Отметим некоторые свойства подвекторов и подматриц.

1°. Пусть $N_1 \subset N$, $N_2 = N \setminus N_1$. Тогда

$$c[N] \times x[N] = c[N_1] \times x[N_1] + c[N_2] \times x[N_2].$$

Действительно,

$$c[N] \times x[N] = \sum_{j \in N} c[j] \times x[j] = \Big(\sum_{j \in N_1} + \sum_{j \in N_2} \Big) c[j] \times x[j] = \\ = c[N_1] \times x[N_1] + c[N_2] \times x[N_2].$$

2°. Пусть $N_1 \subset N$, $N_2 = N \setminus N_1$. Тогда

$$A[M,N] \times x[N] = A[M,N_1] \times x[N_1] + A[M,N_2] \times x[N_2]. \quad (1)$$

Аналогично, если $M_1 \subset M$, $M_2 = M \setminus M_1$, то

$$u[M] \times A[M,N] = u[M_1] \times A[M_1,N] + u[M_2] \times A[M_2,N]. \quad (2)$$

Проверим, например, равенство (1). При всех $k \in M$ имеем

$$A[k,N] \times x[N] = \sum_{j \in N} A[k,j] \times x[j] = \Big(\sum_{j \in N_1} + \sum_{j \in N_2} \Big) A[k,j] \times x[j] = \\ = A[k,N_1] \times x[N_1] + A[k,N_2] \times x[N_2].$$

Это равносильно (1).

Если учесть, что индексное множество есть объединение всех своих элементов, то в качестве следствия из (1) и (2) получаем важные формулы

$$Ax = \sum_{j \in N} A[M,j] \times x[j] = \sum_{j \in N} x[j] A[M,j], \\ uA = \sum_{k \in M} u[k] \times A[k,N].$$

Они означают, что вектор Ax равен линейной комбинации столбцов $A[M,j]$ матрицы A с коэффициентами $x[j]$, а вектор uA — линейной комбинации строк $A[k,N]$ матрицы A с коэффициентами $u[k]$.

3°. Справедливо равенство

$$A[M,N] \times B[N,P] = \sum_{j \in N} A[M,j] \times B[j,P]. \quad (3)$$

Оно проверяется непосредственным сравнением элементов с индексами (k,i) матриц, стоящих в левой и правой частях равенства (3).

При всей своей простоте формула (3) весьма содержательна. Она указывает на то, что произведение AB можно представить в виде суммы матриц, каждая из которых является произведением столбца матрицы A на соответствующую строку матрицы B.

4°. Пусть $N_1 \subset N$, $M_1 \subset M$. Тогда

$$E[N_1, N] \times x[N] = x[N_1], \tag{4}$$
$$u[M] \times E[M, M_1] = u[M_1]. \tag{5}$$

Таким образом, выделение подвектора — это линейная операция.

Проверим, например, равенство (4). Обозначим $N_2 = N \setminus N_1$. Согласно (1) имеем

$$E[N_1, N] \times x[N] = E[N_1, N_1] \times x[N_1] + E[N_1, N_2] \times x[N_2] =$$
$$= E[N_1, N_1] \times x[N_1] = x[N_1].$$

Аналогично, со ссылкой на формулу (2), доказывается равенство (5).

5°. Справедливо равенство

$$u[M] \times \big(A[M, N] \times x[N]\big) = \big(u[M] \times A[M, N]\big) \times x[N],$$

которое коротко можно переписать так:

$$\langle u, Ax \rangle = \langle uA, x \rangle. \tag{6}$$

Действительно,

$$\langle u, Ax \rangle = \sum_{k \in M} u[k] \times \big(A[k, N] \times x[N]\big) =$$
$$= \sum_{k \in M} u[k] \times \Big(\sum_{j \in N} A[k, j] \times x[j]\Big) = \sum_{k \in M} \sum_{j \in N} u[k] \times A[k, j] \times x[j],$$
$$\langle uA, x \rangle = \sum_{j \in N} \big(u[M] \times A[M, j]\big) \times x[j] =$$
$$= \sum_{j \in N} \Big(\sum_{k \in M} u[k] \times A[k, j]\Big) \times x[j] = \sum_{j \in N} \sum_{k \in M} u[k] \times A[k, j] \times x[j].$$

В правых частях двух последних равенств стоят повторные суммы, различающиеся лишь порядком суммирования. Они равны. Значит, равны и левые части.

Отметим, что векторы uA и $A^T u$ имеют одинаковые компоненты. Поэтому $\langle uA, x \rangle = \langle A^T u, x \rangle$. Равенство (6) можно переписать в виде

$$\langle u, Ax \rangle = \langle A^T u, x \rangle.$$