ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

В.Н. Малозёмов *(Санкт–Петербург, профессор, математико–механический факультет СПбГУ, v.malozemov@spbu.ru)*

Экстремальные задачи (задачи о наибольших и наименьших величинах) во все времена вызывали живой интерес. Для их решения разрабатывались новые методы, которые способствовали развитию всей математики. Постепенно формировалась общая теория экстремальных задач. Центральное место в ней занимают необходимые условия оптимальности. Эти условия вместе с теоремой существования обычно позволяют находить решение экстремальной задачи (либо в аналитическом виде, либо с помощью численных методов). Логика при таком подходе простая. Решение задачи, существование которого мы доказали, удовлетворяет необходимому условию оптимальности. Если при анализе необходимого условия выясняется, что ему удовлетворяет только один элемент, то этот элемент и будет единственным решением исходной задачи.

При всем богатстве теории экстремальных задач не нужно забывать, что существует другой, элементарный, подход, основанный на определении экстремума. Скажем, требуется найти наибольшее значение функции $f(x)$ по всем x из некоторого множества P. Если удастся найти константу M, такую, что $f(x) \le M$ при всех x из P, и указать элемент x_0 из P, на котором $f(x_0) = M$, то x_0 – точка максимума. Таким образом, дело сводится к доказательству неравенств и выяснению, когда неравенства выполняются как равенства. При этом условия, когда неравенства выполняются как равенства, в некотором смысле заменяют необходимые условия оптимальности.

Указанным методом можно решить, например, следующую задачу:

найти наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$$

при ограничении $ax^2 \ge y$*. Здесь* $a > 0$ *– параметр.*

Систематическому изучению второго подхода посвящена недавно опубликованная книга [1]. Имеется видео–презентация этой книги: http://hdl.handle.net./11701/23765.

К элементарным обычно относят те методы, которые используют неравенства между средними величинами, неравенство Коши–Буняковского и неравенство Йенсена для строго выпуклых функций одной переменной. Элементарное решение допускает, например, такая задача:

найти прямоугольный параллелепипед наибольшего объема при заданной площади его полной поверхности.

Больше задач можно найти в статье [2] и книге [3].

Литература

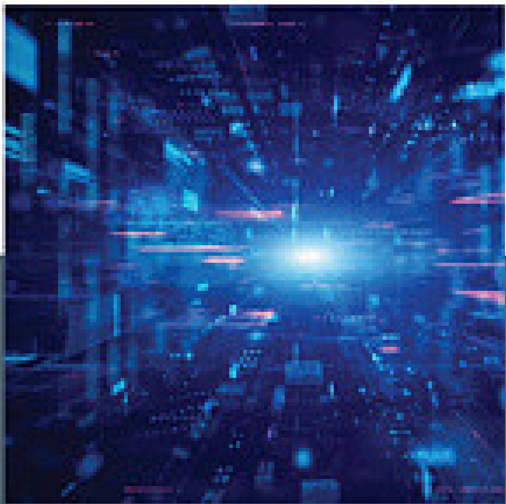
1. *Малозёмов В.Н.*, *Машарский С.М.* Элементарные методы в экстремальных задачах. СПб.: Издательство ВВМ, 2021. 160 с.

2. *Малозёмов В.Н.* Неравенства и экстремальные задачи // Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть первая. Под редакцией проф. В.Н. Малозёмова. СПб.: Издательство ВВМ, 2017. С.413–423.

3. *Седракян Н.М.*, *Авоян А.М.* Неравенства. Методы доказательства. М.: Физматлит, 2002. 256 с.

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ



В. Н. Малоземов
С. М. Машарский

ЛАНЬ

E.LANBOOK.COM