

Новый алгоритм решения системы линейных неравенств, основанный на ускоренном фейеровском процессе поиска неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений. Ч. 1*

В. И. Ерохин¹, Г. Ш. Тамасян^{1,2}

¹ Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Российская Федерация, 197082, Санкт-Петербург, Ждановская ул., 13

² Институт проблем машиноведения РАН, Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., д. 61

Для цитирования: Ерохин В. И., Тамасян Г. Ш. Новый алгоритм решения системы линейных неравенств, основанный на ускоренном фейеровском процессе поиска неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений. Ч. 1 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 202X. Т. X. Вып. X. С. ??-??. <https://doi.org/10.21638/spbu01....>

Представлен новый алгоритм решения системы линейных неравенств, использующий ускоренный фейеровский процесс поиска неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений. В данной статье — первой части — приведено теоретическое обоснование алгоритма и результаты предварительного (иллюстративного) вычислительного эксперимента на системе неравенств средней размерности с реальными промышленными данными. Результаты эксперимента демонстрируют работоспособность предлагаемого алгоритма и более высокую скорость сходимости (оцениваемую по затрачиваемому времени и по числу выполненных итераций) по сравнению с тремя основными вариантами «классических» фейеровских алгоритмов решения систем линейных неравенств, основанных на стратегиях *взвешенного*, *последовательного* и *экстремального* объединения фейеровских отображений проектирования на полупространства, соответствующие индивидуальным неравенствам исследуемой системы неравенств. Более детальное экспериментальное исследование предлагаемого алгоритма будет выполнено во второй части статьи.

Ключевые слова: фейеровские процессы, системы линейных уравнений и неравенств.

Введение. Поиск эффективных алгоритмов решения систем линейных неравенств по-прежнему актуален (см., например [1]). Особое место при решении систем линейных неравенств занимают итерационные алгоритмы, построенные на фейеровских отображениях (фейеровские алгоритмы). Отображения указанного класса являются обобщением сжимающих отображений, в которых понятие *неподвижной точки* расширяется до *множества неподвижных точек*, а понятие *сходимости к точке* эволюционирует до *сходимости к множеству*.

Фейеровские алгоритмы обладают рядом положительных особенностей, среди которых:

- простой итерационный шаг, не требующий одномерного поиска, обращения матриц или решения вспомогательных оптимизационных задач;
- возможность декомпозиции и организации параллельных вычислений при решении задач большой размерности;
- глобальная линейная сходимость;
- устойчивость к ошибкам округления, самоисправляемость;
- возможность обработки динамических (изменяющихся во времени) данных;
- возможность адаптации к решению широкого круга задач, в том числе поиска псевдорешений несовместных систем линейных уравнений, неравенств и несобственных задач математического программирования.

К сожалению, в дополнение к представленной характеристике, необходимо отметить медленную сходимость фейеровских алгоритмов. Акцент на эту особенность в публикациях обычно не делается. Но ее можно проследить по опубликованным экспериментальным значениям времени счета и количества итераций (см., например [2–8]). Таким образом, проблема ускорения сходимости является актуальной для данного класса алгоритмов.

Определенные положительные результаты по ускорению сходимости были получены в работе [9] в виде нового фейеровского алгоритма поиска неотрицательного решения системы

*Результаты исследований, представленные в п. 4, получены за счет гранта Российского научного фонда № 23-41-00060, <https://rscf.ru/project/23-41-00060/>, в Институте проблем машиноведения Российской академии наук.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2025

линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Алгоритм был теоретически обоснован и на модельных и реальных примерах продемонстрировал более быструю сходимость по сравнению со своим прототипом – фейеровским алгоритмом, основанным на операциях положительной срезки и ортогонального проектирования на множество решений СЛАУ.

В настоящей работе мы выполним адаптацию указанного алгоритма к решению системы линейных неравенств. Основой данной адаптации будет служить сведение задачи решения системы неравенств к задаче поиска неотрицательного решения СЛАУ специального вида.

1. Постановка задачи. Пусть дана система линейных неравенств

$$Ax \leq b, \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $0 < \text{rank } A \leq n < m$.

Целью исследования является построение алгоритма решения системы (1), относящегося к классу фейеровских алгоритмов и обладающий в данном классе более высокой скоростью сходимости.

2. Общие сведения. (см. [10–12]) Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi : D \rightarrow D$ – некоторое отображение. Обозначим через M множество неподвижных точек отображения φ , т. е.

$$M = \{x \in D \mid \varphi(x) = x\}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Отображение φ называется M -фейеровским, если множество M непусто и выполняется строгое неравенство

$$\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\| \quad \forall x \in D \setminus M, \forall y \in M. \quad (2)$$

В неравенстве (2) и далее во всем тексте статьи будем считать, что символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова векторная норма. Класс M -фейеровских отображений обозначим через \mathcal{F}_M .

Рассмотрим последовательность $\{x^k\}$, которая строится по правилу

$$\begin{aligned} & \circ x^0 \in D \setminus M; \\ & \circ x^{k+1} = \varphi(x^k), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Правило (3) является принципиальной схемой M -фейеровского алгоритма (и соответствующего итерационного фейеровского процесса), построенного с помощью отображения $\varphi(x)$.

Напомним несколько свойств M -фейеровских отображений (и соответствующих итерационных процессов). Пусть последовательность $\{x^k\}$ построена по правилу (3) с помощью отображения $\varphi \in \mathcal{F}_M$.

Свойство 1. Если $\{x^k\} \cap M = \emptyset$, то $x^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y \in M$. Иначе найдется такое $K \in \mathbb{N}$, что $x^k \in M$ при всех $k \geq K$.

Свойство 2. Отображение вида $\lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)x$ является M -фейеровским при $\lambda \in (0, 1)$.

Свойство 3. Пусть φ_i соответствующие M_i -фейеровские отображения, $i = 1 : m$, множество $M = \bigcap_{i=1:m} M_i$ непусто. Отображения вида

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i=1:m} \lambda_i \varphi_i(x) \quad \text{при } \lambda_i > 0, \quad \sum_{i=1:m} \lambda_i = 1, \\ \varphi(x) &= \varphi_1(\varphi_2(\dots \varphi_m(x) \dots)), \end{aligned}$$

являются M -фейеровскими.

3. Базовые конструкции фейеровских отображений для решения систем линейных неравенств. Представим систему (1) в виде совокупности отдельных неравенств. Обозначим i -ю строку матрицы A через a_i , $i = 1 : m$. Тогда система неравенств (1) примет вид

$$a_i x \leq b_i, \quad i = 1 : m.$$

Каждое неравенство в этой системе определяет полупространство $L_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i x \leq b_i\}$. Следуя логике работ (см. [10, 11]), введем отображения

$$\varphi_i(x) = x - \lambda_i \frac{[a_i x - b_i]_+}{\|a_i\|^2} \cdot a_i^\top, \quad \lambda_i \in (0, 2), \quad (4)$$

где символом $[\cdot]_+$ обозначена операция положительной срезки, $i = 1 : m$. Отображение (4) является L_i -фейеровским и, вместе с отображением *экстремального проектирования* (о нем будет сказано ниже) и отображениями, соответствующими Свойствам 2 и 3, составляет основу

базовых конструкций фейеровских отображений для решения систем линейных неравенств. Традиционно в качестве данных конструкций называют отображения *взвешенного, последовательного* и *экстремального* проектирования:

$$\varphi^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x), \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad (5)$$

$$\varphi^{(2)}(x) = \varphi_1(\varphi_2(\dots \varphi_m(x) \dots)), \quad (6)$$

$$\varphi^{(3)}(x) = \varphi_{i_*}(x), \quad (7)$$

где индекс $i_* \in 1:m$, такой что $[a_{i_*}x - b_{i_*}]_+ = \max_{i \in 1:m} [a_i x - b_i]_+$.

4. Сведение задачи поиска решения системы линейных неравенств к задаче поиска решения системы линейных алгебраических уравнений с условием неотрицательности.

Исходная система неравенств (1) может быть сведена к системе равенств за счет введения дополнительной переменной $u \in \mathbb{R}_+^m$, где \mathbb{R}_+^m — неотрицательный ортант m -мерного вещественного пространства:

$$Ax = b - u, \quad u \geq 0. \quad (8)$$

Мы не будем останавливаться на системе (8), а, проделав некоторые выкладки, придем к эквивалентной (8), но менее распространенной форме СЛАУ с условием неотрицательности, впервые, по-видимому, представленной в работах [13, 14].

Пусть система (8) совместна. Запишем ее нормальное (относительно x) решение

$$x = A^+(b - u), \quad (9)$$

где $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — псевдообратная матрица. Объединяя (8) и (9), получим

$$AA^+(b - u) = b - u, \quad u \geq 0. \quad (10)$$

Утверждение 1. Поиск произвольного решения системы неравенств (1) эквивалентен решению задачи (10), в том смысле, что если вектор $u^* \in \mathbb{R}_+^m$ — некоторое решение системы (10), то вектор

$$x^* = A^+(b - u^*) \quad (11)$$

— решение системы (1).

Доказательство. Пусть $u^* \in \mathbb{R}_+^m$ — решение системы (10). Умножим на матрицу A обе части равенства (11) слева. Учитывая (10) и неотрицательность вектора u^* , получим

$$Ax^* = AA^+(b - u^*) = b - u^* \leq b.$$

Следовательно, вектор x^* — решение исходной системы неравенств (1). ■

Перепишем систему (10) в виде СЛАУ с неизвестным неотрицательным вектором u :

$$Pu = h, \quad u \geq 0, \quad (12)$$

где

$$P = I_m - AA^+ \quad (13)$$

— проектор в линейное подпространство, являющееся ортогональным дополнением линейного подпространства столбцов матрицы A , I_m — единичная матрица порядка m ,

$$h = Pb. \quad (14)$$

Таким образом, исходная задача (1) сведена к задаче (12), для которой в работе [9] был разработан новый вариант фейеровского отображения. Далее, учитывая специфику свойств матрицы P и вектора правых частей h системы (12), будет осуществлен перенос основных результатов работы [9].

В последующих выкладках будут использованы тождества

$$PA = 0, \quad A^+P = 0, \quad (15)$$

$$P^\top = P, \quad P^+ = P, \quad (16)$$

$$P \cdot P = P, \quad (17)$$

в справедливости которых можно убедиться с помощью уравнений Мура – Пенроуза (см. [16, с. 38], [17, § 2.6.1, § 5.5.4]), а также условия совместности систем, альтернативных (1) и (12) (см., например, [15, 18, 19]).

В соответствии с теоремой Александрова – Фань-Цзи, система, альтернативная (1), имеет вид

$$q^\top A = \mathbf{0}, \quad q^\top b > 0, \quad q \leq \mathbf{0}. \quad (18)$$

В соответствии с леммой Минковского – Фаркаша, система, альтернативная (12), имеет вид

$$z^\top P \leq \mathbf{0}, \quad z^\top h > 0. \quad (19)$$

Лемма 1. Если $z \in \mathbb{R}^m$ — решение системы (19), то

$$q = Pz \quad (20)$$

— решение системы (18). Справедливо и обратное утверждение, а именно, если q решение системы (18), то $z = Pq$ — решение системы (19).

Доказательство. Пусть z решение системы (19). Покажем, что $q = Pz$ — решение системы (18). Действительно,

$$\begin{aligned} q^\top A &= z^\top PA \stackrel{(15)}{=} \mathbf{0}, \\ q^\top b &= z^\top Pb \stackrel{(14)}{=} z^\top h \stackrel{(19)}{>} 0, \\ q &= Pz = (z^\top P)^\top \stackrel{(19)}{\leq} \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается и обратное утверждение. ■

Положим

$$r_u = h - Pu. \quad (21)$$

Лемма 2. Если $r_u \leq \mathbf{0}$ и $h^\top r_u > 0$, то система (12) несовместна.

Доказательство. Для системы (12) сопоставим альтернативную вида $P^\top z \leq \mathbf{0}$, $h^\top z > 0$ (см. (19)). Воспользуемся леммой Минковского – Фаркаша. Покажем, что при выполнении условий леммы, вектор $z_* = r_u$ является решением альтернативной системы. Действительно, в силу (14), (16) и (17), имеем

$$\begin{aligned} P^\top z_* &= Pr_u = P(h - Pu) = h - Pu = r_u \leq \mathbf{0}, \\ h^\top z_* &= h^\top r_u > 0. \end{aligned}$$

Что и требовалось показать. ■

Следствие 1. Если $h \leq \mathbf{0}$ и $h \neq \mathbf{0}$, то система (12) несовместна.

Замечание 1. Очевидно, что если $h = \mathbf{0}$, то $u = \mathbf{0}$ — решение системы (12).

Объединяя утверждения лемм 1 и 2 заключаем, что справедливо

Утверждение 2. Системы (1) и (12) разрешимы или неразрешимы одновременно, а их решения и решения соответствующих альтернативных систем связаны соотношениями соответственно (11) и (20).

5. Фейеровское отображение, связанное с задачей поиска неотрицательного решения СЛАУ специального вида. В работе [9] был предложен алгоритм фейеровского типа для нахождения решения системы

$$Ax = b, \quad x \geq \mathbf{0} \quad (22)$$

(с числом уравнений не больше числа неизвестных). Указанный алгоритм был основан на X_+ -фейеровском отображении вида

$$\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x) := |x + \lambda A^+ r_x| : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n, \quad (23)$$

где $X_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq \mathbf{0}\}$, $r_x := b - Ax$, $\lambda \in (0, 2)$ — параметр релаксации, $|\cdot|$ — поэлементная операция взятия абсолютной величины.

Перенесем предложенные в работе [9] идеи на систему (12). Введем множество

$$U_+ := \{u \in \mathbb{R}^m \mid Pu = h, u \geq 0\}$$

и отображение

$$\mathcal{A}_{U_+}^\lambda(u) := |u + \lambda r_u| : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m. \quad (24)$$

Отображение $\mathcal{A}_{U_+}^\lambda(u)$ является специальным случаем отображения $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x)$. Чтобы убедиться в этом, сопоставим системы (12) и (22), формулы (23) и (24). Для применения отображения $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x)$ к системе (12) заменяем x на u , r_x на r_u и A^+ на P^+ . В результате получим

$$\mathcal{A}_{U_+}^\lambda(u) = |u + \lambda P^+ r_u| : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m. \quad (25)$$

Подстановка в формулу (25) тождеств (16) и (17) завершает выкладки, превращая (25) в формулу (24).

Поскольку отображение $\mathcal{A}_{U_+}^\lambda(u)$ является специальным случаем отображения $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x)$, справедливо

Утверждение 3 ([9]). *Отображение $\mathcal{A}_{U_+}^\lambda(u)$ принадлежит к классу \mathcal{F}_{U_+} при всех $\lambda \in (0, 2)$.*

С учетом утверждений 2 и 3 отображение $\mathcal{A}_{U_+}^\lambda(u)$ может быть использовано для конструирования алгоритма, осуществляющего поиск решения системы неравенств (1). Рассмотрим последовательность $\{u^k\}$, построенная по правилу

$$\begin{aligned} & \circ u^0 \in \mathbb{R}_+^m \setminus U_+; \\ & \circ u^{k+1} = \mathcal{A}_{U_+}^\lambda(u^k), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть $\rho(u, U_+) := \inf_{v \in U_+} \|u - v\|$. В силу Леммы Хоффмана (см. [11, с. 130], [18, упр. 4.121, с. 83], [19, § 2.5]) справедливо условие

$$\rho(u, U_+) \leq C \|P\| \|r_u\| \quad \text{для всех } u \in \text{con}v\{u^k\},$$

где константа C (константа Хоффмана) зависит только от матрицы P .

Следующая теорема («перенесенная» с отображения $\mathcal{A}_{X_+}^\lambda(x)$ на отображение $\mathcal{A}_{U_+}^\lambda(u)$) утверждает, что соответствующий итерационный процесс имеет линейную скорость сходимости.

Теорема 1 ([9]). *Пусть последовательность $\{u^k\}$ соответствует правилу (26). Тогда справедливо неравенство*

$$\rho(u^{k+1}, U_+) \leq \Theta \rho(u^k, U_+), \quad (27)$$

где

$$0 \leq \Theta = \left(1 + \frac{\lambda(\lambda - 2)}{C^2 \gamma^2}\right)^{1/2} < 1, \quad (28)$$

$$\gamma = \|P\|. \quad (29)$$

Замечание 2. В формулах работы [9], соответствующих формулам (28) и (29), фигурирует евклидова матричная норма. Однако оценки, получаемые с помощью неравенства (27), можно сделать более точными, вычисляя для Θ спектральную норму. Обозначим указанную норму символом $||| \cdot |||$. При $0 < \text{rank } A \leq n < m$ справедливо условие $\gamma = |||P||| = 1$, поскольку матрица P является проектором, $P \neq 0$ и собственные значения P принимают только два значения 0 и 1 (см., например [16, с. 36]).

6. Построение алгоритма решения системы линейных неравенств. В этом параграфе мы займемся конструктивным построением итерационного вычислительного алгоритма решения системы (1). «Классическая» схема подобного алгоритма, как известно, должна содержать: 1) этап *инициализации* (задание исходных данных, вычисление скалярных, векторных и матричных объектов, используемых алгоритмом, но остающихся в ходе его работы неизменными), 2) *Общий шаг*, содержащий повторяющиеся вычисления объектов необходимой размерности, используемых алгоритмом и изменяющихся в ходе его работы. Оба этапа обязаны содержать процедуры проверки *условий остановки* вычислений (прекращения работы алгоритма): (а) решение задачи (с заданной точностью) найдено; (б) задача не имеет решения; (с) превышено допустимое количество шагов алгоритма (допустимое время).

Заметим также, что вид используемых алгоритмом векторно-матричных формул, как и сам набор используемых «рабочих» векторов и матриц, вычисляемых алгоритмом и хранимых в оперативной памяти компьютера, как правило, может быть оптимизирован, и, следовательно, может (и будет) отличаться от используемых при теоретическом (принципиальному) описании и обосновании алгоритма. Указанное замечание в полной мере применимо к рассматриваемому в данной работе алгоритму, принципиальное описание элементов которого (в виде формулы (14) для вектора h и формулы (21) для вектора r_u) содержит матрицу $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Анализ соотношения (13), определяющего матрицу P , показывает, что явно вычислять и хранить в оперативной памяти указанную матрицу нецелесообразно, а используемый в (24) вектор r_u , заданный формулой (21), а также вектор h , заданный формулой (14), следует вычислять, используя матрицы A , A^+ , имеющие меньшие размерности ($m \times n$ и, соответственно, $n \times m$).

Рассмотрим данный вопрос более подробно. Положим

$$\hat{x} = A^+ b. \quad (30)$$

Тогда, в силу (13), (14) и (30), получим

$$h = b - A\hat{x}, \quad (31)$$

$$A^+ h = A^+ P b = 0. \quad (32)$$

Заметим, что в терминах векторов \hat{x} и h удобно сформулировать условие совместности системы (1), дополняющее условие несовместности, декларируемое следствием 1.

Утверждение 4. Если $h = 0$, то система (1) совместна, а вектор \hat{x} является ее решением, при котором все неравенства системы (1) выполняются в форме равенств.

Продолжим выкладки, направленные на создание требуемых векторов и вывод матрично-векторных соотношений, с использованием которых будет построен «оптимизированный» алгоритм решения системы (1). В отличие от формул (30), (31), описывающих неизменные в процессе работы алгоритма векторные объекты (очевидно соответствующие этапу инициализации), представим теперь формулы для объектов «общего шага».

Пусть на шаге с номером $k \geq 1$ известен неотрицательный вектор $u^k \in \mathbb{R}^m$. Введем в рассмотрение векторы

$$g^k = A^+ u^k, \quad (33)$$

$$s^k = h + A g^k, \quad (34)$$

$$r^k = s^k - u^k. \quad (35)$$

Сравним векторы r_u и r^k (см., формулы (21) и (35)). В силу (33)–(35) и (13) имеем

$$r^k \stackrel{(35)}{=} s^k - u^k \stackrel{(34)}{=} h + A g^k - u^k \stackrel{(33)}{=} h + A A^+ u^k - u^k \stackrel{(13)}{=} h - P u^k. \quad (36)$$

Таким образом, формулы (21) и (35) эквивалентны в том смысле, что $r_u = r^k$ при $u = u^k$. Данный факт позволяет использовать лемму 2 для записи критерия остановки алгоритма по условию обнаружения несовместности системы (1): если выполнены условия

$$r^k \leq 0, \quad h^\top r^k > 0, \quad (37)$$

то система (1) несовместна.

Положим

$$x = \hat{x} - g^k. \quad (38)$$

Покажем теперь, что векторы s^k и x , позволяют сформулировать критерий остановки алгоритма по достижению решения системы (1) и предъявить указанное решение. Пусть выполняется условие

$$s^k \geq 0. \quad (39)$$

Тогда вектор s^k является решением системы (12). Действительно, используя выражения (34), (15), (31) и (14), получим

$$P s^k \stackrel{(34)}{=} P(h + A g^k) \stackrel{(15)}{=} P h \stackrel{(31)}{=} P(b - A \hat{x}) \stackrel{(15)}{=} P b \stackrel{(14)}{=} h.$$

Но тогда, в силу утверждения 1 и формул (11), (30)–(34) и уравнений Мура – Пенроуза решение системы (1) имеет вид

$$x^* \stackrel{(11)}{=} A^+(b - s^k) \stackrel{(30),(34)}{=} \hat{x} - A^+(h + AA^+u^k) \stackrel{(32)}{=} \hat{x} - A^+u^k \stackrel{(33)}{=} \hat{x} - g^k,$$

что соответствует формуле (38).

Заметим, что вектор s^k может быть использован для пошагового контроля процесса решения системы (1). Предположим (в действительности мы этого делать не будем), что k -м на шаге алгоритма по формуле (38) вычисляется вектор x^k , который будем считать приближением к решению x^* системы (1). Невязка системы (1), соответствующая вектору x^k , в силу (12), (13), (14), (33) и (34) имеет вид

$$[Ax^k - b]_+ = [AA^+(b - s^k) - b]_+ = [-s^k]_+.$$

Объединяя представленные выше результаты (в частности, утверждение 4), получаем следующий алгоритм.

Алгоритм решения системы неравенств (1)

И н и ц и а л и з а ц и я. Вычислить матрицу A^+ , вектор \hat{x} по формуле (30) и вектор h по формуле (31).

- (а) Если $h = \mathbf{0}$, то $x^* = \hat{x}$ — решение системы (1), работу алгоритма закончить.
- (б) Если $h \neq \mathbf{0}$ и $h \leq \mathbf{0}$, то система (1) несовместна, работу алгоритма закончить.

Задать вектор $u^0 \in \mathbb{R}_+^m$ и параметр релаксации $0 < \lambda < 2$.

О б щ и й ш а г . Пусть уже имеется k -е приближение u^k , $k = 1, 2, \dots$

- (с) Вычислить вектор g^k по формуле (33) и вектор s^k по формуле (34). Если выполнено условие (39), то $x^* = \hat{x} - g^k$ — решение системы (1), работу алгоритма закончить.
- (б) Вычислить вектор r^k по формуле (35). Если выполнены условия (37), то система (1) несовместна, работу алгоритма закончить.
- (с) Положить $u^{k+1} = |u^k + \lambda r^k|$.

Замечание 3. Отметим, что окончание вычислений в приведенном алгоритме связано либо с нахождением решения системы (1), либо с нахождением решения альтернативной системы (18). Действительно, в силу (14), (16) и (17), условие $h \neq \mathbf{0}$ можно переписать в виде

$$0 < h^\top h = (Pb)^\top (Pb) = b^\top Pb = h^\top b.$$

В то же время, $h^\top A = \mathbf{0}$ (см. (32)). Таким образом, выполнение на шаге инициализации условий $h \leq \mathbf{0}$, $h \neq \mathbf{0}$ означает, что вектор h — решение системы (18), альтернативной системе (1).

Аналогичная ситуация и на общем шаге алгоритма. Напомним, что $r^k = r(u^k)$ (см. (36)). Пусть $r^k \leq \mathbf{0}$ и $h^\top r^k > 0$. В силу Леммы 1 при $z = r^k = P(b - u^k)$ получим, что вектор $q = Pr^k = P(b - u^k) = r^k$ является решением системы (18), альтернативной системе (1).

7. Вычислительный эксперимент. Вычислительный эксперимент, в ходе которого с помощью алгоритмов, основанных на отображениях (5)–(7), а также нового алгоритма, основанного на отображении (24), осуществлялся поиск решения системы неравенств (1), носил предварительный (иллюстративный характер).

Целью эксперимента было убедиться в работоспособности нового алгоритма и получить данные для сравнения показателей скорости сходимости рассматриваемых алгоритмов: времени (T), затрачиваемого алгоритмами, а также вида «пошаговой сходимости» алгоритмов — экспериментальных зависимостей величин $\delta(x^k)$ от номера шага k , где

$$\delta(x) := \max_{i \in 1:m} [a_i x - b_i]_+$$

— ℓ_∞ -норма невязки системы (1), достигающаяся на векторе x . Для алгоритма, основанного на отображении (6) (стратегия последовательного проектирования) «шагом» считаем выполнение последовательности проекций на все полупространства исследуемой системы неравенств.

Эксперименты проводились в среде MATLAB® (версия R2022b), функционирующей под управлением операционной системы Майкрософт® Windows® 10 (версия 21H2). Компьютер, на котором проводились вычисления, имел следующие характеристики: процессор Intel® Core™ i5-10400F CPU (2.90 GHz, 6 ядер, 12 потоков), оперативная память — 16 ГБ.

Исследуемая система неравенств была основана на реальных данных материального баланса химического предприятия. Параметры решаемой задачи были следующими: $n = 136$, $m = 285$, $b = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$, система (1) — совместна. Для всех исследуемых алгоритмов выбиралось одинаковое начальное приближение $u^0 = 10 \cdot b$. Значения параметров релаксации в отображении (24) и во всех отображениях вида (4) были одинаковыми: $\lambda = \lambda_i = 1.6$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

Результаты вычислительных экспериментов представлены на рисунке.

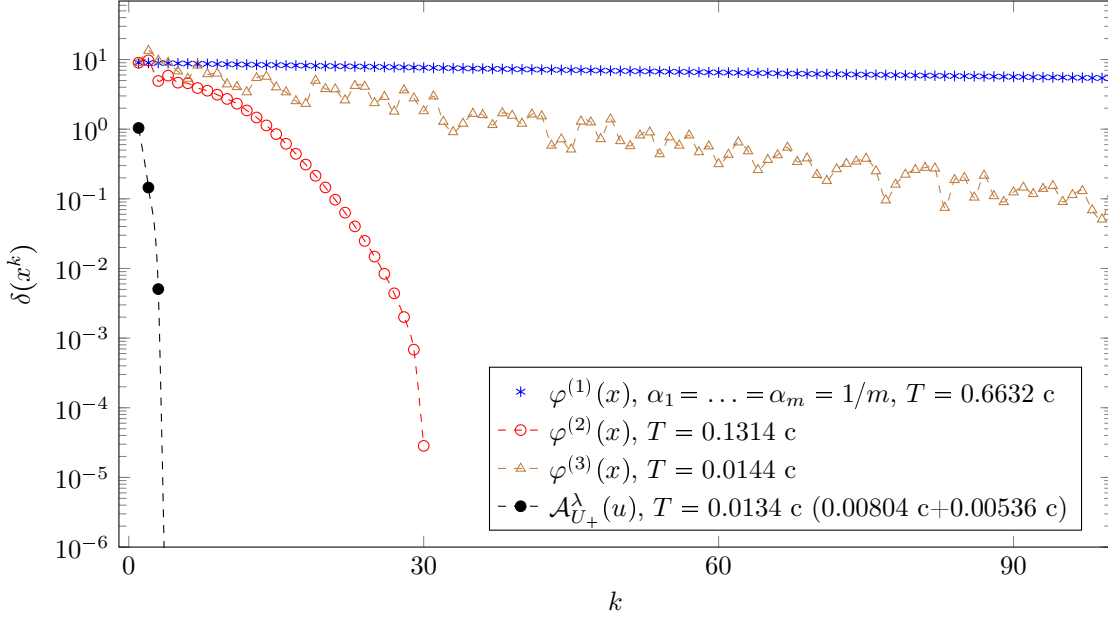


Рис. Пошаговые ℓ_∞ -нормы невязок системы (1) с реальными данными, полученные алгоритмами, основанными на отображениях (5)–(7) и (24).

Приведенные графики свидетельствуют о работоспособности нового алгоритма и его существенно более быстрой «пошаговой сходимости» по сравнению с алгоритмами, основанными на отображениях (5)–(7). При этом общее время (T), затраченное новым алгоритмом, оказалось сопоставимым со временем, затрачиваемым алгоритмом, основанным на отображении (7) (стратегия *экстремального* проектирования). Числа, приведенные в скобках, детализируют общее время, затраченное новым алгоритмом: первое число — время, затраченное на вычисление матрицы A^+ (использовалась основанная на построении сингулярного разложения матрицы A функция MATLAB® `pinv` с параметром допуска `tol` = 10^{-8}). Второе число — время, затраченное на все остальные вычислительные операции.

8. Заключение. В работе получено теоретическое обоснование нового алгоритма решения систем линейных неравенств и предварительные результаты его тестирования на реальной задаче средней размерности.

Во второй части статьи будут представлены результаты расширенных численных экспериментов. В частности, предполагается рассмотреть случаи, когда размерность пространства, содержащего полиэдр $X_\leq := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, варьируется в широком диапазоне значений (от 10^2 до 10^6), а сам полиэдр при этом обладает разными геометрическими свойствами: пуст или непуст, является ограниченным или неограниченным, одноэлементным, телесным, предельно узким с неравномерно вытянутыми координатами и т. п.

Также будут исследованы разные подходы по решению системы (8) (с проектированием на неотрицательный ортант только дополнительных переменных и подход, представленный в данной работе) с учетом влияния обусловленности соответствующих матриц.

Благодарность. Авторы хотели бы поблагодарить рецензентов за ценные замечания, идеи и рекомендации (в том числе касающиеся принципов организации предстоящих вычислительных экспериментов).

Список литературы

- [1] *Евтушенко Ю.Г., Третьяков А.А.* Локально полиномиальный метод решения систем линейных неравенств // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 2. С. 216–220.
- [2] *Бердникова Е.А., Попов Л.Д.* О применении декомпозиции при реализации фейеровских методов решения больших систем неравенств на МВС–100 // *Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: Сб. науч. тр. / Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2000. Вып. 4. С. 51–62.*
- [3] *Еремин И.И., Соколинская И.М.* Фейеровские итерационные процессы для несобственных задач линейного программирования // *Математические структуры и моделирование.* 2002. Вып. 9. С. 1–17.
- [4] *Еремин И.И., Попов Л.Д.* Параллельные фейеровские методы для сильно структурированных систем линейных неравенств и уравнений // *Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: Сб. науч. тр. / Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2003. Вып. 6. С. 57–82.*
- [5] *Бердникова Е.А., Еремин И.И., Попов Л.Д.* Распределенные фейеровские процессы для систем линейных неравенств и задач линейного программирования // *Автомат. и телемех.* 2004. № 2. С. 16–32.
- [6] *Ершова А.В., Соколинская И.М.* Параллельный алгоритм решения задачи сильной отделимости на основе фейеровских отображений // *Выч. мет. программирование.* 2011. Т. 12. Вып. 4. С. 423–434.
- [7] *Нурминский Е.А.* Фейеровские алгоритмы с адаптивным шагом // *Журн. вычисл. математики* 2011. Т. 51. № 5. С. 791–801.
- [8] *Васин В.В.* Итерационные процессы фейеровского типа в задаче условной квадратичной минимизации // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2023. Т. 29. № 3. С. 26–41.
- [9] *Ерохин В.И., Тамасян Г.Ш., Степенко Н.А.* Ускоренный фейеровский процесс поиска неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2025. Т. 31, № 3. С. 121–137.
- [10] *Еремин И.И.* Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: УрО РАН, 1998. 248 с.
- [11] *Васин В.В., Еремин И.И.* Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 200 с.
- [12] *Еремин И.И.* Фейеровские методы для задач выпуклой и линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. 199 с.
- [13] *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Отыскание нормальных решений в задачах линейного программирования // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2000. Т. 40. № 12. С. 1766–1786.
- [14] *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Применение теорем об альтернативах к нахождению нормальных решений линейных систем // *Изв. вузов. Матем.* 2001. № 12. С. 21–31.
- [15] *Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г.* Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2003. Т. 43. № 3. С. 354–375.
- [16] *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с.
- [17] *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
- [18] *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991. 448 с.
- [19] *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.* Линейное программирование. М.: МЦНМО, 2020. 412 с.

Статья поступила в редакцию 202X г.

Статья принята к печати 202X г.

Ерохин Владимир Иванович — д-р физ.-мат. наук, проф.;
<https://orcid.org/0000-0002-1760-7859>, erohin_v_i@mail.ru

Тамасян Григорий Шаликович — канд. физ.-мат. наук, доц.;
<https://orcid.org/0000-0002-5138-8610>, g.tamasyan@ya.ru

A new algorithm for solving a system of linear inequalities based on the accelerated Fejér process for finding a non-negative solution to a system of linear algebraic equations. Part 1[†]

V. I. Erokhin¹, G. Sh. Tamasyan^{1,2}

¹ Mozhaiskiy Space Military Academy, 13, Zhdanovskaya st., St. Petersburg 197082, Russian Federation

² Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, 61, Bolshoj prosp., V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Erokhin V. I., Tamasyan G. Sh. A new algorithm for solving a system of linear inequalities based on the accelerated Fejér process for finding a non-negative solution to a system of linear algebraic equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 202X, vol. XX, issue X, pp. 00-00. <https://doi.org/10.21638/spbu01....> (In Russian)

A new algorithm for solving a system of linear inequalities using the accelerated Fejér process of searching for a non-negative solution to a system of linear algebraic equations is presented. This article, the first part, presents the theoretical justification of the algorithm and the results of a preliminary (illustrative) computational experiment on a system of medium-dimensional inequalities with real industrial data. The experimental results demonstrate the operability of the proposed algorithm and a higher convergence rate (estimated by the time spent and the number of iterations performed) compared to the three main variants of the “classical” Fejér algorithms for solving systems of linear inequalities based on the strategies of *weighted*, *sequential* and *extreme* combining Fejér algorithms. projection mappings into half-spaces corresponding to the individual inequalities of the inequality system under study. A more detailed experimental study of the proposed algorithm will be performed in the second part of the article.

Keywords: Fejér-type processes, systems of linear equations and inequalities.

References

1. Evtushenko Y.G., Tret'yakov A.A. Locally Polynomial Method for Solving Systems of Linear Inequalities. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 2, pp. 222–226. <https://doi.org/10.1134/S0965542520020050>
2. Berdnikova L.D., Popov L.D. On Using Decomposition in Realization of the Fejér Methods for Solving Large Systems of Linear Inequalities on MVS-100. *Algoritmy i Prog. Sredstva Paral. Vych.: sb. nauch. trudov*, Yekaterinburg, IMM UrO RAN, 2000, vol. 4, pp. 51–62. (in Russian)
3. Eremin I.I., Sokolinskaya I.M. Fejér iterative processes for improper linear programming problems. *Mat. Struktury i modelirovaniye*, 2002, vol. 9, pp. 1–17. (in Russian)
4. Eremin I.I., Popov L.D. Parallel Fejér methods for strongly structured systems of linear inequalities and equations. *Algoritmy i Prog. Sredstva Paral. Vych.: sb. nauch. trudov*, Yekaterinburg, IMM UrO RAN, 2003, vol. 6, pp. 57–82. (in Russian)
5. Berdnikova E.A., Eremin I.I., Popov L.D. Distributed Fejér processes for systems of linear inequalities and problems of linear programming. *Automat. Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 2, pp. 168–183. <https://doi.org/10.1023/B:AURC.0000014714.97496.79>
6. Ershova A.V., Sokolinskaya I.M. A parallel algorithm for solving strong separability problem on the basis of Fejér mappings. *Vych. Metody Prog.*, 2011, vol. 12, no. 4, pp. 423–434. (in Russian)
7. Nurminski E.A. Fejér algorithms with an adaptive step. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 5, pp. 741–750. <https://doi.org/10.1134/S0965542511050137>
8. Vasin V.V. Fejér-type iterative processes in the constrained quadratic minimization problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2023, vol. 323, suppl. 1, pp. S305–S320. <https://doi.org/10.1134/S008154382306024X>

[†]The results of Sec. 4 were obtained within the RSF grant No 23-41-00060, <https://rscf.ru/project/23-41-00060/>, and performed at the Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences.

9. Erokhin V.I., Tamasyan G.Sh., Stepenko N.A. An accelerated Fejér-type process for finding a non-negative solution to a system of linear algebraic equations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 3, pp. 121–137.
10. Eremin I.I. *Theory of linear optimization*. VSP. Utrecht, Boston, Keln, Tokio, 2002, 248 p. Original Russian text was published in Eremin I.I. *Teoriya lineinoi optimizatsii*, Yekaterinburg, Izd-vo UrO RAN, 1998, 247 p.
11. Vasin V.V., Eremin I.I. *Operators and Iterative Processes of Fejér Type. Theory and Applications*. Inverse and Ill-Posed Problems Series, Walter de Gruyter: Berlin, New York, 2009, 155 p. <https://doi.org/10.1515/9783110218190>. Original Russian text was published in Vasin V.V., Eremin I.I. *Operatory i iteratsionnye protsessy feierovskogo tipa. Teoriya i prilozheniya*, Izhevsk, Regul. Khaot. Dinamika, 2005, 200 p.
12. Eremin I.I. *Feyyeroyskiye metody dlya zadach vypukloy i lineynoy optimizatsii* [Fejér methods for problems of convex and linear optimization]. Chelyabinsk, Izd. tsentr YuUrGU, 2009, 199 p. (in Russian)
13. Golikov A.I., Evtushenko Yu.G. Search for normal solutions in linear programming problems. *Comput. Math. Math. Phys.* 2000, vol. 40, no. 12, pp. 1694–1714.
14. Golikov A.I., Evtushenko Yu.G. Application of theorems on the alternative to the determination of normal solutions of linear systems. *Russian Math. (Iz. VUZ)*. 2001, vol. 45, no. 12, pp. 18–28.
15. Golikov A.I., Evtushenko Yu.G. Theorems on alternatives and their application to numerical methods. *Comput. Math. Math. Phys.* 2003, vol. 43, no. 3, pp. 338–358.
16. Albert A. *Regression and the Moore – Penrose pseudoinverse*. London, New York, Academic Press, 1972, 180 p. Translated to Russian under the title *Regressiya, pseudoinversiya i rekurrentnoye otsenivaniye*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 224 p.
17. Golub G.H., Van Loan Ch.F. *Matrix computations*, 3rd ed. Baltimore, London, the John Hopkins Univ. Press, 1996, 728 p. Translated to Russian under the title *Matrichnyye vychisleniya*, Moscow, Mir Publ., 1999, 548 p.
18. Ashmanov S.A., Timokhov A.V. *Teoriya optimizatsii v zadachakh i uprazhneniyakh* [Optimization theory in problems and exercises]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 448 p. (in Russian)
19. Vasil'ev F.P., Ivanitskii A.Yu. *Linejnoe programmirovaniye* [Linear programming]. Moscow, MCNMO, 2020, 412 p. (in Russian)

Received:, 202X.

Accepted:, 202X.

A u t h o r ' s I n f o r m a t i o n :

Vladimir I. Erokhin — <https://orcid.org/0000-0002-1760-7859>; erohin_v_i@mail.ru

Grigoriy Sh. Tamasyan — <https://orcid.org/0000-0002-5138-8610>; g.tamasyan@ya.ru