УДК 519.8

Б. Ф. Митчелл, В. Ф. Демьянов,
В. Н. Малоземов

НАХОЖДЕНИЕ БЛИЖАЙШЕЙ К НАЧАЛУ КООРДИНАТ ТОЧКИ МНОГОГРАННИКА

1. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n задано конечное множество точек $H=\{z_i\}_{i=1}^s$. Обозначим через L выпуклую оболочку, натянутую на точки z_i:

$$L=\left\{z=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i z_i \mid \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{s}\alpha_i=1\right\}.$$

Очевидно, L является ограниченным замкнутым выпуклым множеством. Через z^* будем обозначать ближайшую к началу координат точку множества L

$$(z^*, z^*)=\min_{z \in L}(z, z).$$

Нашей целью является описание одного нового метода последовательных приближений для нахождения точки z^*.

2. Нетрудно показать, что точка z^* существует и единственна. Кроме того, для любого $z \in L$ выполняется неравенство (см., например, [1], стр. 780)

$$(z, z^*) \geqslant (z^*, z^*). \tag{1}$$

Положим

$$\delta(z)=(z, z)-\min_{i \in [1:s]}(z_i, z).$$

Поскольку для любых v, $z \in L$ будет

$$(v, z) \geqslant \min_{i \in [1:s]}(z_i, z), \tag{2}$$

то $\delta(z) \geqslant 0$, если $z \in L$.

Из (1) и (2) непосредственно следует также

Лемма 1. *Для любого $z \in L$ выполняется неравенство*

$$\|z-z^*\| \leqslant \min\left\{\sqrt{\delta(z)}, \ \|z\|\right\}. \tag{3}$$

Следствие 1. Если последовательность точек $v_k \in L$, $k=0, 1, 2, \ldots$, такова, что $\delta(v_k)\xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, то

$$v_k \xrightarrow[k \to \infty]{} z^*.$$

Следствие 2. Если последовательность точек $v_k \in L$, $k=0, 1, 2, \ldots$, такова, что $\|v_{k+1}\| \leqslant \|v_k\|$ и существует подпоследовательность $\{v_{k_j}\}$, для которой $\delta(v_{kj})\xrightarrow[j \to \infty]{} 0$, то $v_k \xrightarrow[k \to \infty]{} z^*$.

Справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы точка* $\bar{z}\in L$ *была ближайшей к началу координат точкой множества* L, *необходимо и достаточно, чтобы* $\delta(\bar{z})=0$.

Доказательство. Достаточность следует из (3). Необходимость. Пусть $\bar{z}=z^*$. Тогда, во-первых, $\delta(z^*)\geqslant 0$. С другой стороны, в силу (1) для любого $i\in[1:s]$ будет $(z_i, z^*)\geqslant(z^*, z^*)$, ибо $z_i\in H\subset L$. Отсюда $\min\limits_{i\in[1:s]}(z_i, z^*)\geqslant(z^*, z^*)$, или, что то же самое, $\delta(z^*)\leqslant 0$. Значит, $\delta(z^*)=0$. Теорема доказана.

3. Обозначим через Ξ множество векторов A вида

$$A=(\alpha_1, \ldots, \alpha_s);\ \alpha_i\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{s}\alpha_i=1.$$

Положим

$$z(A)=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i z_i;$$

$$\Delta(A)=\max_{\{i\,|\,\alpha_i>0\}}(z_i, z(A))-\min_{i\in[1:s]}(z_i, z(A)). \tag{4}$$

Через $i'=i'(A)$ обозначим индекс, на котором достигается максимум в правой части (4) (если таких индексов несколько, берем любой из них). Таким образом, $\alpha_{i'}>0$ и $(z_{i'}, z(A))=\max\limits_{\{i\,|\,\alpha_i>0\}}(z_i, z(A))$.

Лемма 2. *Для любого вектора* $v=z(A)$, $A\in\Xi$, *справедливы неравенства* $\alpha_{i'}\Delta(A)\leqslant\delta(v)\leqslant\Delta(A)$.

Доказательство. Заметим, что

$$(v, v)=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(z_i, z(A))\leqslant\max_{\{i\,|\,\alpha_i>0\}}(z_i, z(A)).$$

Отсюда следует неравенство $\delta(v)\leqslant\Delta(A)$. Обозначим через $z_{i''}$, $i''=i''(A)$, точку множества H, для которой

$$(z_{i''}, z(A))=\min_{i\in[1:s]}(z_i, z(A)).$$

В этом случае

$$\Delta(A)=(z_{i'}-z_{i''}, z(A)). \tag{5}$$

Положим $\bar{A}=\{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_s\}\in\Xi$, где

$$\bar{\alpha}_i=\begin{cases}\alpha_i & \text{для } i\neq i', i'';\\ 0 & \text{для } i=i';\\ \alpha_{i'}+\alpha_{i''} & \text{для } i=i''.\end{cases}$$

Очевидно,

$$z(\bar{A})=z(A)+\alpha_{i'}(z_{i''}-z_{i'}). \tag{6}$$

Поскольку $z(\bar{A})\in L$, то имеем в силу (2)

$$(z(\bar{A}), z(A))\geqslant\min_{i\in[1:s]}(z_i, z(A)). \tag{7}$$

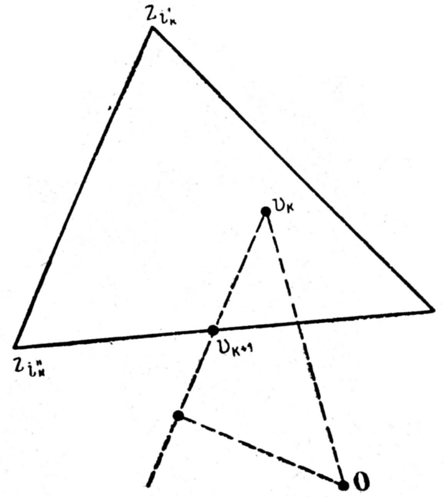
Учитывая (7), (6) и (5), получим $\delta(z(A))\geqslant\alpha_{i'}\Delta(A)$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы точка* $v=z(A)$, $A\in\Xi$, *была ближайшей к началу координат точкой множества* L, *необходимо и достаточно, чтобы* $\Delta(A)=0$.

Доказательство очевидным образом следует из леммы 2 и теоремы 1.

4. Опишем теперь метод последовательных приближений для нахождения точки z^*. Выберем произвольным образом вектор $A_0 \in \Xi$ и положим $v_0 = z(A_0)$. Пусть уже найдено k-е приближение $v_k \in L$: $v_k = z(A_k)$, $A_k = (\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_s^{(k)}) \in \Xi$. Опишем построение v_{k+1}.

Прежде всего найдем векторы $z_{i'_k}$ и $z_{i''_k}$ из H такие, что



$$\left(z_{i'_k}, v_k\right) = \max_{\{i \mid \alpha_i^{(k)} > 0\}} (z_i, z(A_k)),$$

$$\left(z_{i''_k}, v_k\right) = \min_{i \in [1:s]} (z_i, z(A_k)).$$

В этом случае

$$\Delta_k \overset{\text{def}}{=} \Delta(A_k) = \left(z_{i'_k} - z_{i''_k}, v_k\right). \tag{8}$$

Рассмотрим отрезок

$$v_k(t) = v_k + t\alpha_{i'_k}^{(k)} \left(z_{i''_k} - z_{i'_k}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{9}$$

Пусть t_k, $0 \leqslant t_k \leqslant 1$, определяется соотношением

$$(v_k(t_k), v_k(t_k)) = \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} (v_k(t), v_k(t)).$$

Положим $v_{k+1} = v_k(t_k)$ (см. рисунок). Нетрудно проверить, что $v_{k+1} = z(A_{k+1})$, где

$$A_{k+1} = \left(\alpha_1^{(k+1)}, \ldots, \alpha_s^{(k+1)}\right) \in \Xi,$$

$$\alpha_i^{(k+1)} = \begin{cases} \alpha_i^{(k)} & \text{для } i \neq i'_k, i''_k; \\ \alpha_{i'_k}^{(k)} - t_k \alpha_{i'_k}^{(k)} & \text{для } i = i'_k; \\ \alpha_{i''_k}^{(k)} + t_k \alpha_{i'_k}^{(k)} & \text{для } i = i''_k. \end{cases}$$

В дальнейшем для простоты будем использовать следующие обозначения: $\alpha'_k = \alpha_{i'_k}^{(k)}$, $z'_k = z_{i'_k}$, $\bar{z}_k = z_{i''_k}$.

Продолжая описанный процесс, получим последовательность точек $v_k \in L$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, причем

$$\|v_{k+1}\| \leqslant \|v_k\|. \tag{10}$$

Лемма 3. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{k \to \infty} \alpha'_k \Delta_k = 0. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, во-первых, что в силу (8) и (9) будет

$$(v_k(t), v_k(t)) = (v_k, v_k) - 2t\alpha'_k \Delta_k + t^2 (\alpha'_k \|\bar{z}_k - z'_k\|)^2. \tag{12}$$

Допустим, что утверждение леммы не имеет места. Тогда найдется подпоследовательность $\{v_{k_j}\}$, для которой $\alpha'_{k_j} \Delta_{k_j} \geqslant \varepsilon > 0$. Имеем в силу (12) для всех $t \in [0, 1]$ равномерно по k_j

$$\left(v_{k_j}(t), v_{k_j}(t)\right) \leqslant \left(v_{k_j}, v_{k_j}\right) - 2t\varepsilon + t^2 d^2,$$

Положим $H_1=\{z_i \in H \mid (z_i, z^*)=(z^*, z^*)\}$; $H_2=H\setminus H_1=\{z_i \in H \mid (z_i, z^*) > (z^*, z^*)\}$. Если H_2 — пустое множество, то $v_k \in G$ для всех $k=0, 1, 2, \ldots$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что H_2 — непустое множество. Введем обозначение

$$\tau=\min_{z_i \in H_2} (z_i, z^*)-(z^*, z^*)>0.$$

Поскольку $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} z^*$, то для достаточно больших номеров $k \geqslant k_0$ будет

$$\max_{i\in[1:s]} |(z_i, v_k)-(z_i, z^*)|<\frac{\tau}{4}.$$

Нетрудно показать, что для тех же $k \geqslant k_0$ выполняются соотношения

$$(z_i, v_k)\leqslant(z^*, z^*)+\frac{\tau}{4}, \text{ если } z_i \in H_1;$$

$$(z_i, v_k)\geqslant(z^*, z^*)+\frac{3\tau}{4}, \text{ если } z_i \in H_2.$$

Отсюда следует, что

$$\min_{i\in[1:s]} (z_i, v_k)=\min_{z_i\in H_1} (z_i, v_k). \tag{18}$$

Далее, если в представление v_k, $k\geqslant k_0$, точка $z_i \in H_2$ входит с ненулевым коэффициентом, то

$$\Delta_k \geqslant \tau/2, \tag{19}$$

причем

$$\|v_{k+1}\|<\|v_k\|. \tag{20}$$

Пусть

$$v_k=\sum_{\{i\mid z_i\in H_1\}} \alpha_i^{(k)} z_i+\sum_{\{i\mid z_i\in H_2\}} \alpha_i^{(k)} z_i.$$

В силу определения H_1 и τ

$$(v_k-z^*, z^*)=\sum_{\{i\mid z_i\in H_2\}} \alpha_i^{(k)}(z_i-z^*, z^*)\geqslant\tau \sum_{\{i\mid z_i\in H_2\}} \alpha_i^{(k)}.$$

Поскольку левая часть этого неравенства стремится к нулю при $k\to\infty$, то

$$\sum_{\{i\mid z_i\in H_2\}} \alpha_i^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Выберем столь большое $k_1\geqslant k_0$, чтобы для $k\geqslant k_1$ выполнялось неравенство

$$\sum_{\{i\mid z_i\in H_2\}} \alpha_i^{(k)} \leqslant \frac{\tau}{2d^2}, \tag{21}$$

где $d=\max_{z_i\in H_1,\ z_j\in H_2} \|z_i-z_j\|>0$. Обозначим через $\overline{t}_k$ точку, в которой $(v_k(t), v_k(t))$ достигает глобального минимума. Если в представление v_k, $k\geqslant k_1$, входит с ненулевым коэффициентом $z_i \in H_2$, то в силу (19) и (21) получим

$$\overline{t}_k=\frac{\Delta_k}{\alpha_k'\|\overline{z}_k-z_k'\|^2}\geqslant\frac{\tau}{2\left(\sum\limits_{\{i\mid z_i\in H_2\}} \alpha_i^{(k)}\right)d^2}\geqslant 1.$$

Отсюда следует, что

$$v_{k+1}=v_k+\alpha_k'(\overline{z}_k-z_k'). \tag{22}$$

Допустим, что в представление всех векторов

$$v_{k_1},\ v_{k_1+1},\ v_{k_1+2},\ \ldots \tag{23}$$

входят с ненулевым коэффициентом точки $z_i \in H_2$. В силу (22) в последовательности (23) лишь конечное число попарно различных элементов. Это, однако, противоречит (20). Итак, найдется точка $v_{\bar{k}}$, $\bar{k} \geqslant k_1$, для которой будет иметь место представление

$$v_{\bar{k}} = \sum_{\{i \mid z_i \in H_1\}} \alpha_i^{(\bar{k})} z_i; \quad \alpha_i^{(\bar{k})} \geqslant 0, \quad \sum_{\{i \mid z_i \in H_1\}}' \alpha_i^{(\bar{k})} = 1.$$

В силу (18) аналогичное представление имеют все v_k для $k \geqslant \bar{k}$. В частности, для $k \geqslant \bar{k}$ по определению H_1 будет $(v_k, z^*) = (z^*, z^*)$, т. е. $v_k \in G$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{k \to \infty} \Delta_k = 0.$$

Доказательство. Если $z^* = \mathbf{0}$, то утверждение теоремы следует из определения Δ_k и того, что $\|v_k\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. Поэтому будем считать, что $z^* \neq \mathbf{0}$. В силу теоремы 4 для $k \geqslant \bar{k}$ будет

$$\Delta_k \leqslant \max_{\{i \mid z_i \in H_1\}} (z_i, v_k) - \min_{\{i \mid z_i \in H_1\}} (z_i, v_k).$$

Правая часть этого неравенства по определению H_1 стремится к нулю при $k \to \infty$. Значит, и $\Delta_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, ибо $\Delta_k \geqslant 0$. Теорема доказана.

6. Положим

$$\tilde{\Delta}_k = \Delta_k / \|v_k\|^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Если $v_k = \mathbf{0}$, то по определению считаем, что $\tilde{\Delta}_k = \infty$.

Теорема 6. *Для того чтобы начало координат принадлежало множеству L, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнялось неравенство*

$$\tilde{\Delta}_k \geqslant 1. \tag{24}$$

Доказательство. Необходимость. Имеем $z^* = \mathbf{0}$. Учитывая, что $v_k \in L$, получим на основании лемм 1 и 2

$$\tilde{\Delta}_k = \frac{\Delta_k}{\|v_k\|^2} \geqslant \frac{\delta(v_k)}{\|v_k\|^2} \geqslant 1.$$

Достаточность. Допустим, что $z^* \neq \mathbf{0}$. Тогда $\tilde{\Delta}_k \leqslant \Delta_k / \|z^*\|^2$. В силу теоремы 5 получим $\tilde{\Delta}_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, что противоречит (24). Теорема доказана.

Итак, если $z^* = \mathbf{0}$, то $\|v_k\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ и при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $\tilde{\Delta}_k \geqslant 1$. Если же $z^* \neq \mathbf{0}$, то $\|v_k\| \geqslant \|z^*\|$ и $\tilde{\Delta}_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.

Если при некотором k выполнилось неравенство $\tilde{\Delta}_k < 1$, то в силу теоремы 6 начало координат не принадлежит множеству L. Более того, нетрудно показать, что в этом случае гиперплоскость $(v_k, z) - (v_k, \bar{z}_k) = 0$ строго отделяет начало координат от множества L.

7. Напомним, что $v_k = z(A_k)$, $A_k \in \Xi$. Положим $I_k = \{i \mid \alpha_i^{(k)} > 0\}$. Введем множество

$$B_k = \left\{ z = z_{i_0} + \sum_{\substack{i \in I_k \\ i \neq i_0}} \alpha_i (z_i - z_{i_0}) \mid \alpha_i \in (-\infty, \infty) \right\}.$$

Здесь i_0 — произвольный индекс из I_k. Обозначим через $\tilde{v}_k$ вектор из B_k с наименьшей нормой: $\|\tilde{v}_k\| = \min\limits_{z \in B_k} \|z\|$. Заметим, что точка $\tilde{v}_k \in B_k$ единственна, хотя неединственным может быть ее представление в виде

$$\tilde{v}_k = z_{i_0} + \sum_{\substack{i \in I_k \\ i \neq i_0}} \tilde{\alpha}_i (z_i - z_{i_0}).$$

Нетрудно показать, что числа $\tilde{\alpha}_i$ являются решением следующей линейной системы:

$$\left(z_{i_0} + \sum_{\substack{i \in I_k \\ i \neq i_0}} \alpha_i (z_i - z_{i_0}),\ z_j - z_{i_0} \right) = 0; \quad j \in I_k, \quad j \neq i_0. \tag{25}$$

Теорема 7. *Существует бесконечная подпоследовательность векторов $\{\tilde{v}_{k_j}\}$ такая, что для всех k_j будет $\tilde{v}_{k_j} = z^*$.*

Доказательство. Будем считать, что $z^* \neq \mathbf{0}$ (если $z^* = \mathbf{0}$, то доказательство лишь упрощается). Выделим вначале такую подпоследовательность $\{v_{k_j}\}$, чтобы

1) $\alpha_i^{(k_j)} \xrightarrow[j \to \infty]{} \alpha_i^*$, $i \in [1:s]$, в этом случае

$$v_{k_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} z^* = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^* z_i;$$

2) $v_{k_j} \in G$ (см. теорему 4).

Положим $I^* = \{i \mid \alpha_i^* > 0\}$. Очевидно, что при достаточно больших k_j будет

$$I^* \subset I_{k_j}. \tag{26}$$

В дальнейшем только такие k_j и рассматриваются. Через L^* обозначим выпуклую оболочку, натянутую на точки z_i, $i \in I^*$. Очевидно, $z^* \in L^*$. Через L_{k_j} обозначим выпуклую оболочку, натянутую на z_i, $i \in I_{k_j}$. В силу 2), (26) и определения множества B_{k_j} имеем

$$L^* \subset L_{k_j} \subset B_{k_j} \subset G.$$

Далее, $\|z^*\| = \min\limits_{z \in G} \|z\| \leqslant \min\limits_{z \in B_{k_j}} \|z\|$. Поскольку $z^* \in L^*$, то $z^* \in B_{k_j}$. Значит, $\|z^*\| = \min\limits_{z \in B_{k_j}} \|z\|$.

Учитывая, что точка множества B_{k_j}, имеющая наименьшую норму, единственна, получаем $\tilde{v}_{k_j} = z^*$. Теорема доказана.

На основании этой теоремы можно утверждать, что нахождение z^* сводится к решению конечного числа систем линейных уравнений вида (25). Заметим, что решать эти системы целесообразно лишь для тех k, для которых величины $\|v_k\|$ или $\tilde{\Delta}_k$ достаточно малы.

По поводу других методов нахождения ближайшей к началу координат точки многогранника см. [2—4].

Summary

An algorithm is given for finding the point of a convex polyhedron in n-dimensional Euclidean space which is nearest to the origin. It is assumed that the convex polyhedron is defined as the convex full of a given finite set of points. This problem arises when one wishes to determine the direction of the steepest descent for certain minimax problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., изд. «Мир», 1964.
2. M. Frank, P. Wolfe. An algorithm for quadratic programming. Naval Res. Logist. Quart., 3, No 1—2, 95—110, 1956.
3. В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. Минимизация гладкого выпуклого функционала на выпуклом множестве. Вестник ЛГУ, № 19, 5—17, 1964.
4. Б. Н. Козинец. Об одном алгоритме обучения линейного персептрона. В сб. «Вычислительная техника и вопросы программирования». Изд. ЛГУ, 1964, стр. 80—83.
5. Алгол-процедуры. Методические материалы по программному обеспечению ЭВМ, под ред. И. В. Романовского, вып. 9 (ротапринт). Изд. ЛГУ, 1971.

Статья поступила в редакцию 30 декабря 1969 г.

■