}{5\pi}\right)^{1/3}.$$

8.10. Все сомножители в левой части неравенства положительны, поэтому неравенство равносильно следующему:

$$\begin{aligned} & [(a+b-c)(a-b+c)][(a-b+c)(-a+b+c)] \times \\ & \times [(-a+b+c)(a+b-c)] \leq a^2 b^2 c^2. \end{aligned} \quad (8.2)$$

В силу неравенства Коши имеем

$$(a+b-c)(a-b+c) \leq a^2,$$

$$(a-b+c)(-a+b+c) \leq c^2,$$

$$(-a+b+c)(a+b-c) \leq b^2.$$

Перемножив, получим (8.2).

Неравенство (8.2) выполняется как равенство только тогда, когда $a = b = c$.

8.11. По определению среднего гармонического имеем

$$H = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}},$$

так что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{H}. \quad (8.3)$$

Воспользуемся неравенством (А.1.5) между средним арифметическим и средним гармоническим. Запишем

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c} &\geq \frac{2}{a}, \\ \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{-a+b+c} &\geq \frac{2}{c}, \\ \frac{1}{-a+b+c} + \frac{1}{a+b-c} &\geq \frac{2}{b}.\end{aligned}\tag{8.4}$$

Все три неравенства выполняются как равенства тогда и только тогда, когда

$$a+b-c = a-b+c = -a+b+c,$$

то есть только при $a = b = c$.

На основании (8.4) и (8.3) получаем

$$\begin{aligned}w &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{-a+b+c} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-a+b+c} + \frac{1}{a+b-c} \right) \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{3}{H}.\end{aligned}$$

Неравенство выполняется как равенство только при $a = b = c = H$.

8.12. В силу (А.1.5) имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} &\geq \\ &\geq \frac{9}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}},\end{aligned}\tag{8.5}$$

поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{3}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{a + b + c}.\tag{8.6}$$

Запишем

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} \leq 3(a + b + c).$$

Данное неравенство равносильно (8.6).

Оба неравенства (8.5) и (8.6) выполняются как равенства только тогда, когда $a = b = c$.

8.13. Введем обозначения

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c), \quad t = p - a, \quad u = p - b, \quad v = p - c.$$

Ясно, что t, u, v — положительные величины, при этом

$$t + u = c, \quad u + v = a, \quad v + t = b, \quad t + u + v = p.$$

Отметим также, что

$$t^2 uv + tu^2 v + tuv^2 = tuvp = S^2. \quad (8.7)$$

Имеем

$$\begin{aligned} w &= ab + bc + ca = \\ &= (u + v)(v + t) + (v + t)(t + u) + (t + u)(u + v) = \\ &= (v + t + u)^2 + vt + tu + uv. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством

$$(v + t + u)^2 \geq 3(vt + tu + uv). \quad (8.8)$$

Получим

$$w \geq 4(vt + tu + uv). \quad (8.9)$$

Еще раз воспользуемся неравенством (8.8), заменив в нем v, t, u на vt, tu, uv . Запишем

$$(vt + tu + uv)^2 \geq 3(t^2 uv + tu^2 v + tuv^2). \quad (8.10)$$

На основании (8.9), (8.10) и (8.7) приходим к окончательному неравенству

$$w \geq 4\sqrt{3}S. \quad (8.11)$$

Промежуточные неравенства (8.8) и (8.10) выполняются как равенства тогда и только тогда, когда $v = t = u$, то есть при $a = b = c$. Отсюда следует, что величина w принимает наименьшее значение только при выполнении условия $a = b = c = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$.

8.14. Обозначим $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. По условию задачи $a_k \geq a_k^2$ при всех $k \in 1 : n$, поэтому

$$(S + 1)^2 \geq 4S \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Оба неравенства выполняются как равенства только тогда, когда $S = 1$ и $a_k = a_k^2$ при всех $k \in 1 : n$. Последнее условие означает, что каждое a_k равно нулю или единице. Оба условия выполняются только тогда, когда одно из a_k равно единице, а остальные a_k равны нулю.

8.15. По неравенству между средним квадратичным и средним геометрическим двух чисел имеем

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)a}{n}. \quad (8.12)$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{a}{2}. \quad (8.13)$$

Далее,

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)a \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2, \quad (8.14)$$

причем неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a_k a = a_k^2$ при всех $k \in 1 : n$. Последнее имеет место, если каждое a_k равно нулю или a .

Объединив неравенства (8.12) и (8.14), придем к требуемому неравенству. Оно выполняется как равенство при соблюдении условия (8.13), в котором каждое a_k равно нулю

или a . Это возможно лишь при четном n , когда половина a_k равна a , а вторая половина a_k равна нулю.

8.16. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} = 1 \cdot \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \cdot 1 \leq \sqrt{ba}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $1 = t\sqrt{b-1}$ и $\sqrt{a-1} = t$ при некотором $t > 0$. Отсюда следует, что

$$\sqrt{a-1} \cdot \sqrt{b-1} = 1.$$

Условие обращения неравенства в равенство принимает вид $b = \frac{a}{a-1}$.

8.17. Имеем

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} = \sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

Воспользуемся неравенством Коши (А.1.3) и неравенством (А.2.5) между средним арифметическим и средним квадратичным. Получим

$$\sqrt{abc} \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{3/2},$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 3 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{1/2}.$$

Перемножив, придем к требуемому неравенству. Оно выполняется как равенство только тогда, когда $a = b = c$.

8.18. Если одно из чисел a , b равно нулю, то неравенство выполняется как строгое. Будем считать, что a и b — положительные числа. С учетом (В.4.1) запишем цепочку неравенств

$$\left(\frac{a^3 + b^3}{2} \right)^{1/3} \geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^{1/2} \geq \sqrt{ab}.$$

Оба неравенства выполняются как равенства только при $a = b$.

По условию задачи $a^2 + b^2 = 1$, поэтому

$$a^3 + b^3 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2} \geq ab.$$

Переписав второе неравенство в виде $\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2}ab$, придем к требуемому неравенству

$$a^3 + b^3 \geq \sqrt{2}ab.$$

Оно выполняется как равенство только при $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

8.19. Пусть для определенности $b \leq a \leq c$. Тогда

$$(a - b)(a - c) \leq 0$$

или

$$a^2 \leq ab + ac - bc.$$

Умножив это неравенство на b , получим

$$a^2b \leq ab^2 + abc - b^2c.$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} a^2b + b^2c + c^2a + abc &\leq ab^2 + 2abc + c^2a = a(b + c)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(2a)(b + c)(b + c) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2(a + b + c)}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}(a + b + c)^3. \end{aligned}$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $(a - b)(a - c) = 0$ и $2a = b + c$, то есть при $a = b = c$.

8.20. Запишем

$$(a + b)^4 = (a^2 + b^2 + 2ab)^2 \geq (2\sqrt{2ab(a^2 + b^2)})^2 = 8ab(a^2 + b^2).$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $(a^2 + b^2) = 2ab$, то есть при $a = b$.

8.21. Согласно неравенству Коши имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{ab} + \frac{a}{bc}\right) \geq \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда

$$ca^2 = b^2c, \quad ab^2 = c^2a, \quad bc^2 = a^2b,$$

то есть при $a = b = c$.

8.22. Обозначим

$$A = \sum_{k=1}^n a_k^p, \quad B = \sum_{k=1}^n b_k^q.$$

Если одно из чисел A или B равно нулю, то неравенство выполняется как равенство. Допустим, что A и B отличны от нуля. Перепишем требуемое неравенство в эквивалентном виде

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^p}{A}\right)^{1/p} \left(\frac{b_k^q}{B}\right)^{1/q} \leq 1. \quad (8.15)$$

В силу неравенства (В.3.10) и условия $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ при всех $k \in 1 : n$ имеем

$$\left(\frac{a_k^p}{A}\right)^{1/p} \left(\frac{b_k^q}{B}\right)^{1/q} \leq \frac{1}{p} \frac{a_k^p}{A} + \frac{1}{q} \frac{b_k^q}{B}. \quad (8.16)$$

Сложив эти неравенства, получим (8.15).

Неравенства (8.16) выполняются как равенства только тогда, когда $\frac{a_k^p}{A} = \frac{b_k^q}{B}$, то есть когда $b_k^q = \lambda a_k^p$ при всех $k \in 1 : n$ и некотором $\lambda > 0$. При том же условии как равенство выполняется и неравенство (8.15).

8.23. По условию $(a_k - a_i)(b_k - b_i) \geq 0$. Сложив эти неравенства, получим

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (a_k - a_i)(b_k - b_i) = 2n \sum_{k=1}^n a_k b_k - 2 \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=1}^n b_i. \quad (8.17)$$

Поделив на $2n^2$, придем к требуемому неравенству.

Покажем, что неравенство (8.17) выполняется как равенство только тогда, когда все a_k или все b_i равны между собой.

Пусть неравенство (8.17) выполняется как равенство. Тогда

$$(a_k - a_i)(b_k - b_i) = 0 \text{ при всех } k, i \text{ из } 1 : n. \quad (8.18)$$

Обозначим $a = \min_{k \in 1:n} a_k$, $J = \{k \in 1 : n \mid a_k = a\}$. Если не все a_k равны между собой, то найдется индекс k_0 , не принадлежащий J . Имеем $a_k - a_{k_0} < 0$ при всех $k \in J$. В силу (8.18)

$$b_k - b_{k_0} = 0 \text{ при всех } k \in J. \quad (8.19)$$

Теперь возьмем индекс k_1 из J . Так как $a_k - a_{k_1} > 0$ при всех $k \notin J$, то $b_k - b_{k_1} = 0$ при всех $k \notin J$. В частности, $b_{k_0} - b_{k_1} = 0$. Значит,

$$b_k - b_{k_0} = 0 \text{ при всех } k \notin J. \quad (8.20)$$

На основании (8.19) и (8.20) приходим к выводу, что все b_k равны между собой.

Обратное утверждение тривиально. Неравенство (8.17), действительно, выполняется как равенство, если все a_k или все b_i равны между собой.

8.24. Обозначим через p вес бриллианта, и пусть $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$, где p_k — неотрицательные веса. Достаточно доказать неравенства

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2 \geq p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2, \quad (8.21)$$

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 \geq \frac{1}{n}(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2 \quad (8.22)$$

и выяснить, когда эти неравенства выполняются как равенства.

Неравенство (8.22) эквивалентно неравенству между средним квадратичным и средним арифметическим чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$. Оно выполняется как равенство, когда все p_k равны между собой.

Неравенство (8.21) проверяется так:

$$\begin{aligned}(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2 &= p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 + 2 \sum_{k \neq j} p_k p_j \geq \\ &\geq p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2.\end{aligned}$$

Равенство получим, если $\sum_{k \neq j} p_k p_j = 0$. Это возможно только в том случае, когда нет двух ненулевых p_k , то есть когда одно из p_k равно p , а остальные p_k равны нулю.

8.25. Последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$a_{n+1} = a_n \left(\frac{1}{2} \lg(n+1) \right), \quad n = 2, 3, \dots$$

Обозначим $q_n = \frac{1}{2} \lg(n+1)$. При $n = 99$ имеем $q_n = 1$, поэтому $a_{100} = a_{99}$. При $n < 99$ выполняется неравенство $q_n < 1$, поэтому $a_2 > a_3 > \dots > a_{99}$. При $n > 99$ будет $q_n > 1$, поэтому $a_{100} < a_{101} < \dots$. Получили, что наименьшее значение a_n достигается при $n = 99$ и $n = 100$.

8.26. Воспользуемся тем, что при $0 < a < b$ выполняется неравенство

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}.$$

Получим

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} = \frac{1}{a_n(2n+1)}.$$

Отсюда следует, что

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Далее,

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots (2n)} > \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \frac{1}{4na_n}.$$

Отсюда следует, что

$$a_n > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

8.27. При натуральных x, y, z по неравенству Коши имеем

$$3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3\sqrt{xyz}.$$

Значит, $xyz \leq 1$. Это возможно только тогда, когда $x = y = z = 1$. Случай, когда одно из чисел x, y, z или все три отрицательны, невозможны (отрицательное число не может равняться 3). Допустим, что два числа отрицательны. Тогда все слагаемые положительны. Заменяя отрицательные числа их модулями, получим еще три решения $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$ и $(1, -1, -1)$.

8.28. Данная функция является нечетной, положительной при $x > 0$ и отрицательной при $x < 0$. Наибольшее значение будем искать на полуоси $(0, +\infty)$. По неравенству Коши имеем

$$f(x) := \frac{x}{ax^2 + b} = \frac{1}{ax + \frac{b}{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}.$$

Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $ax = \frac{b}{x}$ и $x > 0$, то есть при $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

В силу нечетности функции $f(x)$ наименьшее значение достигается при $x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ и равно $-\frac{1}{2\sqrt{ab}}$.

8.29. Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax^2 + bx + c}{x - p} = \frac{a(x^2 - p^2) + b(x - p) + ap^2 + bp + c}{x - p} = \\ &= a(x + p) + b + \frac{A}{x - p}. \end{aligned}$$

Очевидно, что при $A = 0$ функция $f(x)$ линейна.

Вычислим вторую производную

$$f''(x) = \frac{2A}{(x-p)^3}.$$

По теореме В.2.3 функция $f(x)$ строго выпукла при $A > 0$ и строго вогнута при $A < 0$ на полуоси $(p, +\infty)$.

8.30. Вычислим первую и вторую производные:

$$F'(p) = \frac{\sum_{k=1}^n a_k^p \ln a_k}{\sum_{k=1}^n a_k^p},$$

$$F''(p) = \frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k^p \ln^2 a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \ln a_k\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^2}.$$

Покажем, что $F''(p) > 0$ на $\mathbb{R}$. Достаточно проверить неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^p \ln a_k\right)^2 < \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right) \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \ln^2 a_k\right). \quad (8.23)$$

Обозначим $A = \sum_{k=1}^n a_k^p$, $t_k = a_k^p/A$. Очевидно, что все t_k положительны и что их сумма равна единице. После деления на A^2 неравенство (8.23) принимает вид

$$\left(\sum_{k=1}^n t_k \ln a_k\right)^2 < \sum_{k=1}^n t_k \ln^2 a_k. \quad (8.24)$$

Справедливость неравенства (8.24) следует из строгой выпуклости на $\mathbb{R}$ функции x^2 и того факта, что не все числа $\ln a_k$ равны между собой.

8.31. Перепишем требуемое неравенство в развернутом виде

$$1 + a + b + ab \leq 1 + \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} + \sqrt{ab} \frac{a+b}{2}.$$

После простых преобразований получим

$$(\sqrt{ab} - 1) \left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right) \geq 0.$$

Это неравенство справедливо, так как по условию задачи числа a и b больше единицы. Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $a = b$.

8.32. Умножим и разделим левую часть неравенства на сопряженную величину

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}.$$

Получим

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} = \frac{(a-b)^2}{4 \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \frac{a+b}{2} \right)} \leq \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a = b$.

8.33. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\sum_{k=1}^n (\sqrt{a_k} \cdot \sqrt{b_k}) \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k}.$$

Это соответствует требуемому неравенству.

Если все a_k равны нулю, то неравенство выполняется как равенство. В случае, когда не все a_k равны нулю, неравенство будет выполняться как равенство тогда и только тогда, когда $b_k = ta_k$ при некотором $t \geq 0$ и всех $k \in 1 : n$.

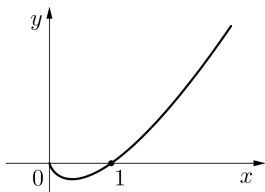


Рис. 34. График функции $x \ln x$

8.34. Функция $f(x) = x \ln x$ является строго выпуклой на полуоси $[0, +\infty)$. На рисунке 34 изображен ее график.

По неравенству Йенсена, для точек x_k , удовлетворяющих ограничениям задачи, имеем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) = f\left(\frac{1}{n} A\right).$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \geq n f\left(\frac{1}{n} A\right).$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n} A$.

8.35. Имеем

$$\begin{aligned} w &:= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} - c = \\ &= \frac{b_1 \left(\frac{a_1}{b_1} - c \right) + b_2 \left(\frac{a_2}{b_2} - c \right) + \dots + b_n \left(\frac{a_n}{b_n} - c \right)}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}. \end{aligned}$$

Введем обозначения: $B = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, $t_k = b_k/B$,

$$M = \max_{k \in 1:n} \left\{ \frac{a_k}{b_k} - c \right\}.$$

Числа t_k положительные и в сумме равны единице.

Очевидно, что при всех $k \in 1 : n$ справедливо неравенство

$$\frac{a_k}{b_k} - c \leq M. \quad (8.25)$$

Умножим его на t_k и просуммируем по k от 1 до n . Получим

$$w \leq M.$$

Это неравенство выполняется как равенство только тогда, когда при всех $k \in 1 : n$ как равенство выполняется неравенство (8.25), то есть, когда все дроби a_k/b_k равны между собой.

8.36. Рисунок 35 поясняет постановку задачи.

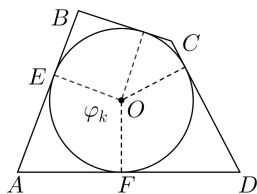


Рис. 35. Пояснение к задаче 8.36

Обозначим через r радиус окружности и через φ_k угол между радиусами, перпендикулярными двум соседним сторонам описанного n -угольника. Очевидно, что $\varphi_k \in (0, \pi)$. Площадь четырехугольника $AEOF$ равна $r^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_k}{2}$. Для площади S_n всего n -угольника справедлива формула

$$S_n = r^2 \sum_{k=1}^n \operatorname{tg} \frac{\varphi_k}{2}.$$

Нужно минимизировать S_n при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k = 2\pi; \quad \varphi_k \in (0, \pi) \quad \text{при всех } k \in 1 : n.$$

площади S_n вписанного n -угольника справедлива формула

$$S_n = \frac{1}{2} r^2 \sum_{k=1}^n \sin \alpha_k.$$

Нужно максимизировать S_n при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2\pi; \quad \alpha_k \in (0, \pi) \text{ при всех } k \in 1 : n.$$

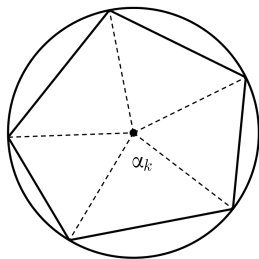


Рис. 37. Вписанный n -угольник, для которого центр окружности является его внутренней точкой

Функция $f(x) = \sin x$ является строго вогнутой на интервале $(0, \pi)$. По неравенству Йенсена имеем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \alpha_k \leq \sin \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \right) = \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Значит,

$$S_n \leq \frac{1}{2} r^2 n \sin \frac{2\pi}{n} = \pi r^2 \left(\frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} \right).$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{2\pi}{n}$, то есть когда вписанный n -угольник является правильным.

8.38. Функция $f(x) = \sin^2 x$ строго выпукла на $(0, \frac{\pi}{4})$, так как

$$f''(x) = 2 \cos 2x > 0 \text{ при } x \in (0, \frac{\pi}{4}).$$

По условию задачи углы $\alpha/2$, $\beta/2$, $\gamma/2$ принадлежат интервалу $(0, \frac{\pi}{4})$. Воспользуемся неравенством Йенсена. Получим

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq 3 \sin^2 \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) \right) = \frac{3}{4}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

8.39. По неравенству Коши имеем

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \right)^3. \quad (8.26)$$

Функция $f(x) = \sin x$ строго вогнута на интервале $(0, \pi)$. Воспользуемся неравенством Йенсена. Получим

$$\frac{1}{3}(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \leq \sin \left(\frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (8.27)$$

Объединив (8.26) и (8.27), придем к неравенству

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда оба неравенства (8.26) и (8.27) выполняются как равенства, то есть при $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

8.40. Функция $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ строго выпукла на интервале $(0, \pi)$, так как функция $\sin x$ положительна и строго вогнута на этом интервале (см. задачу В.5). По неравенству Йенсена имеем

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} \geq \frac{3}{\sin \left(\frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \right)} = 2\sqrt{3}.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

8.41. Перепишем выражение для w в виде

$$w = \sin \alpha \cdot \sin \beta + (\cos \alpha) \cdot 1 + 1 \cdot (\cos \beta).$$

Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского. Получим

$$w \leq \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1} \cdot \sqrt{\sin^2 \beta + 1 + \cos^2 \beta} = 2.$$

Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда при некотором $t \geq 0$ совместны соотношения

$$\sin \alpha = t \sin \beta, \quad \cos \alpha = t, \quad 1 = t \cos \beta.$$

Они гарантируют, что

$$\sin^2 \alpha + 1^2 = t^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = t^2 = \cos^2 \alpha,$$

то есть что $\sin^2 \alpha + 1 = \cos^2 \alpha$. На отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ это возможно только при $\alpha = 0$. По $\alpha = 0$ вычисляются $t = 1$ и $\beta = 0$.

Таким образом, наибольшее значение w равно 2 и достигается в единственном случае, когда $\alpha = \beta = 0$.

8.42. Функция $f(x) = \sin x$ строго вогнута на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$. Возьмем $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Согласно аналогу неравенства (В.1.5) для строго вогнутых функций имеем

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x.$$

Запишем это неравенство при $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$ и результаты сложим. Получим

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma > \frac{2}{\pi} (\alpha + \beta + \gamma) = 2.$$

Константу 2 в правой части неравенства увеличить нельзя, так как существует последовательность остроугольных треугольников с углами α_n , β_n , γ_n такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \alpha_n + \sin \beta_n + \sin \gamma_n) = 2.$$

Достаточно взять $\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$, $\gamma_n = \frac{2}{n}$.

8.43. Функция $f(x) = \cos^2(x)$ строго вогнута на отрезке $[0, \frac{\pi}{4}]$, так как она непрерывна на $[0, \frac{\pi}{4}]$ и $f''(x) = -2 \cos 2x < 0$ при $x \in (0, \frac{\pi}{4})$. Согласно аналогу неравенства (B.1.5) для строго вогнутых функций при $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ имеем

$$\cos^2 x > 1 + \frac{4}{\pi} x \left(\cos^2 \frac{\pi}{4} - 1 \right) = 1 - \frac{2}{\pi} x.$$

Запишем это неравенство при $x = \alpha/2$, $x = \beta/2$, $x = \gamma/2$ и результаты сложим. Получим

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} > 3 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) = 2.$$

Константу 2 в правой части неравенства увеличить нельзя, так как при $\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$, $\gamma_n = \frac{2}{n}$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos^2 \frac{\alpha_n}{2} + \cos^2 \frac{\beta_n}{2} + \cos^2 \frac{\gamma_n}{2} \right) = 2.$$

8.44. Функция $f(x) = \cos x$ строго вогнута на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$. Возьмем $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{n}$, $t = \frac{n}{n+1}$. По определению строгой вогнутости имеем

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) > tf(x_1) + (1-t)f(x_0).$$

В данном случае

$$\cos \frac{\pi}{n+1} > \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

Умножив на $n+1$, придем к требуемому неравенству

$$(n+1) \cos \frac{\pi}{n+1} - n \cos \frac{\pi}{n} > 1.$$

Константу в правой части неравенства увеличить нельзя. Действительно, левую часть с помощью формулы Лагранжа

можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & (n+1) \cos \frac{\pi}{n+1} - n \cos \frac{\pi}{n} = \\ & = \cos \frac{\pi}{n+1} + n \left(\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{\pi}{n} \right) = \\ & = \cos \frac{\pi}{n+1} + (n \sin \xi_n) \frac{\pi}{n(n+1)}, \end{aligned}$$

где $\xi_n \in (\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n})$. Очевидно, что это выражение при $n \rightarrow \infty$ стремится к единице.

8.45. Имеем

$$f(x) = 2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x + \cos x}}.$$

Так как

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \geq -\sqrt{2},$$

то

$$f(x) \geq 2\sqrt{2^{-\sqrt{2}}}.$$

Точка минимума x_* определяется из условий $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1$, $x \in [0, 2\pi]$. Получаем $x_* = \frac{5\pi}{4}$.

8.46. Обозначим $y = \sin^n x$, $z = \cos^n x$. Запишем

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{yz} \geq \\ &\geq 1 + 2\sqrt{\frac{1}{yz}} + \frac{1}{yz} = \left(1 + \sqrt{\frac{1}{yz}}\right)^2. \end{aligned}$$

Так как $yz = \sin^n x \cos^n x = \frac{1}{2^n} (\sin 2x)^n$, то

$$f(x) \geq \left(1 + \sqrt{\frac{2^n}{(\sin 2x)^n}}\right)^2 \geq (1 + 2^{n/2})^2.$$

Точка минимума x_* определяется из условий

$$\sin^n x = \cos^n x, \quad \sin 2x = 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Очевидно, что $x_* = \frac{\pi}{4}$.

8.47. Воспользуемся неравенством между средним геометрическим и средним квадратичным. Получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \cdot \sin 2x = 2 \sin^2 x \cdot \cos x = \\ &= 4 \left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) \leq 4 \left(\frac{1}{3} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Точка максимума x^* определяется из условий $\frac{\sin x}{\sqrt{2}} = \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Ясно, что $x^* = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

8.48. Возьмем произвольное $\lambda > 0$. Запишем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\lambda^{2n-1}} \left(\underbrace{\sin x \cdots \sin x}_{2m \text{ раз}} \cdot \underbrace{\lambda \cos x \cdots \lambda \cos x}_{(2n-1) \text{ раз}} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda^{2n-1}} \left(\frac{2m \sin^2 x + (2n-1) \lambda^2 \cos^2 x}{2m + 2n - 1} \right)^{\frac{2m+2n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Положим $\lambda = \sqrt{2m/(2n-1)}$. Получим

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \left(\frac{2n-1}{2m} \right)^{\frac{2n-1}{2}} \left(\frac{2m}{2m + 2n - 1} \right)^{\frac{2m+2n-1}{2}} = \\ &= (2m)^m \sqrt{\frac{(2n-1)^{2n-1}}{(2m + 2n - 1)^{2m+2n-1}}}. \end{aligned}$$

Точка максимума x^* определяется из условий $\sin x = \lambda \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Очевидно, что

$$x^* = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2m}{2n-1}}.$$

8.49. По неравенству Коши имеем

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}}. \quad (8.28)$$

Далее

$$1 + b_k = \underbrace{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-1}}_{(n-1) \text{ раз}} + b_k \geq n \sqrt[n]{\frac{b_k}{(n-1)^{n-1}}},$$

так что

$$\prod_{k=1}^n (1 + b_k) \geq n^n \frac{\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}}{(n-1)^{n-1}}. \quad (8.29)$$

Перемножив (8.28) и (8.29), получим

$$w \geq n^2 \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1}.$$

Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = \frac{1}{n-1}$.

8.50. Введем обозначение $t_k = \frac{b_k}{a_k}$, $k \in 1 : n$. Перепишем требуемое неравенство в терминах a_k и t_k , приняв во внимание, что $b_k = t_k a_k$. Получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k t_k}{1 + t_k} \leq \frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j t_j \right)}{\sum_{j=1}^n a_j (1 + t_j)}.$$

Перейдем к эквивалентной записи:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k a_j \frac{t_k (1 + t_j)}{1 + t_k} \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k a_j t_j. \quad (8.30)$$

Сравним слагаемые с индексами (k, j) в левой и правой частях неравенства (8.30). При $k = j$ эти слагаемые равны. Пусть $k \neq j$. Покажем, что сумма слагаемых с индексами (k, j) и (j, k) из левой части не превосходит аналогичной суммы из правой части. Дело сводится к проверке неравенства

$$\frac{t_k (1 + t_j)}{1 + t_k} + \frac{t_j (1 + t_k)}{1 + t_j} \leq t_j + t_k. \quad (8.31)$$

Выполним последовательно несколько эквивалентных преобразований этого неравенства:

$$t_k \left(1 - \frac{1+t_j}{1+t_k} \right) - t_j \left(\frac{1+t_k}{1+t_j} - 1 \right) \geq 0;$$

$$t_k \left(\frac{t_k - t_j}{1+t_k} \right) - t_j \left(\frac{t_k - t_j}{1+t_j} \right) \geq 0;$$

$$(t_k - t_j) \left(\frac{t_k}{1+t_k} - \frac{t_j}{1+t_j} \right) \geq 0;$$

$$\frac{(t_k - t_j)^2}{(1+t_k)(1+t_j)} \geq 0.$$

Очевидно, что заключительное неравенство справедливо. Значит, справедливо и неравенство (8.31).

Из (8.31) следует (8.30). Неравенство (8.30) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда все t_k равны между собой, то есть когда $b_k = ta_k$ при некотором $t > 0$ и всех $k \in 1:n$.

З а м е ч а н и е. Задача 8.50 порождает эффективную экстремальную задачу:

найти наибольшее значение выражения

$$w = \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$$

при ограничениях

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = A, \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n = B,$$

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0, \quad b_1 > 0, b_2 > 0, \dots, b_n > 0.$$

Здесь A и B — положительные константы.

Приведем решение этой задачи.

Согласно результату задачи 8.50 имеем

$$w \leq \frac{AB}{A+B}.$$

Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $b_k = ta_k$ при некотором $t > 0$ и всех $k \in 1 : n$. Значение t найдем из ограничений задачи. Получим $t = \frac{B}{A}$.

Значит, наибольшее значение w равно $\frac{AB}{A+B}$. Оно достигается на любом плане $(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n)$, удовлетворяющем условию

$$b_k = \frac{B}{A} a_k, \quad k \in 1 : n.$$

Приложение А

А.1. Перепишем предложенное неравенство в эквивалентном виде

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} < 1 + \frac{1}{n}.$$

По неравенству Коши имеем

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} = \\ &= \sqrt[n]{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m}\right)}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{(n-m) \text{ раз}}} < \\ &< \frac{m \left(1 + \frac{1}{m}\right) + n - m}{n} = 1 + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

А.2. Если одно из чисел m, n равно единице, то неравенство тривиально. Пусть $m \geq 2, n \geq 2$. По неравенству Коши имеем

$$\sqrt[m]{n} = \sqrt[m]{n \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{(m-1) \text{ раз}}} < \frac{n + m - 1}{m},$$

$$\sqrt[n]{m} = \sqrt[n]{m \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{(n-1) \text{ раз}}} < \frac{m + n - 1}{n}.$$

Значит,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{\sqrt[m]{m}} > \frac{m}{n + m - 1} + \frac{n}{n + m - 1} = \frac{m + n}{n + m - 1} > 1.$$

А.3. Воспользуемся неравенством Коши и формулой для суммы членов арифметической прогрессии. Получим

$$\begin{aligned} n! &= n^n \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \right) < \\ &< n^n \left(\frac{1}{(n-1)n} (1+2+\cdots+(n-1)) \right)^{n-1} = \frac{n^n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

А.4. При $k \in 2 : n$ по неравенству Бернулли имеем

$$\sqrt[k]{\frac{k}{k-1}} = \sqrt[k]{1 + \frac{1}{k-1}} < 1 + \frac{1}{(k-1)k}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=2}^n \sqrt[k]{\frac{k}{k-1}} < n-1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k}.$$

Учитывая, что $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, получаем

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Значит,

$$\sum_{k=2}^n \sqrt[k]{\frac{k}{k-1}} < n - \frac{1}{n} < n.$$

А.5. При $a = 0$ данное неравенство выполняется как равенство. Покажем, что при $a > -1$ и $a \neq 0$ неравенство будет строгим.

По неравенству Бернулли имеем

$$\sqrt[n]{1+a} < 1 + \frac{1}{n}a.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n}a}.$$

Отметим, что $(1 + \frac{1}{n}a)(1 - \frac{1}{n}a) < 1$. Значит,

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}a} > 1 - \frac{1}{n}a.$$

В результате получаем

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}} > 1 - \frac{1}{n}a.$$

А.6. По неравенству Коши имеем

$${}^{n+1}\sqrt{a^n} = {}^{n+1}\sqrt{a^n \cdot 1} \leq \frac{na + 1}{n+1}.$$

После возведения в $(n+1)$ -ю степень получим требуемое неравенство.

Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $a = 1$.

А.7. По неравенству Коши имеем

$$a_n + \underbrace{{}^{n-1}\sqrt{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + \dots + {}^{n-1}\sqrt{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}}_{(n-1) \text{ раз}} \geq \\ \geq n \sqrt[n]{a_n (a_1 a_2 \dots a_{n-1})},$$

что равносильно требуемому неравенству.

Неравенство выполняется как равенство тогда и только тогда, когда

$$a_n = {}^{n-1}\sqrt{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}.$$

А.8. Перепишем предложенное неравенство в эквивалентном виде

$$\frac{1}{n}(a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) \geq \sqrt[n]{a_1^n \cdot a_2^n \dots a_n^n}.$$

Имеем частный случай неравенства Коши. Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

А.9. Согласно неравенству Коши имеем

$$1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n} \geq (n+1) \sqrt[n+1]{a^{2(1+2+\dots+n)}} = (n+1)a^n.$$

Неравенство выполняется как равенство только при $a = 1$.

А.10. Левое неравенство следует из неравенства Минковского (1.8), если в нем положить $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$. Правое неравенство является непосредственным следствием неравенства Коши. Оба неравенства выполняются как равенства только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

А.11. Достаточно в неравенстве (2.1) положить $a_k = 1$ при всех $k \in 1 : n$. Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда все b_k равны между собой.

А.12. Согласно неравенству (2.1) имеем

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= \left(\sqrt{b} \frac{a}{\sqrt{b}} + \sqrt{c} \frac{b}{\sqrt{c}} + \sqrt{a} \frac{c}{\sqrt{a}} \right)^2 \leq \\ &\leq (b+c+a) \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \right). \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое неравенство.

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = t\sqrt{b}, \quad \frac{b}{\sqrt{c}} = t\sqrt{c}, \quad \frac{c}{\sqrt{a}} = t\sqrt{a}$$

при некотором $t \in \mathbb{R}$, то есть когда

$$a = tb, \quad b = tc, \quad c = ta.$$

Сложив эти равенства и разделив на $a + b + c$, получим $t = 1$. Значит, равенство в доказанном неравенстве выполняется только тогда, когда $a = b = c$.

А.13. Если одно из чисел a, b, c равно нулю, то неравенство тривиально, так как его правая часть обращается в

ноль. При этом неравенство будет выполняться как равенство, если, по крайней мере, еще одно из оставшихся чисел равно нулю.

Допустим, что все три числа a, b, c положительны. Поделим данное неравенство на произведение abc . Получим эквивалентное неравенство

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq a + b + c.$$

Оно доказывается тем же способом, что и в предыдущей задаче. Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a = b = c$.

А.14. Согласно неравенству (2.1) имеем

$$\begin{aligned} (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 &= \\ &= \left(\sqrt{a_1} \frac{b_1}{\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_2} \frac{b_2}{\sqrt{a_2}} + \dots + \sqrt{a_n} \frac{b_n}{\sqrt{a_n}} \right)^2 \leq \\ &\leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \dots + \frac{b_n^2}{a_n} \right). \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое неравенство.

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $\frac{b_k}{\sqrt{a_k}} = t\sqrt{a_k}$, или $b_k = ta_k$ при всех $k \in 1 : n$ и некотором $t \in \mathbb{R}$.

А.15. Воспользуемся решением предыдущей задачи. Запишем

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k + a_{k+1}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $a_k = t(a_k + a_{k+1})$ при всех $k \in 1 : n$ и некотором $t \in \mathbb{R}$. Сложив эти равенства и поделив результат на сумму $a_1 + a_2 + \dots + a_n$,

получим $t = \frac{1}{2}$. Отсюда следует, что доказанное неравенство выполняется как равенство только тогда, когда все a_k равны между собой.

А.16. Достаточно воспользоваться неравенством из задачи А.14, заменив в нем a_k на $a_k b_k$. Неравенство будет выполняться как равенство только тогда, когда $b_k = t a_k b_k$ при всех $k \in 1 : n$, то есть когда все a_k равны между собой.

А.17. Воспользуемся неравенством из предыдущей задачи. Запишем

$$\begin{aligned} \frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} &\geq \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{a(pb+qc) + b(pc+qa) + c(pa+qb)}. \end{aligned}$$

Знаменатель в правой части этого неравенства приводится к виду

$$(p+q)(ab+bc+ca).$$

Значит, справедливо неравенство

$$\frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(p+q)(ab+bc+ca)}. \quad (\text{А.1})$$

Неравенство (А.1) выполняется как равенство только тогда, когда

$$pb+qc = pc+qa = pa+qb. \quad (\text{А.2})$$

Покажем, что

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca). \quad (\text{А.3})$$

Отсюда и из (А.1) будет следовать требуемое неравенство.

Неравенство (А.3) можно переписать так:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca. \quad (\text{А.4})$$

Справедливость этого неравенства очевидна. Действительно,

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} \geq ab + bc + ca.$$

Неравенство (А.4) выполняется как равенство только тогда, когда $a = b = c$. В этом случае выполняются и условия (А.2).

Установлено, что справедливо неравенство

$$\frac{a}{pb + qc} + \frac{b}{pc + qa} + \frac{c}{pa + qb} \geq \frac{3}{p + q}$$

и что оно выполняется как равенство только тогда, когда $a = b = c$.

А.18. В силу неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned} & (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 = \\ & = [1 \cdot (b_1 + a_1) + 1 \cdot (b_2 + a_2) + \dots + 1 \cdot (b_n + a_n) + \\ & \quad + (-1)(a_1 + a_2 + \dots + a_n)]^2 \leq \\ & \leq (n+1)[(b_1 + a_1)^2 + (b_2 + a_2)^2 + \dots + (b_n + a_n)^2 + \\ & \quad + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2]. \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое неравенство.

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда

$$b_k + a_k = t \quad \text{при } k \in 1 : n,$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = -t.$$

Эти условия можно записать в виде

$$b_k = -a_k - (a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad k \in 1 : n.$$

А.19. Возведем обе части неравенства в квадрат. После

очевидных преобразований придем к эквивалентному неравенству

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}. \quad (\text{A.5})$$

Справедливость последнего неравенства известна (см. (2.4)).

Если все a_k равны нулю, то неравенство выполняется как равенство. Если же не все a_k равны нулю, то неравенство будет выполняться как равенство только тогда, когда $b_k = ta_k$ при всех $k \in 1 : n$ и некотором $t \geq 0$.

A.20. После возведения обеих частей неравенства в квадрат и очевидных преобразований придем к эквивалентному неравенству вида (A.5). Его справедливость известна. Условия выполнения неравенства как равенства такие же, как в предыдущей задаче.

Приложение В

B.1. Простейшим примером функции с требуемым свойством является $f(x) = x^3$.

B.2. Возьмем точки x_0, x_1 из I , $x_0 \neq x_1$, и число $t \in (0, 1)$. В силу строгой выпуклости функций $f_k(x)$ на I при всех $k \in 1 : n$ имеем

$$f_k(tx_1 + (1-t)x_0) < tf_k(x_1) + (1-t)f_k(x_0).$$

Отсюда следует, что

$$f_k(tx_1 + (1-t)x_0) < tF(x_1) + (1-t)F(x_0).$$

Взяв максимум по $k \in 1 : n$, придем к требуемому неравенству

$$F(tx_1 + (1-t)x_0) < tF(x_1) + (1-t)F(x_0).$$

Отметим, что операция взятия поточечного максимума обычно приводит к негладким строго выпуклым функциям. Например, функция

$$f(x) = \max \{(x-1)^2, (x+1)^2\}$$

строго выпукла на $\mathbb{R}$, однако у неё отсутствует производная в точке $x = 0$.

В.3. Имеем

$$(f^n(x))'' = n(n-1)f^{n-2}(f'(x))^2 + nf^{n-1}(x)f''(x).$$

По условию $f(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$. Значит, $(f^n(x))'' > 0$ при всех $x \in (a, b)$. Теорема 2.3 гарантирует строгую выпуклость функции $f^n(x)$ на (a, b) .

В.4. Возьмем точки x_0, x_1 из I , $x_0 \neq x_1$, и число $t \in (0, 1)$. В силу строгой выпуклости функций f и g имеем

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) < tf(x_1) + (1-t)f(x_0);$$

$$g(tx_1 + (1-t)x_0) < tg(x_1) + (1-t)g(x_0).$$

Перемножим эти неравенства. Учитывая положительность функций f и g , получаем

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &< t^2 f(x_1)g(x_1) + (1-t)^2 f(x_0)g(x_0) + \\ &+ t(1-t)[f(x_1)g(x_0) + f(x_0)g(x_1)], \end{aligned} \tag{В.1}$$

где $x = tx_1 + (1-t)x_0$. Теперь воспользуемся одинаковой монотонностью функций f и g . Запишем

$$\begin{aligned} 0 \leq (f(x_1) - f(x_0))(g(x_1) - g(x_0)) &= f(x_1)g(x_1) + f(x_0)g(x_0) - \\ &- [f(x_1)g(x_0) + f(x_0)g(x_1)]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$f(x_1)g(x_0) + f(x_0)g(x_1) \leq f(x_1)g(x_1) + f(x_0)g(x_0). \quad (\text{В.2})$$

Объединив неравенства (В.1) и (В.2), придем к требуемому неравенству. Действительно,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &< t^2 f(x_1)g(x_1) + (1-t)^2 f(x_0)g(x_0) + \\ &+ t(1-t)[f(x_1)g(x_0) + f(x_0)g(x_1)] \leq \\ &\leq t f(x_1)g(x_1) + (1-t)f(x_0)g(x_0). \end{aligned}$$

В.5. Нужно доказать, что

$$\frac{1}{f(tx_1 + (1-t)x_0)} < \frac{t}{f(x_1)} + \frac{1-t}{f(x_0)}, \quad (\text{В.3})$$

где x_0, x_1 — точки из I , $x_0 \neq x_1$, и $t \in (0, 1)$. В силу положительности и строгой вогнутости $f(x)$ на I имеем

$$\frac{1}{f(tx_1 + (1-t)x_0)} < \frac{1}{tf(x_1) + (1-t)f(x_0)}. \quad (\text{В.4})$$

Воспользуемся неравенством между взвешенным средним гармоническим и взвешенным средним арифметическим в форме (3.8). Получим

$$\frac{1}{tf(x_1) + (1-t)f(x_0)} \leq \frac{t}{f(x_1)} + \frac{1-t}{f(x_0)}. \quad (\text{В.5})$$

Объединив (В.4) и (В.5), придем к (В.3).

В.6. Обозначим

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0, \quad y_\beta = \beta y_1 + (1-\beta)y_0,$$

где x_0, x_1, y_0, y_1 — точки, принадлежащие $(0, +\infty)$, $x_0 \neq x_1$, $y_0 \neq y_1$, и α, β — числа из $(0, 1)$. Строгая выпуклость функ-

ций $xf(x)$ и $f(\frac{1}{x})$ на $(0, +\infty)$ характеризуется неравенствами

$$\begin{aligned} x_\alpha f(x_\alpha) &< \alpha x_1 f(x_1) + (1 - \alpha)x_0 f(x_0); \\ f\left(\frac{1}{y_\beta}\right) &< \beta f\left(\frac{1}{y_1}\right) + (1 - \beta)f\left(\frac{1}{y_0}\right). \end{aligned} \quad (\text{В.6})$$

Первое неравенство перепишем в эквивалентном виде

$$f(x_\alpha) < \frac{\alpha x_1}{x_\alpha} f(x_1) + \frac{(1 - \alpha)x_0}{x_\alpha} f(x_0). \quad (\text{В.7})$$

Нужно показать, что из неравенства (В.7) следует (В.6) и наоборот.

Пусть справедливо неравенство (В.7). Возьмем y_0, y_1, β и покажем, что выполняется неравенство (В.6). Положим

$$x_0 = \frac{1}{y_0}, \quad x_1 = \frac{1}{y_1}, \quad \alpha = \frac{\beta y_1}{y_\beta}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \frac{\alpha}{y_1} + \frac{(1 - \alpha)}{y_0} = \frac{\beta}{y_\beta} + \frac{1 - \beta}{y_\beta} = \frac{1}{y_\beta}; \\ \frac{\alpha x_1}{x_\alpha} &= \frac{\beta y_1 x_1}{y_\beta x_\alpha} = \beta, \quad \frac{(1 - \alpha)x_0}{x_\alpha} = 1 - \beta. \end{aligned}$$

Теперь видно, что из неравенства (В.7) следует (В.6).

Аналогично доказывается и обратная импликация. Предположим, что справедливо неравенство (В.6). Возьмем x_0, x_1, α и покажем, что выполняется неравенство (В.7). Положим

$$y_1 = \frac{1}{x_1}, \quad y_0 = \frac{1}{x_0}, \quad \beta = \frac{\alpha x_1}{x_\alpha}.$$

В этом случае

$$y_\beta = \frac{\beta}{x_1} + \frac{1 - \beta}{x_0} = \frac{\alpha}{x_\alpha} + \frac{1 - \alpha}{x_\alpha} = \frac{1}{x_\alpha}.$$

Теперь неравенство (В.7) следует из (В.6).

В.7. Левое неравенство следует из неравенства Йенсена, если учесть, что в данном случае

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = f\left(\frac{x_1 + x_n}{2}\right).$$

Правое неравенство основано на обращении неравенства Йенсена. Положим

$$m = x_1, \quad M = x_n, \quad t_k = \frac{1}{n} \text{ при всех } k \in 1 : n.$$

Отметим, что

$$\hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{x_1 + x_n}{2}.$$

Так как точки x_k при $k \in 2 : n - 1$ отличны и от m , и от M , то в силу теоремы 3.3 получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) < \\ & < \frac{1}{x_n - x_1} \left[\left(x_n - \frac{x_1 + x_n}{2} \right) f(x_1) + \left(\frac{x_1 + x_n}{2} - x_1 \right) f(x_n) \right] = \\ & = \frac{1}{2} (f(x_1) + f(x_n)). \end{aligned}$$

В.8. Обозначим

$$m = 0, \quad M = \sum_{k=1}^n x_k, \quad t_k = \frac{1}{n} \text{ при всех } k \in 1 : n.$$

Вычислим

$$\hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n} M.$$

Отметим, что указанные в формулировке числа x_i , x_j не совпадают ни с m , ни с M . По теореме 3.3 об обращении неравенства Йенсена получаем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) < \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(m) + \frac{1}{n} f(M).$$

Остается умножить это неравенство на n и вспомнить определение m и M .

В.9. Обозначим

$$A = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_k = \frac{a_k}{A}, \quad x_k = \frac{b_k}{a_k}.$$

После деления требуемого неравенства на A^2 и извлечения квадратного корня придем к эквивалентному неравенству

$$\sqrt{1 + \sum_{k=1}^n (t_k x_k)^2} \leq \sum_{k=1}^n t_k \sqrt{1 + x_k^2}. \quad (\text{В.8})$$

Отметим, что функция $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ строго выпукла на $\mathbb{R}$. В терминах этой функции неравенство (В.8) можно переписать так:

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k). \quad (\text{В.9})$$

Неравенство (В.9) справедливо как неравенство Йенсена для строго выпуклой функции $f(x)$, если учесть, что все t_k положительны и в сумме равны единице. Неравенство (В.9) (а значит, и требуемое неравенство) выполняется как равенство только тогда, когда все x_k равны между собой, то есть когда $b_k = \lambda a_k$ при всех $k \in 1 : n$ и некотором $\lambda > 0$.

В.10. Введем функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}.$$

Её производная имеет вид

$$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Она строго возрастает на полуоси $(0, +\infty)$. По теореме 2.2 функция $f(x)$ является строго выпуклой на $(0, +\infty)$.

Положим $x_k = a_k^2$. По неравенству Йенсена имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - a_k \right) &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \geq n f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right) = \\ &= n f\left(\frac{1}{n} \right) = n \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = (n-1)\sqrt{n}.\end{aligned}$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда все x_k равны между собой, то есть при $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Список литературы

1. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986.
2. Седракян Н. М., Авоян А. М. Неравенства. Методы доказательства. М.: Физматлит, 2002.
3. Иванов О. А. Избранные главы элементарной математики. СПб.: Издательство СПбГУ, 1995.
4. Курляндчик Л., Файбусович А. История одного неравенства // Квант, 1991. № 4. С. 14–18.
5. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М.: Наука, 1970.
6. Протасов В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. М.: Издательство МЦНМО, 2005.
7. Малозёмов В. Н. Неравенства и экстремальные задачи / Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 4 сентября 2014 г.
(<http://apmath.spbu.ru/cnsa/rep14.shtml#0904>)
8. Малозёмов В. Н., Тамасян Г. Ш. Лемма Гиббса и её приложения / Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 10 октября 2017 г.
(<http://apmath.spbu.ru/cnsa/rep17.shtml#1010>)
9. Малозёмов В. Н. О теореме Гермейера / Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 28 марта 2019 г.
(<http://apmath.spbu.ru/cnsa/rep19.shtml#0328>)
10. Журнал «Квант» (регулярно публикуются материалы о неравенствах и экстремальных задачах).