ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

В. Н. Малозёмов

1°. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} f(x) := c[N] \times x[N] &\to \inf, \\ A[M_1, N] \times x[N] &\geqslant b[M_1], \\ A[M_2, N] \times x[N] &= b[M_2], \\ x[N_1] &\geqslant \mathbb{O}[N_1], \end{aligned} \tag{1}$$

где $N_1 \subset N$. Вектор x, удовлетворяющий ограничениям задачи (1), называется *планом*. Множество планов обозначим Ω. Требуется найти *оптимальный план* — вектор $x^* \in \Omega$, на котором целевая функция $f(x)$ принимает наименьшее на Ω значение.

ТЕОРЕМА 1. *Оптимальный план существует тогда и только тогда, когда множество планов Ω непусто и целевая функция $f(x)$ ограничена снизу на Ω.*

2°. Обозначим $M = M_1 \cup M_2$, $N_2 = N \setminus N_1$ и запишем двойственную задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} g(u) := b[M] \times u[M] &\to \sup, \\ u[M] \times A[M, N_1] &\leqslant c[N_1], \\ u[M] \times A[M, N_2] &= c[N_2], \\ u[M_1] &\geqslant \mathbb{O}[M_1]. \end{aligned} \tag{2}$$

Множество планов задачи (2) обозначим Λ.

ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ. *Из существования оптимального плана у одной из двойственных задач* (1), (2) *следует существование оптимального плана и у другой задачи. При этом справедливо соотношение двойственности*

$$\min_{x \in \Omega} f(x) = \max_{u \in \Lambda} g(u).$$

СЛЕДСТВИЕ. *Для того чтобы планы $x_0 \in \Omega$, $u_0 \in \Lambda$ двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x_0) = g(u_0)$.*

3°. Обычно исследуется пара двойственных задач линейного программирования и результаты формулируются одновременно для прямой и двойственной задач.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы обе задачи* (1) *и* (2) *имели оптимальные планы, необходимо и достаточно, чтобы множества их планов Ω и Λ были непусты.*

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ. *Планы x_0, u_0 двойственных задач* (1) *и* (2) *являются оптимальными тогда и только тогда, когда выполняются условия дополнительности*

$$\begin{aligned} &u_0[i] \times (A[i,N] \times x_0[N] - b[i]) = 0 \quad \forall i \in M_1, \\ &(c[j] - u[M] \times A[M,j]) \times x_0[j] = 0 \quad \forall j \in N_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Условия дополнительности (3) можно переписать в любой из двух эквивалентных форм (они называются рабочими формами):

$$\begin{aligned} &u_0[M] \times A[M,j] = c[j], \text{ если } x_0[j] > 0, \ j \in N_1, \\ &u_0[i] = 0, \text{ если } A[i,N] \times x_0[N] > b[i], \ i \in M_1; \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &A[i,N] \times x_0[N] = b[i], \text{ если } u_0[i] > 0, \ i \in M_1, \\ &x_0[j] = 0, \text{ если } u_0[M] \times A[M,j] < c[j], \ j \in N_1. \end{aligned}$$

4°. Доказательства всех приведённых утверждений имеются в книге [1, с. 10–34].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.