

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

В. Н. ФОМИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ТЕОРИЯ
ОБУЧАЕМЫХ
ОПОЗНАЮЩИХ
СИСТЕМ



Издательство Ленинградского университета
Ленинград 1976

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета*

УДК 62—50

Фомин В.Н. Математическая теория обучаемых опознающих систем. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1976, с. 1—236.
Ил. — 27, табл. — 1, библ. — 194 назв.

В книге описываются многочисленные результаты, полученные советскими и зарубежными авторами при изучении различных аспектов теории обучения распознаванию образов. Наряду с постановкой задачи обучения подробно излагаются методы ее решения. Особое внимание уделено исследованию сходимости рекуррентных процедур обучения, самообучения и адаптации. В работе нашли отражение основные подходы к задаче обучения.

Книга рассчитана на научных работников, занятых в области теоретической и технической кибернетики. Кроме того, она может служить учебным пособием для студентов и аспирантов, специализирующихся по теории обучаемых и адаптивных систем.

В монографии последовательно излагается подход к задаче распознавания образов, получивший в литературе название экстраполяционного (геометрического). В рамках этого подхода могут быть выделены четыре темы, составившие основное содержание данной работы.

Первая тема — теория конечно-сходящихся алгоритмов, успешно разрабатываемая группой сотрудников Ленинградского университета под руководством В. А. Якубовича.

Вторая тема — статистические методы в теории обучаемых систем — содержит краткое описание методов, на которых основано значительное большинство работ по распознаванию образов. В книге эта тема занимает сравнительно скромное место, поскольку, во-первых, в настоящее время имеются хорошие книги, посвященные статистическим методам в теории распознавания, и, во-вторых, теория распознавания образов, по глубокому убеждению автора, содержит (или должна содержать) нечто, отличающееся от математической статистики. В рамках второй темы видное место занимают замечательные исследования В. Н. Вапника и А. Я. Червоненкиса по методам обучения с помощью минимизации эмпирического риска.

Третья тема — методы стохастической аппроксимации — основана на работах Я. З. Цыпкина по теории обучения и адаптации, написанных всегда ярко и увлекательно, и на фундаментальных исследованиях по теории рекуррентных стохастических процедур обучения, результаты которых изложены в известной книге М. А. Айзермана, Э. М. Бравермана, Л. И. Розоноэра — создателей метода потенциальных функций.

Четвертая тема — обучение без учителя — посвящена описанию некоторых подходов, предложенных упомянутыми выше авторами к этой интересной проблеме.

Книга содержит также Дополнение, в котором рассмотрен ряд задач адаптивного управления в постановке, допускающей решение на основе метода конечно-сходящихся алгоритмов.

Выбор материала определялся вкусами автора, но автор надеется, что основные методы и направления современной теории обучаемых опознающих систем нашли в книге свое отражение.

В указатель литературы вошли в основном работы, оказавшие влияние на формирование взглядов автора на существо теории распознавания и обучения. К сожалению, невозможно даже перечислить всех авторов, посвятивших свои научные исследования проблемам обучения, самообучения и адаптации. Сравнительно более подробно представлены работы участников научного семинара кафедры теоретической кибернетики Ленинградского университета. Основной текст книги не содержит ссылок на конкретные работы. Необходимые пояснения даются в комментариях, помещенных в конце книги.

В работах по распознаванию образов обычно рассматриваются и конкретные приложения для предлагаемых методов. В данной книге таких приложений нет. Это объясняется ее направленностью — дать математические основы методов, используемых в теории обучения и адаптации; конкретные примеры использования методов можно найти в работах, приведенных в указателе литературы.

В связи с тем, что основу книги составил курс лекций, читаемых автором студентам математико-механического факультета Ленинградского университета, специализирующимся в области теоретической кибернетики, она может быть использована как учебное пособие, поэтому в конце каждой главы приведены упражнения. Для понимания первых трех глав и Дополнения достаточно знания высшей математики в объеме курсов вуза, для усвоения же остального материала требуется хорошее знание теории вероятностей в объеме курсов, читаемых на математических факультетах университетов. Формально все используемые понятия и факты приведены в гл. 4, однако свободное владение этим материалом требует достаточно высокой математической культуры.

Автор благодарен В. Г. Сраговичу за его многочисленные замечания, способствовавшие улучшению качества книги. Книга не была бы написана без активной поддержки со стороны В. А. Якубовича, который в течение многих лет не только пытался привлечь внимание автора к новым научным проблемам, но и со свойственным ему оптимизмом и решительностью «затаскивал» автора в дебри новых научных направлений.

ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- Δ — равно по определению
 \equiv — равно тождественно
 \Rightarrow — влечет
 \Leftrightarrow — эквивалентно
 \forall — для любого (для произвольного)
 \in (\notin) — принадлежит (не принадлежит)
 \emptyset — пустое множество
 $A \subset B$ — множество A является частью множества B
 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ — объединение, пересечение и разность множеств
 A и B
 $\{x\}$ — множество (совокупность) элементов x
 $\{x | R\}$ — множество элементов x , удовлетворяющих условию R (при условии R)
 $I_{\{ \}}$ — характеристическая функция (индикатор) множества $\{ \}$
 $\text{sign } a$ — знак числа a (при $a = 0$ иногда доопределяется единицей)
 ω — (входное) изображение, сигнал; при вероятностных рассмотрениях трактуется как элементарное событие
 $\Omega_{\Delta}(\omega)$ — пространство изображений (пространство элементарных событий)
 Ω_k , $k = 1, \dots, l$, — классы изображений (непересекающиеся подмножества пространства Ω)
 $\{s_k(\omega)\}_{k=1}^l$ — дискриминантные (разделяющие) функции по отношению к подмножествам $\{\Omega_k\}_{k=1}^l$
 $s(\omega) = s_1(\omega) - s_2(\omega)$ — дискриминантная функция, принимающая значения разных знаков на множествах Ω_1 и Ω_2
 R^q — вещественное евклидово пространство размерности q ; пространство признаков (описаний)
 $x(\omega) : \Omega \rightarrow R^q$ — отображение пространства Ω в R^q
 $\omega_1, \dots, \omega_m$ — тренировочная последовательность. В вероятностной трактовке $\omega_k = \omega_k(\omega)$ — отображение Ω в себя
 $X^{(k)}$, $k = 1, \dots, l$, — классы изображений в пространстве признаков R^q
 $f^{(k)}(x)$ — дискриминантные (разделяющие) функции в пространстве R^q
 $\{f^{(k)}(x, \tau)\}_{k=1}^l$ — семейство наборов дискриминантных функций, определяемое векторным параметром τ
 $a_k(x)$, $k = 1, \dots, N$, — вещественные функции, определенные на R^q и осуществляющие переход в N -мерное спрямляющее пространство; в перцепционной схеме трактуются как ассоциативные элементы (A -элементы)
 $x^{(i)}$ — i -я компонента вектора x

x_n — вектор с номером n , $x_n = x(\omega_n)$

x^* — вектор-строка, отвечающая вектор-столбцу x

A^* — матрица, сопряженная (транспонированная) матрице A

A^{-1} — матрица, обратная матрице A

$(x, y) \Delta x^*y$ — скалярное произведение векторов x и y

$\|x\| \Delta \sqrt{(x, x)}$ — норма вектора x

$\|A\| \Delta \max_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ — норма матрицы A

Sp — след (сумма диагональных элементов) квадратной матрицы

\det — определитель квадратной матрицы

τ — вектор весов A -элементов; векторный параметр, определяющий выбор управлений; искомое решение системы неравенств

$\varphi(x, \tau)$ — целевая функция, входящая в определение алгоритма с поощрением; функция, определяющая систему неравенств для отыскания параметра τ

$p(\tau)$ — вероятность ошибки распознавания, отвечающая параметру τ

$\theta_n, \theta(x, \tau), \theta(z), \theta_\varepsilon(t)$ — обозначения для булевых (пороговых) функций, определяемых тем или иным способом

τ_* — набор "идеальных" параметров, оцениваемый векторный параметр

τ_n — итерации параметра τ

n — число изменений вектора τ за n итераций (в алгоритмах с поощрением)

A — σ -алгебра подмножеств (событий) множества Ω

P — вероятностная мера, определенная на событиях из A

$P\{ \}$ — вероятность события $\{ \}$

ξ — сл. вел., $\xi: \Omega \rightarrow R^q$

F_ξ — распределение вероятностей, отвечающее сл. вел. ξ

$p_\xi(x)$ — плотность распределения F_ξ , отвечающая сл. вел. ξ

$M\xi$ — м. о. сл. вел. ξ

σ_ξ^2 — дисперсия сл. вел. ξ

$\{\xi_n\}$ — последовательность сл. вел.

$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ — сходимость по вероятности

$\xi_n \xrightarrow{p. n.} \xi$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$ п. н.) — сходимость с вероятностью 1

$\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$ — среднеквадратичная сходимость

$M(\xi|A_1)$ — условное м. о. при условии A_1

$P(A|A_1), P_{A_1}(A)$ — условная (при условии A_1) вероятностная мера события A

$\limsup B_n \Delta \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} B_k$ — верхний предел последовательности множеств B_n

При $\xi_n: \Omega \rightarrow R^1$:

$F_\xi(x)$ — функция распределения сл. вел. ξ

$|\xi|$ — абсолютное значение (модуль) ξ

$\xi^\pm = 0,5(\xi \pm |\xi|)$ — положительная и отрицательная части ξ

$\prod_{n=1}^{\infty} \xi_n$ — произведение ξ_n

$\liminf \xi_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \Delta \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \xi_k$ — нижний предел $\{\xi_n\}$

$\limsup \xi_n \equiv \overline{\lim} \xi_n \Delta \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \xi_k$ — верхний предел $\{\xi_n\}$

$\Gamma(x \sim \Omega_{i*})$ — гипотеза о том, что элементарное событие ω , $x(\omega) = x$, принадлежит событию Ω_{i*}

$W, W(\tau)$ — обозначения для функционалов среднего риска либо минимизируемых (экстремизируемых) функционалов

ω_l — эмпирический функционал среднего риска, условный риск

$p(x|\Omega_i)$ — условная плотность распределения вероятности изображений i -го класса

$d_i(x)$ — функция (степень) достоверности принадлежности x i -му классу

$\hat{d}_i(x)$ — эмпирическая функция (степень) достоверности принадлежности x i -му классу

$\Delta^B(x_1, \dots, x_l)$ — индекс системы множеств B относительно выборки

$X^{(l)} = (x_1, \dots, x_l)$

$m^B(l)$ — функция роста

$\nabla_\tau Q(x, \tau)$ — градиент по τ функции $Q(x, \tau)$

$M_x Q(x, \tau)$ — среднее по x функции $Q(x, \tau)$

Π_0, Π_1 — проекторы, отвечающие матрице A (в § 8.2)

$C, C_0, C_1, C_2, C_3, C_4$ — положительные постоянные

γ_n — неотрицательные постоянные в рекуррентных процедурах, обычно удовлетворяют условиям $\sum_n \gamma_n = \infty, \sum_n \gamma_n^2 < \infty$

$K(x, y)$ — потенциальная функция

$a_i(x), \lambda_i^2$ — собственные функции и собственные числа потенциальной функции $K(x, y)$ (в гл. 9)

$D_\varepsilon(x)$ — шар радиуса ε с центром в точке x

$V_\varepsilon(x)$ — объем шара $D_\varepsilon(x)$

δW — вариация функционала W

$\delta_1 W (\delta_2 W)$ — вариация функционала W , связанная с изменением под-интегральной функции (пределов интегрирования)

$\nabla f^{(k)}(x)$ — градиент функции $f^{(k)}(x)$

$I_n^{(k)}(x)$ — индикатор (характеристическая функция) множества $X_n^{(k)}$

$p_n^{(k)}, M_n^{(k)}$ — ненормированные моменты нулевого и первого порядков множества $X_n^{(k)}$

$\tau_n^{(k)}$ — „центр“ множества $X_n^{(k)}$

$V_n \triangleq \sum_{k=1}^l \|p_n^{(k)} \tau_n^{(k)} - M_n^{(k)}\|^2$

$\delta_s f_n^{(k)}(x)$ — вариация разделяющей функции $f_n^{(k)}(x)$, связанная с изменением „центра“ $\tau_n^{(s)}$

$u(t)$ — изменяющаяся во времени t вектор-функция управлений

$y(t)$ — вектор-функция выходов объекта управления

$\Delta_n \triangleq \|\tau_n - \tau_*\|$

$y^{(k)}(t) = \frac{d^k y}{dt^k} - k$ -я производная по t функции $y(t)$

$\tilde{\sigma}(t)$ — набор величин, наблюдаемых (измеряемых) в момент времени t

$t(\xi)$ — время обучения (настройки) регулятора

B_k, C_k — коэффициенты ОУ (в Дополнении)

$v(t)$ — вектор-функция внешних воздействий (возмущений)

E_k, D_k — коэффициенты регулятора

G_k — постоянные матрицы, определяющие характер работы адаптивного регулятора

$\hat{a}(t)$ — часть набора наблюдаемых величин

\hat{B}_k, \hat{C}_k — оценки коэффициентов объекта управления

В последние годы внимание специалистов-кибернетиков все в большей степени привлекается к проблеме создания систем, моделирующих работу органов чувств, включая работу соответствующих полей коры головного мозга. Этот интерес обусловлен, в частности, насущными задачами, стоящими перед современной техникой. Возникла необходимость создания обучаемых опознающих систем — искусственных органов чувств, которые могли бы функционировать в условиях, режимах или диапазонах, недоступных человеку.

Как правило, подобные системы предназначены для работы в условиях существенной априорной неопределенности о свойствах внешней среды, что делает затруднительным или даже невозможным конструирование их только на основе априорных данных. Это приводит к необходимости создания систем, способных в режиме функционирования изменять на основе обработки доступной текущей информации свои параметры либо свою структуру с тем, чтобы с течением времени обеспечить выполнение целевых установок. Такие системы получили название *обучаемых*, или *адаптивных*, систем.

В основе работы большинства известных в настоящее время адаптивных систем лежат итеративные *алгоритмы обучения* (настройки, адаптации), определяющие закон целенаправленного изменения параметров либо структуры в зависимости от характера информации, поступающей на вход системы. Подавляющее большинство алгоритмов обучения могут рассматриваться как градиентные, псевдоградиентные либо поисковые процедуры экстремизации некоторой связанной с задачей *целевой функции*. Выбор последней определяет особенности обучаемой системы.

Обоснованность применения получаемых таким образом алгоритмов зависит от выполнения условий их сходимости. К настоящему времени разработаны довольно общие методы доказательства сходимости алгоритмов обучения. В большинстве случаев эти доказательства базируются на идее, лежащей в основе знаменитого прямого *метода Ляпунова* исследования устой-

чивости решений дифференциальных уравнений и состоящей в изучении положительной функции (*функции Ляпунова*), убывающей вдоль траекторий процесса (для стохастических процедур убывание обеспечивается лишь в среднем и выражает собой супермартингалность функции Ляпунова).

Упомянутые общие методы не позволяют тем не менее исследовать сходимость процедур обучения во всех случаях; получаемые с их помощью условия сходимости иногда оказываются довольно ограничительными и не всегда эффективными. Поэтому тематика, связанная с изучением условий сходимости процедур обучения, продолжает оставаться источником новых математических задач, обогащаящим ряд разделов теории управления и математической статистики. Совокупность этих задач и методов их решения составляет содержание важнейшего раздела теории адаптивных систем. Сама теория пока находится в стадии своего развития, но уже прошла (или почти прошла) начальный этап, связанный с осмыслением проблемы адаптации. Математические методы исследования получают в ней свое гражданство и развитие.

В данной работе излагаются некоторые из таких методов и обсуждается их роль в решении различных задач обучения и самообучения опознающих систем. Основное содержание работы состоит в исследовании итеративных процедур в задачах обучения, самообучения и адаптивного управления.

Остальная часть введения посвящена рассмотрению модели перцептрона, послужившей прототипом многих моделей обучаемых опознающих систем, и обсуждению вопроса о степени априорной информации, используемой при создании обучаемой опознающей системы.

§ В.1. ФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОСПРИЯТИЯ И ПЕРСЕПТРОН Ф. РОЗЕНБЛАТТА

Способность живых организмов к распознаванию изображений представляет собой удивительнейшее свойство мозга. Создание предпосылок для возможности конструирования систем, обладающих подобным свойством, составляет важнейший этап в решении проблемы искусственного интеллекта.

Построение обучаемых (обучающихся) опознающих систем часто опирается на наши сведения об известных свойствах и структурах мозга, а изучение построенных моделей позволяет более глубоко понять эти свойства и структуры.

В теории функционирования мозга общепринятым, по-видимому, является положение о том, что основные свойства мозга определяются топологической структурой сети нервных клеток, или *нейронов*, и динамикой распространения импульсов в этой сети.

Существует множество различных мнений о том, как перерабатывается и хранится в мозгу информация. Одни исследователи утверждают, что мозг работает по заранее заложенным алгоритмам, подобным применяемым в цифровых машинах; другие придерживаются мнения, что мозг функционирует не на основе детерминированных алгоритмов и функции его мало схожи с известными логическими и математическими алгоритмами, вводимыми в цифровые машины. Сторонники второй концепции большое значение придают механизмам адаптации.

В связи с изучением возможных механизмов хранения и обработки информации широкому исследованию подверглась и подвергается *теория нейронных сетей*. Нейрон уже давно был признан как основной анатомический элемент нервной системы. Нервная система представляет собой сеть нейронов, каждый из которых состоит из тела с одним или более входных отростков, или *дендритов*, и одним или более выходных отростков, или *аксонов*. Нейроны обычно подразделяются на три класса: *сенсорные (рецепторные)*, генерирующие сигналы на поступающие внешние стимулы (раздражения); *моторные (эффекторные)*, передающие сигналы к мышцам или железам и непосредственно управляющие активностью; *связующие (ассоциативные)*, образующие сеть, которая соединяет сенсорные и моторные нейроны друг с другом. Мозг, или *центральная нервная система*, состоит почти полностью из нейронов этого последнего типа.

Сигналы, передаваемые нейронами, могут иметь различную форму. До недавнего времени считалось, что нейрон работает по принципу «все или ничего»: как только суммарное возбуждение на его входах превышает некоторый порог, нейрон вырабатывает импульс, который без затухания распространяется по аксону. Если возбуждение ниже порога, нейрон импульса не вырабатывает. По последним данным нейрон представляет собой более сложную систему.

Человеческий мозг состоит примерно из 10^{10} нейронов различных типов. Они организованы в сеть, которая на входе принимает сигналы от рецепторных нейронов и передает сигналы эффекторным нейронам на выходе. Различные сенсорные модальности (зрение, слух, осязание и т. п.) связаны с центральной нервной системой (ЦНС) через отдельные нервные тракты, которые присоединяются к ней в различных местах. Каждая из этих модальностей, передавая свою информацию через систему клеток, в конечном счете вносит вклад в общую активность «ассоциативных областей» ЦНС. Выходные сигналы выходят из областей ЦНС, специфичных для какой-либо одной модальности (например, механизм зрачкового рефлекса), либо из области общей активности (например, речь). От этих областей двигательного управления информация по каналам обратной связи вновь поступает в ассоциативные области и области сен-

сорной интеграции, так что существует возможность управления двигательной активностью по типу сложного сервомеханизма.

Эта общая картина справедлива для большинства биологических организмов, однако как в общей, так и в частной анатомии наблюдаются значительные вариации от вида к виду и от индивида к индивиду.

Во многих теоретических работах, посвященных моделям мозга, рассматриваются механизмы, посредством которых сложные восприятия могут быть «построены» из отдельных сенсорных фрагментов с помощью процесса обучения или ассоциации. Следовательно, в построении модели важнейшую роль играет вопрос о способности к адаптации восприятия. Изучение

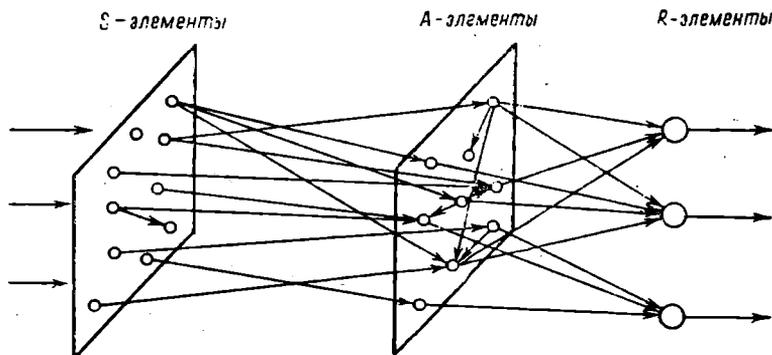


Рис. В.1.1. Схема нейронной сети

явления «обучение восприятиям» было сосредоточено, во-первых, на организации данных элементов восприятия в «понятия» или «классы объектов» и, во-вторых, на изменении самих элементов восприятия, или «впечатлений».

Результаты проведенных экспериментов сводятся, по-видимому, к тому, что хотя распознавание в смысле способности различения какого-либо объекта и отнесения его к соответствующему классу существенно зависит от опыта, «субъективное восприятие» стимула относительно неизменно и по крайней мере у некоторых биологических видов является врожденным свойством, заложенным в структуре нервной системы. До какой степени восприятие может быть организовано за счет адаптивных процессов, в настоящее время неизвестно, и это одна из проблем психологии, в решении которой теоретические модели мозга могут оказаться полезными.

Для исследования способности моделей мозга к обучению и самообучению в 1957 г. американским ученым Ф. Розенблаттом были предложены *перцептроны* — нейронные сети специальной структуры. Общий вид такой сети представлен на рис. В.1.1. Нейронная сеть состоит из трех слоев нейронов. Первый

слой — это сенсорные нейроны, называемые *S-элементами*. По аналогии со зрительной системой совокупность *S-элементов* называем *сетчаткой (ретиной)*, а внешние стимулы, поступающие на *S-элементы*, — изображениями. На самом деле рассматриваемая нейронная сеть может моделировать не обязательно зрительную систему. Импульсы от возбужденных *S-элементов* поступают в слой ассоциативных нейронов (*A-элементов*), образующих сложную нейронную сеть. Импульсы с выхода сети *A-элементов* поступают на вход реагирующих нейронов (*R-элементов*). Последние в этой модели играют роль моторных нейронов. В более общей структуре *S*-, *A*- и *R*-элементы могут быть охвачены обратными связями.

Способность описанной сети к адаптации заключается в возможности изменения структуры сети из *A-элементов*. Заслугой

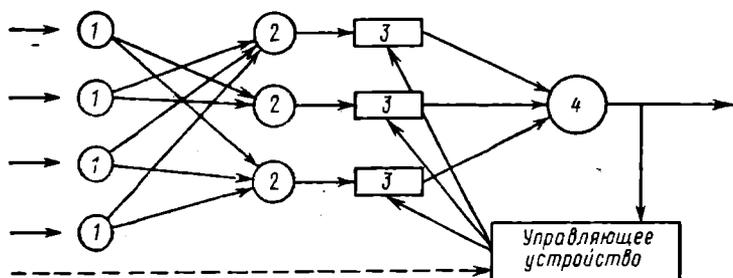


Рис. В.1.2. Структурная схема элементарного перцептрона (1 — *S*-элементы; 2 — *A*-элементы; 3 — усилители весов *A*-элементов; 4 — *R*-элемент)

Ф. Розенблатта является классификация возможных сетей из *A-элементов*, способных имитировать процессы запоминания и распознавания.

В качестве простейшего перцептрона рассмотрим следующую нейронную сеть (рис. В.1.2), предназначенную для разбиения множества внешних стимулов на два класса. В отличие от более общей структуры (см. рис. В.1.1), сеть *A-элементов* состоит лишь из одного слоя, между *A-элементами* нет взаимных и обратных связей, слой *R-элементов* состоит лишь из одного выходного нейрона. Импульсы, порождаемые *A-элементами*, с некоторыми весами поступают на вход *R-элемента*, где они суммируются. Реакция *R-элемента* зависит от того, превосходит или нет входной суммарный импульс некоторый порог, а этот импульс при фиксированном внешнем стимуле зависит от величин весов *A-элементов*. Возможность к адаптации нейронной сети (рис. В.1.2) заключается в возможности изменять *веса* реакций *A-элементов*. Эти веса можно рассматривать как *усилители реакций A-элементов* (на рис. В.1.2 они представлены в виде

прямоугольников). Задача состоит в таком подборе весов A -элементов, чтобы внешние стимулы классифицировались нейронной сетью в соответствии с некоторым *априорным разбиением* множества внешних стимулов на два класса.

Сам процесс обучения состоит в поиске нужных значений весов A -элементов. Этот поиск осуществляется с помощью специального управляющего устройства, изменяющего веса A -элементов в соответствии с некоторым правилом. Это правило (*алгоритм обучения*) совместно со структурой сети определяет конкретную обучающую систему. Система проявляет «способность» к обучению, если после некоторого процесса обучения управляющее устройство перестает изменять веса A -элементов, а классификация внешних стимулов, производимая при этом нейронной сетью, соответствует априорной. Разумеется, не при всяком алгоритме обучения и не для всяких разбиений внешних стимулов на два непересекающихся множества получающаяся система будет проявлять способность «обучаться».

Очевидно, всякая нейронная сеть осуществляет некоторую классификацию внешних стимулов. Содержательная задача возникает тогда, когда требуется построить сеть, способную после соответствующего «обучения» производить любую наперед заданную классификацию из некоторого достаточно широкого класса разбиений. В реальных задачах разбиение пространства внешних стимулов обычно невозможно описать формально. Более того, стимулы из различных множеств могут отождествляться нейронной сетью, и в этом случае безошибочная классификация невозможна. Изучение принципов построения обучаемых опознающих систем и точная постановка возникающих в связи с этим задач составляет основное содержание теории обучаемых систем.

Появление перцептрона сопровождалось шумной рекламой. От системы с «расщепленной» памятью и сложной структурой, каковой является перцептрон, ожидалось многое, и после первых модельных опытов с перцептроном казалось, что эти ожидания оправдаются. Однако переход к более сложным задачам показал ограниченные возможности простейших перцептронных схем, а изучение многоуровневых сложных схем с их колоссальным числом состояний и едва-ли поддающимся анализу способом функционирования представляет непреодолимые трудности. Это вызвало разочарование у части исследователей и привело к уменьшению числа поклонников перцептрона. Тем не менее интерес к проблеме построения обучающихся систем перцептронного типа не пропал, связанные с ней разработки ведутся в различных направлениях. Одни исследователи рассматривают перцептрон как вычислительную машину параллельного действия и анализируют возможности такого рода систем; другие считают его многоуровневой системой, реализующей принцип «неокончателных решений» и моделирующей все основные

черты самоорганизации. Для нас перцептрон важен тем, что он возбудил интерес к проблеме автоматического распознавания образов и даже в своем простейшем варианте позволил поставить математическую задачу об обучении опознающей системы. Пусть эта задача пока решается в сравнительно простом варианте, но только осмыслив и освоив ее на этом этапе, удастся, возможно, подняться на следующую ступеньку в понимании того, что же такое «восприятие», «обучение» и «искусственный интеллект».

§ В.2. ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Интересующий нас круг вопросов связан с исследованием ряда математических задач, связанных с принципами построения моделей обучаемой опознающей системы типа перцептрона. Для формулировки этих задач введем соответствующую терминологию.

Терминология. Под *системой* подразумевается устройство (прибор, машина, модель), осуществляющее однозначное отображение одного множества (множества входных стимулов, или сигналов) в другое (множество выходных сигналов). Входные и выходные сигналы могут быть самой различной физической природы.

Входные сигналы будем называть *изображениями*, выходные — *ответами системы*.*)

Опознающая (распознающая) система, или *классификатор*, — это система, способная к классификации множества изображений в соответствии с некоторой априорной классификацией.

Под классификацией здесь подразумевается разбиение всего или части множества изображений на непересекающиеся подмножества, называемые *классами изображений*. Итак, система является опознающей, если каждому изображению она сопоставляет соответствующий ему класс.**)

Обучаемая опознающая система — система, способная стать опознающей системой в результате введения в нее некоторой информации о части изображений и классах изображений. Последнее определение предполагает, что после введения информации лишь о части изображений система может стать классификатором всех изображений. Здесь налицо свойство *экстраполяции* — характерное свойство обучаемых систем. Обычно мно-

*) Здесь и ниже вводимая терминология ассоциируется с работой органов зрительного канала восприятия. В действительности, рассматриваются абстрактные системы, входами к которым могут быть самые различные сигналы и процессы.

**) В литературе часто используется термин «образ» (отсюда и произошло название «распознавание образов»). Однако толкование этого термина двойственно: одни исследователи под «образом» понимают входной стимул (изображение), другие — класс изображений.

жество изображений, информация о которых вводится в систему, значительно беднее всего множества изображений, оно, как правило, состоит из конечного числа изображений, однако естественно требовать, чтобы это «бедное» множество было достаточно «представительным» в том или ином смысле. Способность системы по-разному производить классификацию при вводе в нее некоторой информации предполагает, что система может изменять свою структуру. Сам процесс ввода информации об изображениях в систему и изменение в соответствии с этим ее структуры называется *обучением* системы, а множество соответствующих изображений, на которых система «обучается», — *тренировочным (обучающим) множеством*.

Другое характерное свойство обучаемой системы, следующее из ее определения, — определенная универсальность. Действительно, вводя в систему различные обучающие множества и информацию о них, получаем различные опознающие системы. Таким образом, в обучаемую опознающую систему не закладывается полная априорная информация о классах изображений, а лишь требуется, чтобы способность к правильной классификации изображений возникла в результате обучения.

Обучаемую опознающую систему можно рассматривать как систему, зависящую от некоторого параметра, который определяет структуру системы. Фиксация конкретного значения параметра определяет конкретную опознающую систему. Роль обучения в этом случае сводится к нахождению или оценке требуемого значения параметра.

До сих пор изображения выступали в роли абстрактных сигналов, поступающих на вход системы. Эти сигналы воспринимаются системой с помощью конечного набора *признаков* (в перцептроне Розенблатта это *S*-элементы).

Признак — это вещественная функция, определенная на множестве изображений. Набор значений всех признаков, отвечающих данному изображению, называется *описанием изображения*. Часто описание удобно трактовать как точку в конечномерном пространстве, называемом *пространством признаков (описаний)*. Каждая система воспринимает изображения с помощью своего вполне определенного набора признаков. Класс изображений при этом отображается в некоторое множество в пространстве признаков. Точки в пространстве признаков, отвечающие изображениям, т. е. описания изображений, часто также называются *изображениями*, а множества в пространстве признаков, отвечающие классам изображений, — *классами в пространстве признаков (образами)*. Такая двойная терминология обычно не приводит к путанице, поскольку всякая система имеет дело лишь с изображениями в пространстве признаков. Однако имеется и существенное отличие между классами в пространстве входов и классами в пространстве признаков. По определению классы сигналов (изображений) — непересекающиеся множества, в то

время как отвечающие этим классам подмножества в пространстве признаков могут пересекаться.

Обозначения. Всякая опознающая система является с математической точки зрения функцией, аргументами которой являются входы в машину (изображения), а значениями — ответы машины (классы изображений). Приведем список используемых обозначений и отвечающих им терминов.

Ω — *множество изображений* — абстрактное множество с элементами ω ; $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_l$ — непересекающиеся подмножества множества Ω — *классы изображений*.

Вещественные функции $\{s_k(\omega)\}_{k=1}^l$ со свойствами

$$s_k(\omega) > \max_{i \neq k} s_i(\omega), \quad \forall k, \quad \forall \omega \in \Omega_k, \quad (\text{B.2.1})$$

называются *дискриминантными (разделяющими)* по отношению к подмножествам $\Omega_1, \dots, \Omega_l$. Важен случай двух классов изображений ($l=2$), к которому часто может быть сведен общий случай. Здесь функция

$$s(\omega) = s_1(\omega) - s_2(\omega) \quad (\text{B.2.2})$$

принимает значения разных знаков на разных классах, т. е. множества Ω_1 и Ω_2 разделяются по знаку функции $s(\omega)$.

Задание правила, которое каждое изображение ω относит к одному из непересекающихся подмножеств $\{\Omega_k\}_{k=1}^l$, будем называть *априорной классификацией изображений*. Согласно сказанному априорная классификация вполне определяется заданием дискриминантных функций $\{s_k(\omega)\}_{k=1}^l$. Обозначим вещественные функции, определенные на Ω и называемые *признаками изображений*, через $x^{(1)}(\omega), \dots, x^{(q)}(\omega)$; q — мерное пространство, полученное отображением пространства Ω с помощью функций $x^{(1)}(\omega), \dots, x^{(q)}(\omega)$, называется *пространством признаков (описаний)* *. Будем в дальнейшем считать это пространство евклидовым и обозначать R^q . Образы классов $\Omega_1, \dots, \Omega_l$ в пространстве R^q при отображении функциями $x^{(1)}(\omega), \dots, x^{(q)}(\omega)$ обозначим через $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$. В отличие от классов изображений $\Omega_1, \dots, \Omega_l$ множества $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$ могут и пересекаться. В дальнейшем образы $\{X^{(k)}\}$ множества $\{\Omega_k\}$ также будем называть *классами изображений*, а элементы x этих классов (x представляет собой q -мерный вектор с компонентами $x^{(k)}$) — *изображениями в пространстве признаков*.

*) В схеме перцептрона роль признаков играют S -элементы; пространство признаков для перцептрона — множество сигналов на входе нейронной сети A -элементов. Иногда оказывается удобным саму сеть A -элементов разделить на отдельные слои и изучать множество сигналов на входе определенного слоя A -элементов.

Вещественные функции $f^{(k)}(x)$, $k=1, \dots, l$, определенные на R^q , называются *дискриминантными (разделяющими)* по отношению к непересекающимся подмножествам $\{\tilde{X}^{(k)}\}_{k=1}^l$ пространства R^q , если справедливы импликации

$$\{x \in \tilde{X}^{(k)}\} \Leftrightarrow \{f^{(k)}(x) > \max_{i \neq k} f^{(i)}(x)\}, \quad (\text{B.2.3})$$

$$\forall k, \forall x \in \tilde{X}^{(k)},$$

где символ \Leftrightarrow означает равносильность соответствующих соотношений.

Опознающей системой с переменной структурой назовем l вещественных функций $f^{(1)}(x, \tau), \dots, f^{(l)}(x, \tau)$, определенных на всем пространстве R^q при каждом значении параметра $\tau \in T$ (T — произвольное пока абстрактное множество). Если функции $f^{(1)}(x, \tau), \dots, f^{(l)}(x, \tau)$ при некотором фиксированном значении параметра τ рассматривать как дискриминантные, то согласно правилу (B.2.3) они порождают разбиение $\{X^{(k)}(\tau)\}_{k=1}^l$ пространства R^q , что в свою очередь влечет разбиение $\{\Omega_k(\tau)\}_{k=1}^l$ пространства изображений Ω согласно правилу

$$\{\omega \in \Omega_k(\tau)\} \Leftrightarrow \{x(\omega) \in X^{(k)}(\tau)\}. \quad (\text{B.2.4})$$

Для опознающей системы с переменной структурой можно задаться задачей, называемой *задачей обучения*, которая состоит в отыскании такого параметра τ_* $\in T$, при котором

$$\Omega_k(\tau_*) = \Omega_k, \quad k=1, \dots, l. \quad (\text{B.2.5})$$

Найти нужный параметр τ_* можно при помощи направленного либо случайного перебора элементов множества T . Такая процедура перебора называется *алгоритмом обучения*, а опознающая система с переменной структурой, снабженная алгоритмом обучения, называется *обучаемой опознающей системой*.

При написании соотношений (B.2.5) подразумевалось, что множества $X^{(k)}$, $k=1, \dots, l$, не пересекаются, т. е. при переходе от пространства Ω к пространству R^q не происходит существенной потери информации. Обучаемые опознающие системы, критерием качества работ которых служит выполнение соотношений (B.2.5), называются *детерминированными*. Если же образы $X^{(k)}$ множеств Ω_k пересекаются, то, очевидно, ни при каком выборе параметра τ соотношения (B.2.5) не будут удовлетворены. В этом случае (а также если классы $X^{(k)}$ не пересекаются, но множество T не содержит нужного параметра τ_*), соответствия (B.2.5) следует понимать приближенно. Возможная формализация такого подхода состоит в предположении, что существует *вероятностное распределение* на пространстве Ω и задан *функционал*, зависящий от этого распределения и дискриминантных функций на R^q . Тогда «наилучшее» разбиение прост-

ранства Ω с помощью дискриминантных функций в пространстве R^q может определяться из условия минимизации этого функционала (часто называемого функционалом *среднего риска* — функционалом качества). При решении такой *вероятностной (стохастической)* задачи распознавания образов широко используются методы статистической теории решений.

Различают два режима работы обучаемой опознающей системы. Во время первого из них — *процесса обучения (процесса настройки)* производится поиск нужного параметра τ_* . В практических задачах обычно требуется, чтобы затраты времени (и средств) на процесс обучения были не очень значительными. Во втором режиме — *режиме экзамена* — система функционирует с фиксированным значением параметра τ , найденным после окончания процесса обучения. Здесь основное требование к опознающей системе — высокое качество ее работы, обычно заключающееся в малости частоты ошибочных ответов опознающей системы при классификации новой, ранее не предъявляемой последовательности изображений (*экзаменационной последовательности изображений*).

§ В.3. СТЕПЕНЬ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ О КЛАССАХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Оценка параметра τ обучаемой опознающей системы осуществляется, как уже упоминалось раньше, с помощью тренировочной последовательности $x_1, x_2, \dots, x_k \triangleq x(\omega_k) \in R^q$, которую часто удобно считать бесконечной. Здесь возможны два варианта постановки задачи обучения. Если для каждого элемента x_k тренировочной последовательности известна априорная классификация, т. е. известно, какому классу принадлежит изображение ω_k , то подобная информация может быть сообщена обучаемой опознающей системе; соответствующий процесс обучения (процесс оценки параметра τ) носит название *обучения с учителем*. Оказывается возможным поставить разумную задачу обучения и в случае, когда априорная классификация обучающей выборки неизвестна. Процесс оценки параметра в этом случае называется *обучением без учителя*, или *самообучением*. В дальнейшем будут рассматриваться, как правило, так называемые *рекуррентные процедуры* оценки параметра τ . Рекуррентность обусловлена требованием удобства технической реализации опознающей системы, а иногда и необходимостью для системы работать в условиях полной или частичной неопределенности о свойствах внешней среды.

Характер алгоритма изменения параметра τ в процессе обучения опознающей системы в значительной степени зависит от той априорной информации, которая может быть известна о классах изображений X^0, \dots, X^q в пространстве признаков. Чем большая информация об этих множествах «заложена» в

систему при ее конструировании, тем более система специализирована. Полная информация о множествах $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$ дает возможность построить опознающую систему, не способную, однако, к обучению. Такая система оказывается «обученной» уже с самого «рождения», но зато способна успешно классифицировать лишь раз и навсегда определенные множества $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$. Другой предельный случай: никакой априорной информации о разделяемых множествах в систему не «закладывается», а вся необходимая информация поступает лишь в процессе обучения. Хотя построение такой универсальной машины в принципе возможно, но трудно ожидать от нее качественной работы. Поэтому при построении обучаемых опознающих систем предпочитают учитывать ту или иную априорную информацию о разделяемых множествах, дополняя ее каждый раз в процессе обучения. От характера этой априорной информации зависят методы построения и алгоритмы обучения опознающих систем. Мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением трех таких ситуаций:

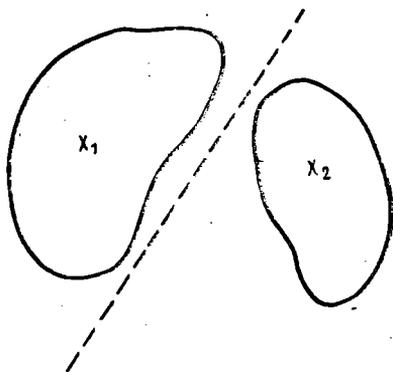


Рис. В.3.1. Линейно-разделимые классы изображений

Выпуклые оболочки множеств $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$ не пересекаются.

Выпуклые оболочки множеств $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$ могут пересекаться, но сами множества $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$ не пересекаются.

Множества $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$ могут пересекаться.

Эти три возможные ситуации в случае двух множеств $X^{(1)} = X_1, X^{(2)} = X_2$ изображены соответственно на рис. В.3.1, В.3.2 и В.3.3. Первые два случая относятся к детерминированной постановке задачи, причем наиболее сильное предположение делается в первом случае. Здесь каждая пара классов изображений разделима с помощью плоскости (*линейно-разделима*). Во втором случае возможна *нелинейная разделимость*. Как будет показано позднее, случай нелинейной разделимости иногда сводится к случаю линейной разделимости. Существует большое число алгоритмов нахождения плоскости, разделяющей множества, выпуклые оболочки которых не пересекаются. В применении к задаче распознавания образов такие алгоритмы могут рассматриваться как алгоритмы обучения.

Возможен учет и других априорных сведений, которые могут быть использованы при конструировании алгоритмов обучения

(принцип компактности изображений, гипотезы о нормальности распределений изображений внутри классов и т. д.).

В книге рассматриваются различные подходы к проблеме распознавания. Основное внимание будет уделяться математическим вопросам обучения, важнейшим из которых для нас бу-

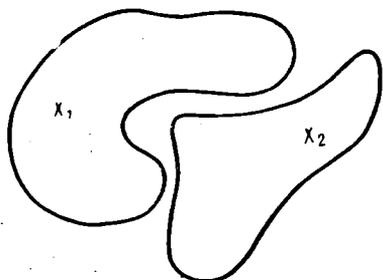


Рис. В.3.2. Непересекающиеся классы изображений

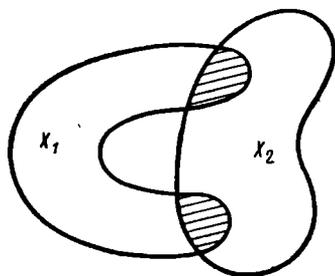


Рис. В.3.3. Пересекающиеся классы изображений

дет вопрос о сходимости различных рекуррентных процедур обучения и самообучения опознающих систем в детерминированной и вероятностной постановках задачи. Затрагиваются вопросы об окончании процесса обучения, надежности работы «обученной» опознающей системы (оценки вероятности ошибки распознавания), скорости сходимости процесса обучения и ряд других, представляющих интерес для теории распознавания образов.

МЕТОД КОНЕЧНО-СХОДЯЩИХСЯ АЛГОРИТМОВ

В данном разделе систематически излагается подход к задаче обучения опознающей системы, основанный на методе *конечно-сходящихся алгоритмов* (КСА) решения целевых неравенств. При таком подходе задача оценивания неизвестного параметра, определяющего структуру опознающей системы, переформулировывается как задача нахождения решения счетной системы *целевых неравенств*, а последняя решается с помощью специальных рекуррентных процедур, названных *алгоритмами с поощрением*. Выясняются условия, при которых алгоритмы с поощрением сходятся за конечное число шагов. Обсуждается возможность использования процедур с поощрением для построения *линейных* и *кусочно-линейных* разделяющих функций в детерминированной постановке задачи обучения.

ГЛАВА 1. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ОБУЧАЕМЫЕ ОПОЗНАЮЩИЕ СИСТЕМЫ

В главе обсуждаются основные понятия, связанные с обучаемыми опознающими системами. Приводится важный для приложений *нерекуррентный алгоритм решения нормальных линейных уравнений* (программа «Гаусс»).

§ 1.1. ЗАДАЧА ОБ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ФУНКЦИИ

Пусть R^q — вещественное евклидово пространство размерности q , x — точка этого пространства. Пусть $f(x)$ — вещественная функция, определенная на R^q , значения которой известны в точках x_1, \dots, x_m . Как продолжить $f(x)$ на произвольные значения x ?

Так поставленная задача не является определенной, поскольку возможны самые различные экстраполяции. Обычно в заданном классе функций ищется функция, наилучшая в смысле некоторого определенного критерия. Часто подобная задача допускает следующую переформулировку.

Пусть имеется набор „элементарных“ функций $\{a_i(x)\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, значения которых нам известны для любого

$x \in R^q$. Будем пытаться аппроксимировать $f(x)$ с помощью линейной комбинации функций $a_i(x)$:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^N \tau^{(k)} a_k(x). \quad (1.1.1)$$

Тогда задача экстраполяции функции $f(x)$ сводится к определению коэффициентов $\tau^{(k)}$ по заданным ее значениям в точках x_1, \dots, x_m . Именно такую математическую переформулировку допускает перцептронная схема Розенблатта в ее простейшем варианте (рис. В.1.2).

Действительно, пусть x — описание изображения (т. е. набор реакций S -элементов, поступающих на входы A -элементов при предъявлении перцептронну данного изображения). Каждый A -элемент представляет собой вещественную функцию, определенную на множестве $\{x\}$ всех выходов совокупности S -элементов. Обозначим A -элементы через $a_1(x), \dots, a_N(x)$, где N — число A -элементов. Пусть теперь все множество изображений (входных сигналов) разбито на два непересекающихся класса. Будем предполагать, что эти классы не пересекаются в пространстве признаков, т. е. не существует ни одной пары изображений из разных классов, для которых наборы реакций S -элементов были бы одинаковыми.

Обозначим через $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ отображения исходных классов изображений, полученных с помощью S -элементов. По условию $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ не пересекаются, $X^{(1)} \cap X^{(2)} = \emptyset$.

Пусть $f(x)$ — функция, определяемая условиями

$$f(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } x \in X^{(1)}, \\ -1, & \text{если } x \in X^{(2)}. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Предположим, что функцию $f(x)$ можно аппроксимировать с помощью линейной комбинации A -элементов $a_i(x)$. Тогда задача о построении опознающей системы свелась к подбору коэффициентов $\tau^{(k)}$, названных выше весами A -элементов. Если известно значение функции $f(x)$ на тренировочной последовательности x_1, \dots, x_m (это соответствует полной информации о принадлежности каждого члена тренировочной последовательности к вполне определенному классу), то веса A -элементов могут быть определены. При этом существенное значение имеет вопрос о том, в каком смысле понимается соответствие в (1.1.1). Наиболее широко распространены, например, следующие приближения:

$$A. \quad f(x_n) \sum_{k=1}^N \tau^{(k)} a_k(x_n) > 0, \quad n = 1, \dots, m,$$

$$B. \quad \left| f(x_n) - \sum_{k=1}^N \tau^{(k)} a_k(x_n) \right| < \varepsilon, \quad n = 1, \dots, m,$$

$$C. \quad \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left| f(x_m) - \sum_{k=1}^N \tau^{(k)} a_k(x_n) \right|^2 = \min.$$

Здесь ε и α — некоторые положительные величины. Случай **A** соответствует приближению функции $f(x)$ линейной комбинацией функций $\{a_h(x)\}$ по знаку, \mathbf{B}_ε — равномерному и \mathbf{C}_α — среднеквадратичному приближениям.

В математической литературе последние два случая хорошо изучены.

Решая полученную систему уравнений или неравенств, найдем числа $\tau^{(k)}$, что позволит вычислять в соответствии с (1.1.1) значения функции $f(x)$ уже в произвольной точке x .

Таким образом, задача об экстраполяции функции $f(x)$ сводится к нахождению решения систем неравенств или уравнений. При этом неравенства типа **A** и \mathbf{B}_ε разрешимы не всегда. Уравнения, порождаемые задачей \mathbf{C}_α , как известно, всегда разрешимы. Задача \mathbf{C}_2 может быть сведена к решению неравенств типа \mathbf{B}_ε . Действительно, решение задачи \mathbf{C}_2 совпадает с решением системы уравнений (*нормальной системы*)

$$A\tau = \psi, \quad (1.1.3)$$

где A — матрица с элементами $A_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^N a_i(x_n) a_j(x_n)$, $i, j = 1, \dots, N$; τ и ψ — векторы с компонентами $\tau^{(i)}$, $\psi^{(i)}$: $\tau^* = (\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(N)})$, $\psi^* = (\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(N)})$,

$$\psi^{(i)} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m a_i(x_n) f(x_n),$$

(τ^* — строка, отвечающая столбцу τ). Задавшись положительным числом ε , заменим уравнение (1.1.3) неравенствами

$$|(b_i, \tau) - \psi^{(i)}| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1.4)$$

где b_i — векторы с компонентами A_{ij} ; $b_i^* = (A_{i1}, \dots, A_{iN})$, круглые скобки (\cdot) обозначают скалярное произведение векторов. Неравенства (1.1.4) имеют как раз вид неравенств \mathbf{B}_ε .

§ 1.2. РЕКУРРЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБУЧЕНИЯ

Удобство схемной реализации и естественное требование к экономии «памяти» опознающей системы накладывают ограничения на алгоритмы обучения. При формировании вектора весов τ неразумно и неестественно требовать, чтобы система «помнила» все изображения, предъявленные в режиме обучения.

Ограничения на память системы формально сводятся к требованию *рекуррентности* алгоритма обучения, когда формирование вектора весов происходит последовательно на основе текущей информации, не предполагающей запоминание всей предыстории обучения. Математически это означает, что алгоритм обучения имеет вид

$$\tau_{n+1} = \Phi(x_n, \tau_n, x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2.1)$$

Здесь τ_1 — произвольный начальный вектор весов; x_1, x_2, \dots — элементы тренировочной последовательности и x_n — некоторые параметры, характеризующие класс векторных функций Φ , стоящих в правой части соотношения (1.2.1). При построении конкретного алгоритма обучения необходимо указать алгоритм изменения параметров x_n . Естественно требовать, чтобы размерность вектора параметров x_n была, по возможности, минимальной и, во всяком случае, ограниченной равномерно по n .

Формула (1.2.1) позволяет последовательно строить векторы τ_n , для чего необходимо знание изображения x_n , поступающего на вход системы в данный момент времени. Такая система не требует памяти для хранения ранее предъявленных изображений. Можно строить алгоритмы обучения с ограниченной «памятью», когда функция Φ в правой части соотношения (1.2.1) зависит от конечного набора изображений, предъявленных системе ранее. В частности, Φ может зависеть от всей предыстории, в этом случае алгоритм (1.2.1) не является рекуррентным в указанном смысле. Нас будут далее интересовать в основном рекуррентные алгоритмы обучения. Алгоритмы с заданной «глубиной памяти» (когда Φ зависит от заданного числа предшествующих изображений) в интересующем нас круге вопросов не представляют особого интереса, не приносят ничего принципиально нового. Поэтому, говоря в дальнейшем о рекуррентных алгоритмах обучения, будем иметь в виду алгоритм вида (1.2.1).

В алгоритме (1.2.1) явно не выражено, в какой форме сообщается информация опознающей системе об изображениях тренировочного множества. В связи с этим введем следующее определение.

Определение 1.2.1. Рекуррентный алгоритм (1.2.1) называется *алгоритмом с поощрением*, если его можно представить в виде

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_n \Phi(x_n, \tau_n, x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2.2)$$

$$\text{Здесь } \theta_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x_n, \tau_n, x_n) \leq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi(x_n, \tau_n, x_n) > 0; \end{cases} \quad (1.2.3)$$

$\varphi(x, \tau, x)$ — некоторая «оценочная» (целевая) функция, характеризующая качество работы алгоритма.

Алгоритм (1.2.2) — (1.2.3) обычно интерпретируется следующим образом: вектор весов на n -м шаге алгоритма не изменяется, если система работает правильно ($\theta_n = 0$), и изменяется по некоторому закону в противном случае. Эта информация о правильном или неправильном функционировании системы в режиме обучения и является той информацией об изображениях тренировочного множества, которая сообщается опознающей системе, т. е. которую можно использовать при построении алгоритмов обучения.

Рекуррентные алгоритмы «без поощрения» называются иногда *алгоритмами с принудительным обучением*. В системах с принудительным обучением обычно «заложено» заранее такое целевое условие, что их функционирование в режиме обучения сводится к накоплению некоторых статистических сведений о внешних воздействиях, которые затем используются для формирования вектора весов.

Введём основное для рассматриваемого раздела понятие о *конечно-сходящемся алгоритме* (КСА) обучения опознающей системы.

Определение 1.2.2. Алгоритм с поощрением (1.2.2)—(1.2.3) называется *конечно-сходящимся*, если для произвольного начального вектора τ_1 и произвольной бесконечной тренировочной последовательности x_1, x_2, \dots выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n, \tau_n, x_n) > 0. \quad (1.2.4)$$

Положительность нижнего предела в (1.2.4) означает, что найдется номер r такой, что при $n \geq r$ будет выполнено $\varphi(x_n, \tau_n, x_n) > 0$. В силу алгоритма (1.2.2)—(1.2.3) это означает, в частности, что $\tau_r = \tau_{r+1} = \dots$, т. е. последовательность τ_n сходится к пределу за конечное число шагов алгоритма (1.2.2)—(1.2.3). Это обстоятельство и послужило поводом назвать такие алгоритмы *конечно-сходящимися*. Разумеется, предельное значение $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau_r$ может зависеть как от выбора начального вектора τ_1 , так и от тренировочной последовательности x_1, x_2, \dots .

Итак, если алгоритм обучения конечно-сходящийся, то опознающая система «обучается» за конечное (но не известное заранее) число шагов. Следует подчеркнуть, что обученная система не обязательно правильно опознает все элементы тренировочного множества. Из приведенного определения следует, что правильно классифицироваться будет лишь «хвост» бесконечной тренировочной последовательности, а изображения, поступившие в начальной стадии обучения, могут опознаваться неправильно. В том частном случае, когда бесконечная тренировочная последовательность составлена из конечного множества изображений, каждое из которых встречается в последовательности бесконечное число раз, обученная с помощью КСА система будет правильно классифицировать все тренировочное множество.

На КСА можно взглянуть и с другой точки зрения. Функция $\varphi(x, \tau, x)$, входящая в определение 1.2.2 алгоритма с поощрением, определяет на тренировочном множестве $\{x_n\}$ счетную последовательность *целевых неравенств* относительно искомого вектора τ :

$$\varphi(x_n, \tau, x_n) > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.2.5)$$

и задача об обучении опознающей системы сводится к задаче

построения алгоритма нахождения решения τ счетной системы неравенств (1.2.5).

Следует отметить, что пока не определен алгоритм изменения параметров x_n , характеризующих класс целевых функций, систему (1.2.5) нельзя считать заданной даже при определенной заранее тренировочной последовательности. В частности, выбор элемента x_n тренировочного множества и закон изменения параметра x_n может зависеть от выбора векторов τ_k при $k \leq n$. Пусть, например, эти зависимости имеют вид

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \Psi_1(x_1, \dots, x_n; \tau_1, \dots, \tau_n; x_1, \dots, x_n), \\x_{n+1} &= \Psi_2(x_n, \tau_n, x_n), \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (1.2.6)$$

Система соотношений (1.2.2), (1.2.3), (1.2.6) последовательно определяет значения величин x_n , τ_n , x_n , если заданы их начальные значения x_1 , τ_1 , x_1 . Поэтому, система неравенств (1.2.4) становится определенной, лишь если фиксирован некоторый алгоритм (1.2.2) — (1.2.3) изменения вектора τ . Этот алгоритм называется конечно-сходящимся, если для так определенной последовательности x_n , τ_n , x_n справедливо предельное соотношение (1.2.4) для произвольных начальных значений x_1 , τ_1 , x_1 . Иногда такое определение используется для алгоритмов, в которых начальные значения x_1 , τ_1 , x_1 принимают произвольные значения из некоторых фиксированных множеств и (или) переменные τ_n , x_n в процессе работы алгоритма не должны выходить за пределы этих множеств. Такие модификации определения КСА естественны и мы не будем на них специально останавливаться.

Первый вопрос, возникающий в связи с определением 1.2.2, состоит в том, существуют ли КСА? Возможность конструирования КСА в значительной степени зависит от свойств целевой функции $\varphi(x, \tau, x)$. В следующей главе будет показано, как для широкого класса опознающих систем могут быть построены КСА обучения. Для числа изменений вектора τ в процессе работы алгоритма могут быть получены оценки, зависящие от выбора начального значения τ_1 и некоторых параметров алгоритма.

Качество работы опознающей системы, обученной с помощью КСА, зависит от последовательности изображений, использованной при обучении. Эта последовательность должна быть в естественном смысле представительной. Если изображения в режиме обучения поступают на вход системы случайно и независимо, то можно показать, что, вообще говоря, результат обучения будет «хорошим»: обучающая система будет редко ошибаться при классификации в режиме экзамена. Точные утверждения подобного типа будут даны в гл. 5. Интересен вопрос об окончании процедуры обучения. Если в процессе обучения начиная с некоторого момента опознающая система правильно опознает большее число предъявленных изображений, то есте-

ственно ожидать, что она уже хорошо «обучилась». Оказывается, возможно связать число подряд правильно опознанных изображений (при условии независимого их предъявления) с вероятностью ошибки распознавания в режиме экзамена. Этот вопрос также будет обсуждаться в гл. 5.

§ 1.3. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Здесь мы остановимся на задаче S_2 об аппроксимации функции $f(x)$ в среднеквадратичном смысле. Достоинством задачи является ее априорная разрешимость. Алгоритмы, дающие решение задачи S_2 , используются в ряде моделей обучаемых опознающих систем. Ниже рассматривается один нерекуррентный алгоритм обучения, являющийся модификацией метода Гаусса решения систем нормальных линейных уравнений. Для тех же целей могут быть использованы и рекуррентные алгоритмы («без поощрения»), некоторые из них будут рассмотрены при изложении метода стохастической аппроксимации.

Модификация метода Гаусса состоит в распространении этого метода на случай нормальных систем, которые могут быть вырождены или плохо обусловлены.

Пусть требуется найти компоненты $\tau^{(k)}$ вектора τ , минимизирующие квадратичную форму

$$\sum_{k=1}^m \left| f(x_n) - \sum_{k=1}^N \tau^{(k)} a_k(x_n) \right|^2. \quad (1.3.1)$$

Здесь x_1, \dots, x_m — заданные точки пространства R^q (тренировочная последовательность); $a_k(x)$ — известные функции (A -элементы) и $f(x)$ — функция, значения которой на тренировочной последовательности известны. Вектор τ , минимизирующий форму (1.3.1), назовем *оптимальным*.

Выше указывалось, что оптимальный вектор τ должен удовлетворять системе линейных уравнений (1.1.3).

Обычная трудность при решении системы (1.1.3) — равный или близкий к нулю определитель матрицы A , что затрудняет применение большинства стандартных методов, основанных на обращении матрицы A . Плохая обусловленность системы (1.1.3) связана с тем, что A -элементы обычно выбираются произвольно и потому не удовлетворяют условию «сильной независимости» на тренировочной последовательности.

Так как возможно вырождение матрицы A , будем искать не решение системы уравнений (1.1.3), а решение системы неравенств (1.1.4) при некотором $\epsilon > 0$, являющемся параметром программы. Алгоритм решения должен быть таким, чтобы при неособой матрице A и достаточно малом ϵ доставляемое им решение совпадало бы с оптимальным вектором τ . Кроме того, естественно определить процедуру нахождения решения системы неравенств (1.1.4) так, чтобы найденное решение было равно-

мерно по m ограничено. В связи с этим введем следующее определение.

Определение 1.3.1. Алгоритм решения системы неравенств (1.1.4) называется *L-оптимальным*, если найденное с его помощью решение удовлетворяет таким условиям:

— В случае обратимости матрицы A в результате работы алгоритма при достаточно малом ϵ получается оптимальный вектор τ .

— Доставляемое алгоритмом решение неравенств (1.1.4) равномерно по m ограничено.

Приведем описание *L-оптимального* алгоритма решения системы неравенств (1.1.4).

Работа программы «Гаусс»

Пусть система (1.1.3) имеет вид

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \tau^{(j)} = \psi^{(i)}, \quad (1.3.2)$$

где
$$\alpha_{ij} = \frac{1}{m} (a_i, a_j) \triangleq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m a_i(x_n) a_j(x_n), \quad (1.3.3)$$

$$\psi^{(i)} = \frac{1}{m} (a_i, f) \triangleq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m a_i(x_n) f(x_n).$$

Фиксируем $\delta > 0$. Если $|\alpha_{11}| > \delta$, то первое уравнение системы (1.3.2) оставляем без изменения, а к i -му уравнению ($i=2, 3, \dots, N$) добавляем первое, умноженное на $-\alpha_{i1}\alpha_{11}^{-1}$. Получим систему

$$\alpha_{11} \tau^{(1)} + \sum_{k=2}^N \alpha_{ik} \tau^{(k)} = \psi^{(i)}, \quad (1.3.4)$$

где $\alpha_{ik}^{(1)} = \alpha_{ik} - \alpha_{i1}^{-1} \alpha_{11} \alpha_{1k}$, $\psi_i^{(1)} = \psi^{(i)} - \alpha_{i1}^{-1} \alpha_{11} \psi^{(1)}$.

Если же $|\alpha_{11}| \leq \delta$, то назовем индекс 1 особым. В этом случае положим в системе (1.3.2) $\tau^{(1)} = 0$ и, отбросив первое уравнение, перейдем к системе

$$\sum_{k=2}^N \alpha_{ik} \tau^{(k)} = \psi^{(i)}, \quad i=2, 3, \dots, N. \quad (1.3.5)$$

В обоих случаях после первого шага имеем систему $(N-1)$ порядка (1.3.4) или (1.3.5), с которой затем поступаем так же, как с исходной системой.

После N шагов получим треугольную систему

$$\begin{aligned} \alpha_{i_1 i_1}^{(N)} \tau^{(i_1)} + \alpha_{i_1 i_2}^{(N)} \tau^{(i_2)} + \dots + \alpha_{i_1 i_r}^{(N)} \tau^{(i_r)} &= \psi_{i_1}^{(N)}, \\ \alpha_{i_2 i_2}^{(N)} \tau^{(i_2)} + \dots + \alpha_{i_2 i_r}^{(N)} \tau^{(i_r)} &= \psi_{i_2}^{(N)}, \\ \alpha_{i_r i_r}^{(N)} \tau^{(i_r)} &= \psi_{i_r}^{(N)}, \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

и особые индексы j_1, \dots, j_q , причем $r + q = N$. Решив систему (1.3.6), последовательно определим $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(i)}$. Полагая

$$\tau^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{если индекс } k \text{ особый,} \\ \tau^{(k)}, & \text{если } k \text{ неособый,} \end{cases}$$

получим искомый вектор $\tau^* = (\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(N)})$.

Теорема 1.3.1. *Описанный алгоритм является L-оптимальным, причем для выполнения неравенств*

$$\left| \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \tau^{(j)} - \psi^{(i)} \right| < C \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N,$$

следует взять $\delta = \varepsilon^2$. Для компонент вектора τ справедлива оценка

$$|\tau^{(k)}| \leq C \delta^{-r}, \quad a \leq N,$$

где постоянная C зависит от величин

$$\max_{x \in R^q} |a_i(x)|, \quad \max_{x \in R^q} |f(x)|.$$

Достоинством алгоритма является то обстоятельство, что гарантируется малость невязки, не зависящая от числа «исключенных» уравнений, а само решение оказывается равномерно ограниченным по m . Такой результат получен при существенном учете специфики системы (1.3.2): коэффициенты и правая часть системы имеют вид (1.3.3). Для системы общего вида подобные результаты, разумеется, не справедливы.

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} 1000\tau^{(2)} &= 1, \\ 999\tau^{(1)} + \tau^{(2)} &= 1. \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Если воспользоваться изложенным выше алгоритмом, то следует вычеркнуть первое уравнение, а во втором уравнении положить $\tau^{(1)} = 0$. Итак, найден вектор $\tau^* = (0, 1)$. Невязка первого уравнения равна 999, т. е. не является малой. Этот результат делается понятным, если учесть, что система (1.3.7) существенно отлична от системы (1.3.2). Действительно, в случае системы (1.3.2) из неравенства нулю нужного коэффициента α_{11} следует, что $a_1 = 0$ и, следовательно, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$. Если же взять α_{11} не нулевым, но малым, то это значит, что норма $\|a_1\|$ вектора a_1 мала. Но тогда равенство $(a_1, a_2) = 1000$ означает, что норма $\|a_2\|$ вектора a_2 велика, т. е. число α_{22} велико. Если же коэффициент при $\tau^{(2)}$ во втором уравнении велик, то невязка действительно получится малой.

Пример 2. Пусть система (1.3.2) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (b_1, b_1) \tau^{(1)} + (b_1, b_2) \tau^{(2)} &= (b_1, f), \\ (b_2, b_1) \tau^{(1)} + (b_2, b_2) \tau^{(2)} &= (b_2, f) \end{aligned} \right\}, \quad \text{где } (b_1, b_1) < \delta; \quad (b_2, b_2) > \delta.$$

Действуя согласно алгоритму, получим $\tau^{(1)} = 0$, $\tau^{(2)} = (b_2, b_2)^{-1} (b_2, f)$ и невязка будет $|(b_2, b_2)^{-1} (b_1, b_2) (b_2, f) - (b_1, f)| < 2 \|b_1\| \|f\| < 2\delta \|f\|$, т. е. мала.

Доказательство теоремы 1.3.1. Обозначим через $\Gamma(a_1, \dots, a_N)$ определитель Грама векторов a_1, \dots, a_N :

$$\Gamma(a_1, \dots, a_N) = \det \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_N) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_N, a_1) & (a_N, a_2) & \dots & (a_N, a_N) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\alpha_{11} = m^{-1} \Gamma(a_1)$. Если $|\alpha_{11}| > \delta$, то $\alpha_{22}^{(1)} = m^{-1} \Gamma^{-1}(a_1) \Gamma(a_1, a_2)$. Пусть до l -го шага было p неособых индексов i_1, i_2, \dots, i_p . Тогда коэффициент при $\tau^{(l)}$, стоящий в l -м уравнении, после $(l-1)$ -го шага имеет вид

$$\alpha_{i_l i_l}^{(l-1)} = \frac{1}{m} \frac{\Gamma(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}, a_l)}{\Gamma(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p})}. \quad (1.3.8)$$

Действительно, проводимые преобразования (добавление к какой-либо строке другой строки, предварительно умноженной на любое число) не изменяют определителя системы (1.3.2) или какой-либо его части, симметричной относительно главной диагонали. Кроме того, преобразование таково, что i -я строка не изменяется при i -м и последующих преобразованиях, так что в системе (1.3.6)

$$\alpha_{i_k i_k}^{(N)} = \alpha_{i_k i_k}^{(N-1)} = \dots = \alpha_{i_k i_k}^{(1)} = \alpha_{i_k i_k}, \quad \psi_{i_N}^{(i)} = \psi^{(i)},$$

$$k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\alpha_{i_k i_k}^{(N)} = \alpha_{i_k i_k}^{(1)}, \quad \psi_{i_N}^{(i_2)} = \psi^{(i_2)}, \quad k = 2, \dots, N,$$

и т. д. Рассмотрим определитель системы (1.3.6), образованный первыми элементами. Так как система треугольная, этот определитель равен произведению первых ее $(p+1)$ диагональных элементов

$$\alpha_{i_1 i_1}^{(l-1)} \cdot \alpha_{i_2 i_2}^{(l-1)} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_p i_p}^{(l-1)} \cdot \alpha_{i_l i_l}^{(l-1)}.$$

В силу сказанного он равен определителю исходной системы (1.3.2), образованному первыми l -элементами, из которого вычеркнуты строки и столбцы, отвечающие особым индексам. Но последний определитель и есть $m^{-(p+1)} \Gamma(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}, a_l)$. Следовательно,

$$m^{-(p+1)} \Gamma(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}, a_l) = \alpha_{i_1 i_1}^{(l-1)} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_p i_p}^{(l-1)} \cdot \alpha_{i_l i_l}^{(l-1)},$$

т. е.

$$\alpha_{i_l i_l}^{(l-1)} = \frac{1}{m^{p+1}} \frac{\Gamma(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}, a_l)}{\alpha_{i_1 i_1}^{(l-1)} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_p i_p}^{(l-1)}}.$$

По тем же соображениям

$$a_{i_1 i_1}^{(l-1)} \cdot a_{i_2 i_2}^{(l-1)} \cdot \dots \cdot a_{i_p i_p}^{(l-1)} = m^{-p} \Gamma(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}),$$

что и доказывает формулу (1.3.8).

Разложим вектор a_i на две составляющие: $a_i = b_i + c_i$, где

$$b_i = \sum_{v=1}^p \gamma_{i_v}^{(l)} a_{i_v}, \quad (c_i, a_{i_v}) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, p.$$

Тогда

$$\Gamma(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}, a_i) = \Gamma(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}, b_i) + \|c_i\|^2 \Gamma(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}).$$

Поскольку $\Gamma(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}, b_i) = 0$, то

$$\|c_i\|^2 = \Gamma^{-1}(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) \Gamma(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}, a_i) = m \alpha_{ii}^{(l-1)}. \quad (1.3.9)$$

Согласно описанию алгоритма индекс l является особым, если $|\alpha_{ii}^{(l-1)}| \leq \delta$. Из (1.3.8) — (1.3.9) следует поэтому, что

$$\|c_i\|^2 \leq m\delta, \quad (1.3.10)$$

если индекс l особый, и в противном случае

$$m^{-1} \Gamma^{-1}(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) \Gamma(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}, a_i) > \delta. \quad (1.3.11)$$

Таким образом, каждый вектор a_{j_k} с особым индексом можно представить в виде

$$a_{j_k} = b_{j_k} + c_{j_k},$$

где b_{j_k} лежит в подпространстве, натянутом на векторы a_{i_v} с неособыми индексами $i_v < j_k$, а вектор c_{j_k} ортогонален этому подпространству, причем $\|c_{j_k}\| \leq \sqrt{m\delta}$. Представим теперь каждый вектор a_{j_k} с особым индексом в виде

$$a_{j_k} = b'_{j_k} + c'_{j_k}, \quad (1.3.12)$$

где вектор c'_{j_k} ортогонален подпространству, натянутому на все векторы a_{i_v} с неособыми индексами i_1, i_2, \dots, i_r , и

$$b'_{j_k} = \sum_{v=1}^r \gamma_{j_k}^{(v)} a_{i_v}. \quad (1.3.13)$$

Очевидно,

$$\|c'_{j_k}\| \leq \|c_{j_k}\| \leq \sqrt{m\delta}. \quad (1.3.14)$$

Вернемся теперь к системе (1.3.2) и подставим в нее величины $\tau^{(k)}$, найденные с помощью описанного выше алгоритма. Уравнения, номера которых равны неособым индексам, очевидно, будут удовлетворены. Рассмотрим j_k -е уравнение с особым индексом

$$\sum_{v=1}^r a_{j_k i_v} \tau^{(i_v)} = \psi^{(j_k)}.$$

Здесь $a_{j_k i_v} = m^{-1}(a_{j_k}, a_{i_v})$, $\psi^{(j_k)} = m^{-1}(a_{j_k}, f)$.

Подставив сюда вместо вектора a_{j_k} выражение (1.3.12), получим для невязки r_{j_k} формулу $r_{j_k} = r'_{j_k} - m^{-1}(c'_{j_k}, f)$, где

$$r'_{j_k} = m^{-1} \sum_{v=1}^r (b'_{j_k}, a_{i_v}) \tau^{(i_v)} - m^{-1}(b'_{j_k}, f).$$

Величина $r'_{j_k} = 0$ в силу (1.3.13). Действительно, система (1.3.2) после вычеркивания уравнений с особыми индексами принимает вид

$$\sum_{k=1}^r a_{i_s k} \tau^{(i_k)} = \psi^{(i_s)}, \quad s = 1, 2, \dots, r,$$

или

$$(a_{i_s}, [\sum_{k=1}^r a_{i_k} \tau^{(i_k)} - f]) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, r,$$

т. е. вектор $\sum_{k=1}^r a_{i_k} \tau^{(i_k)} - f$ ортогонален любому вектору a_{i_s} с неособым индексом, а следовательно, и вектору b'_{j_k} , являющемуся линейной комбинацией векторов a_{i_s} . Таким образом, для невязки r_{j_k} получаем оценку

$$|r_{j_k}| \leq m^{-1} \|c_{j_k}\| \|f\| \leq \sqrt{\delta m^{-1}} \|f\| \leq C_f \sqrt{\delta},$$

$$\text{где } C_f = \max_{x \in R^q} |f(x)|.$$

Покажем, что найденные $\tau^{(i_1)}, \dots, \tau^{(i_r)}$ ограничены равномерно по m . Из оценки (1.3.11) последовательно получим

$$\Gamma(a_{i_1}) > m\delta, \quad \Gamma(a_{i_1}, a_{i_2}) \geq m\delta \Gamma(a_{i_1}), \dots$$

Отсюда

$$\Gamma(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) > m^r \delta^r. \quad (1.3.15)$$

Если из системы (1.3.2) вычеркнуть все уравнения, номера которых соответствуют особым индексам j_1, j_2, \dots, j_q , а в оставшихся уравнениях положить $\tau^{(j_1)} = \dots = \tau^{(j_q)} = 0$, то получим систему уравнений с определителем $\Delta_r = m^{-r} \Gamma(a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$. В силу (1.3.15) $\Delta_r > \delta^r$. Обозначая матрицу Грама, соответствующую определителю Δ_r , через A_r , будем иметь

$$\|A_r^{-1}\| \leq C_1 \Delta_r^{-r} \max_{k, x} |a_k(x)|^2 \leq C \delta^{-r},$$

где C зависит лишь от величины

$$\max_{k, x} |a_k(x)|, \quad k = 1, \dots, N, \quad x \in R^q, \quad \text{и } \max_{x \in R^q} |f(x)|,$$

т. е. $\|\tau\| \leq C \delta^{-r}$, что и требовалось показать.

Геометрическая интерпретация алгоритма «Гauss»

Даны N векторов a_1, a_2, \dots, a_N , каждый из которых имеет m компонент: $a_i^* = (a_i(x_1), \dots, a_i(x_m))$, $i = 1, 2, \dots, N$, и m -компонентный вектор f , $f^* = (f(x_1), \dots, f(x_m))$. Требуется найти ортогональную проекцию вектора f в подпространство, натянутое на векторы a_1, a_2, \dots, a_N . Именно такой смысл имеет решение системы (1.3.2). Согласно алгоритму задаемся числом $\delta > 0$ и начинаем проверять, велика ли норма вектора a_1 . Если $\|a_1\| \leq \delta m$, вектор a_1 отбрасываем и переходим к рассмотрению вектора a_2 . Если же $\|a_1\| > \delta m$, то вычислим отношение площади параллелограмма, образованного векторами a_1, a_2 , к квадрату длины вектора $\|a_1\|^2$, т. е. величину $\Gamma(a_1, a_2) \|a_1\|^{-2}$. Если эта величина меньше или равна δm , вектор a_2 больше не рассматривается и операция повторяется с вектором a_3 . Если же величина окажется большей δm , вычисляется отношение объема $(\Gamma(a_1, a_2, a_3))$ к площади $\Gamma(a_1, a_2)$ и т. д. На каждом шаге оценивается отношение очередного объема к предыдущему объему, образованному «невыврожденными» векторами. При нормированных векторах отношение таких объемов характеризует угол, образуемый между очередным испытываемым вектором и подпространством, натянутым на уже отобранные векторы. Поэтому, если угол между новым вектором и подпространством, натянутым на уже отобранные, мал, вектор отбраковывается, в противном случае коллекция отобранных векторов пополняется. Отобранные векторы «сильно» независимы и «смотрят» в разные стороны. Когда отбор закончен, исходная задача заменяется следующей: отыскивается ортогональная проекция вектора f на линейную оболочку отобранных векторов, что может быть сделано с помощью обычного метода Гаусса или любым другим стандартным способом. Теорема утверждает, что так найденное решение является близким к точному в смысле малости невязки. Этот результат также геометрически очевиден: невязка определяется скалярным произведением «отбракованного» вектора a_{j_k}

на разность между вектором f и его ортогональной проекцией в подпространство, натянутое на отобранные векторы. Но по способу «отбраковки» вектор a_{j_k} имеет малую проекцию b'_{j_k} на направление, ортогональное указанному подпространству. Поэтому величина

$$(f - \sum_{s=1}^r \tau^{(s)} a_{i_s}, a_{j_k}) = (f - \sum_{s=1}^r \tau^{(s)} a_{i_s}, b'_{j_k})$$

будет также мала. Это геометрическое рассуждение незначительно отличается от строгого доказательства малости невязки. В алгоритме, кроме этого, применен метод последовательного преобразования системы к треугольному виду, позволяющий просто найти нужную проекцию вектора f .

ГЛАВА 2. АЛГОРИТМЫ ОБУЧЕНИЯ С ПООЩРЕНИЕМ

Ниже детально изучаются алгоритмы с поощрением в смысле определения 1.2.1. Формулируется и доказывается основная теорема о КСА, а затем подробно рассматриваются вытекающие из нее следствия. Получаемые ниже алгоритмы родственные т. н. релаксационным алгоритмам, но имеют специфику, связанную со сходимостью в конечное число шагов. Приводится рекуррентный алгоритм наилучшего разделения двух линейно-разделимых множеств и его модификация на случай бинарного пространства признаков.

§ 2.1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Предположим, что на множестве $X \times R^p$, $X \subseteq R^q$, задана вещественная функция $\varphi(x, \tau)$, $x \in X$, $\tau \in R^p$, со следующими свойствами:

1. $\varphi(x, \tau)$ ограничена равномерно по $x \in X$, $|\varphi(x, \tau)| < C_1$, дифференцируема по τ при каждом x и евклидова норма $\|\nabla_{\tau} \varphi(x, \tau)\|$ ее градиента ограничена, $\|\nabla_{\tau} \varphi(x, \tau)\| < C_2$, где C_1, C_2 — положительные постоянные, не зависящие от выбора $x \in X$.

2. Существуют вектор $\tau_* \in R^p$, и число $\varepsilon_* > 0$, для которого при всех $x \in X$ справедливы неравенства $\varphi(x, \tau_*) \geq \varepsilon_* > 0$.

3. Для любой пары точек $[x, \tau]$, $x \in X$, $\tau \in R^p$, удовлетворяющих условию $\varphi(x, \tau) \leq 0$, справедливо неравенство

$$(\nabla_{\tau} \varphi(x, \tau), \tau_* - \tau) \geq \varphi(x, \tau_*) - \varphi(x, \tau).$$

Пусть τ_1 — произвольный вектор из R^p и $\{x_n\}$ — произвольное счетное множество из X . Определим алгоритм с поощрением вида

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \alpha_n \theta_n \nabla_{\tau} \varphi(x_n, \tau_n), \quad (2.1.1)$$

где

$$\theta_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x_n, \tau_n) \leq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi(x_n, \tau_n) > 0, \end{cases}$$

и α_n — некоторая числовая последовательность.

Теорема 2.1.1. При выполнении сформулированных выше условий 1 — 3 алгоритм (2.1.1) является конечно-сходящимся, если

$$\alpha_n = \alpha_n^{-1} - \beta_n \varphi(x_n, \tau_n) \|\nabla_{\tau} \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2} \quad (2.1.2)$$

либо

$$\alpha_n = \max\{\alpha_n^{-1}, -\beta_n \varphi(x_n, \tau_n) \|\nabla_{\tau} \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2}\}, \quad (2.1.3)$$

где β_n — произвольные числа из замкнутого интервала $[0, 2]$ и

$$\alpha_n = 1 + \sum_{k=1}^n \theta_k \quad (x_{n+1} = x_n + \theta_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 = 1).$$

Для числа κ_n справедлива оценка

$$\kappa_n \leq \exp(\varepsilon_*^{-1} [\|\tau_1 - \tau_*\|^2 + (1+C)^2 \overline{\|\varepsilon_*^{-1} C^2\|}]) + \overline{\|\varepsilon_*^{-1} C^2\|}, \quad (2.1.4)$$

где $C = \max\{C_1, C_2\}$ и $\overline{\|\varepsilon_*^{-1} C^2\|}$ — целая часть числа $\varepsilon_*^{-1} C^2$.

Доказательство теоремы будет приведено в § 2.3, здесь ограничимся обсуждением условий теоремы и некоторыми связанными с ней замечаниями. Условие 1 обычно малоограничительно. Из доказательства теоремы будет следовать, что его можно ослабить в различных направлениях, требуя, например, дифференцируемость φ по τ лишь при «почти всех» x из X и т. д. Условие 2 является естественным, поскольку требует существования искомого вектора τ , правда, требование приводится с некоторым усилением (вектор τ_* удовлетворяет неравенствам $\varphi(x, \tau) > 0$ с «запасом»). Условие 3 — условие типа вогнутости: если функция $\varphi(x, \tau)$ вогнута по τ при каждом $x \in X$, то неравенство в условии 3 справедливо при любых τ, τ_* . Это условие характерно для градиентных и релаксационных алгоритмов, и существенно его ослабить не удастся. Если множество решений рассматриваемых неравенств достаточно обширно (содержит достаточно большой шар), то можно допустить соответствующие отклонения от условия типа вогнутости.

Сформулированный алгоритм имеет характерную для алгоритмов с поощрением форму: вектор τ не изменяется, если очередное неравенство выполнено, и изменяется в направлении наибольшего увеличения функции $\varphi(x, \tau)$, если очередное неравенство не выполнено. «Исюминка» теоремы 2.1.1 состоит в доказательстве того, что существуют постоянные, характеризующие величину шага в направлении градиента и обеспечивающие сходимость в конечное число шагов, и эти постоянные могут быть просто выражены через величины, известные на каждом шаге алгоритма. Сам термин «конечно-сходящиеся алгоритмы» введен В. А. Якубовичем, им же была предложена общая схема получения подобных процедур.

Числа κ_n^{-1} в алгоритме (2.1.1) — (2.1.2) обеспечивают конечную сходимость при любом сколь угодно малом диаметре множества решений рассматриваемых неравенств. В ряде задач естественно предполагать известным радиус шара, вписанного в такое множество. В этом случае в качестве величин κ_n^{-1} можно выбирать любую постоянную, не превосходящую радиуса шара, конечная сходимость будет гарантирована по-прежнему.

Метод доказательства теоремы 2.1.1 может быть использован и в ряде таких случаев, которые трудно объединить в рамках одной теоремы. Некоторые из этих случаев будут рассмотрены позднее. Учитывая особенности задачи, иногда удается упростить рекуррентную процедуру и получить более точные оценки для числа κ_n изменений (коррекций) вектора τ за n шагов алгоритма.

§ 2.2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

В § 1.1 показывалось, как задача о построении опознающей системы, способной классифицировать изображения двух классов, сводилась к решению неравенств типа **A** или **B**_e. Покажем, как можно построить КСА нахождения этих неравенств с помощью основной теоремы.

Алгоритм «Ява». Требуется найти вектор τ такой, что выполнены неравенства

$$(b(x), \tau) - \gamma(x) > 0 \quad (2.2.1)$$

для всех значений x из некоторого множества X . Здесь $b(x)$ и $\gamma(x)$ — векторная и скалярная функции аргумента x и (b, τ) означает скалярное произведение векторов b и τ . Рассматривая функцию $\varphi(x, \tau) = (b(x), \tau) - \gamma(x)$, приходим к задаче нахождения вектора τ такого, что $\varphi(x, \tau) > 0, \forall x \in X$, т. е. к задаче, решаемой основной теоремой. Проверим, что в данном случае означают условия основной теоремы.

$\varphi(x, \tau)$, очевидно, дифференцируема по τ и $\nabla_{\tau} \varphi(x, \tau) = b(x)$. Если предположим, что функция $\gamma(x)$ на множестве X ограничена, то первое условие теоремы сводится к тому, чтобы векторная функция $b(x)$ была ограничена на X .

Будем предполагать, что система (2.2.1) разрешима в усиленном смысле, т. е. существует вектор τ_* такой, что

$$(b(x), \tau_*) - \gamma(x) \geq \epsilon_* > 0, \forall x \in X,$$

т. е. множество решений рассматриваемых неравенств — открытое множество. Это обеспечивает выполнение второго условия теоремы. Третье условие выполнено автоматически, поскольку требуемое неравенство в данном случае является тождеством.

Итак, при выполнении приведенных выше условий применима основная теорема. Алгоритм (2.1.1) — (2.1.2) имеет в данном случае вид

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} \tau_n, & \text{если } (b(x_n), \tau_n) - \gamma(x_n) > 0, \\ \tau_n + \alpha_n b(x_n), & \text{если } (b(x_n), \tau_n) - \gamma(x_n) \leq 0, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$n = 1, 2, \dots; \tau_1$ — произвольный вектор.

Здесь α_n в соответствии с (2.1.2) будет

$$\alpha_n = \kappa_n^{-1} - \beta_n \|b(x_n)\|^{-2} [(b(x_n), \tau_n) - \gamma(x_n)]. \quad (2.2.3)$$

Алгоритм (2.2.2) — (2.2.3) позволяет в конечное число шагов найти некоторое решение линейной неоднородной системы неравенств. Действительно, пусть дана система N линейных неоднородных неравенств. Продолжим ее циклически, т. е. после последнего неравенства системы вновь пишем первое и т. д. Получим бесконечную систему неравенств. Если исходная система неравенств разрешима, то все условия основной теоремы выполнены и ее алгоритм позволяет в конечное число шагов

найти вектор τ , который удовлетворяет всем «оставшимся» неравенствам бесконечной системы (см. определение 1.2.2) и, следовательно, дает решение исходной системы N неравенств. Алгоритм 2.2.2—2.2.3 (под названием «Ява») был реализован на ЭВМ и показал свою практическую пригодность для нахождения решения систем неравенств высокого порядка.

Геометрическая интерпретация алгоритма «Ява». При выполнении очередного неравенства к вектору τ_n добавляется вектор, пропорциональный $b(x_n)$. Эта добавка зависит от выбора величин β_n . Обычно первое слагаемое в формуле (2.2.3) зна-

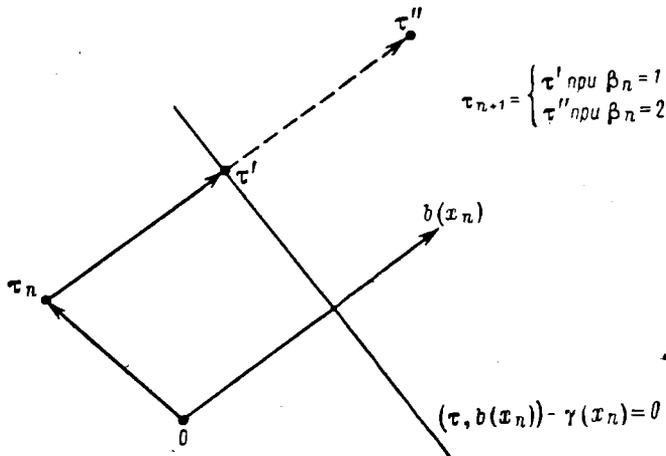


Рис. 2.2.1. Геометрическая интерпретация алгоритма «Ява»

чительно меньше второго слагаемого, и при геометрической интерпретации мы им будем пренебрегать, хотя сходимость в конечном числе шагов (в теоретическом плане) обеспечивается именно им.

При $\beta_n \equiv 1$ вектор τ_{n+1} является проекцией вектора τ_n на плоскость, определяемую вектором $b(x_n)$ и скаляром $\gamma(x_n)$; при $\beta_n \equiv 2$ точка τ_{n+1} является зеркальным отображением точки τ_n относительно указанной плоскости (рис. 2.2.1).

В случае $\gamma(x) \equiv 0$ КСА является

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} \tau_n, & \text{если } (b(x_n), \tau_n) > 0, \\ \tau_n + C \|b(x_n)\|^{-2} b(x_n), & \text{если } (b(x_n), \tau_n) \leq 0, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

где C — произвольная постоянная. Этот результат следует из замечания к основной теореме, если принять $\beta_n \equiv 0$.*) Алгоритм (2.2.4) наиболее известен в теории обучаемых опознающих систем. Впервые он был сформулирован Ф. Розенблаттом как ал-

*) Если однородные неравенства разрешимы и множество решений открыто, то оно, очевидно, содержит шар произвольного радиуса.

горитм обучения персептрона, доказательство его было получено многими авторами различными способами и в разное время.

Если компоненты вектора $b(x)$ суть ± 1 , то $\|b\|^2 = N$ и не зависит от x . Тогда, выбирая в качестве τ_1 вектор с целочисленными компонентами, можно утверждать, что τ_n будет при всех n целочисленным, если выбрать CN^{-1} целым числом. Наиболее простой алгоритм получается при $C = N$.

Алгоритм «Полоска». Требуется найти вектор τ такой, что для любого $x \in X$ выполнены неравенства

$$|f(x) - (a(x), \tau)| < \varepsilon. \quad (2.2.5)$$

Здесь $f(x)$ — скалярная и $a(x)$ — векторная функции аргумента x , (a, τ) — скалярное произведение векторов a и τ . Введем функцию

$$\varphi(x, \tau) = \varepsilon - |f(x) - (a(x), \tau)|. \quad (2.2.6)$$

Задача, как и прежде, переформулируется так: найти вектор τ такой, что $\varphi(x, \tau) > 0, \forall x \in X$. Нетрудно убедиться, что определяемая равенством (2.2.6) функция дифференцируема по τ при всех x , для которых

$$\eta(x, \tau) \triangleq f(x) - (a(x), \tau) \neq 0 \quad (2.2.7)$$

и

$$\nabla_{\tau} \varphi(x, \tau) = [\text{sign } \eta(x, \tau)] a(x). \quad (2.2.8)$$

Проверим выполнимость условий основной теоремы. Если функции $f(x)$ и $a(x)$ ограничены на X , то в проверке нуждается лишь последнее третье условие. По (2.2.8) имеем

$$\begin{aligned} (\nabla_{\tau} \varphi(x, \tau), \tau_* - \tau) &= \text{sign } \eta(x, \tau) (a(x), \tau_* - \tau) = \\ &= \text{sign } \eta(x, \tau) [f(x) - (a(x), \tau)] - [f(x) - (a(x), \tau_*)] = \\ &= |\eta(x, \tau)| - \text{sign } \eta(x, \tau) \text{sign } \eta(x, \tau_*) |\eta(x, \tau_*)|, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

где вектор τ_* удовлетворяет неравенствам $|f(x) - (a(x), \tau_*)| \leq \varepsilon - \varepsilon_*$, $\varepsilon_* > 0$, т. е. удовлетворяет, как и раньше, с „запасом“ системе неравенств (2.2.5). С другой стороны,

$$\varphi(x, \tau_*) - \varphi(x, \tau) = (f(x) - (a(x), \tau)) - (f(x) - (a(x), \tau_*)).$$

Учитывая (2.2.9), видим, что для выполнения 3-го условия основной теоремы достаточно выполнения неравенства

$$\text{sign } \eta(x, \tau) \text{sign } \eta(x, \tau_*) |\eta(x, \tau_*)| \leq |\eta(x, \tau_*)|,$$

которое выполнено очевидным образом для любого $x \in X$.

Алгоритм основной теоремы принимает в данном случае вид

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} \tau_n, & \text{если } |\eta(x_n, \tau_n)| < \varepsilon; \\ \tau_n + [\alpha_n^{-1} + \beta_n \|a(x_n)\|^{-2} (\varepsilon - |\eta(x_n, \tau_n)|)] \text{sign } \eta(x_n, \tau_n) a(x_n), & \text{если } |\eta(x_n, \tau_n)| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

$$(2.2.10)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Здесь, как и прежде, x_n — число изменений вектора τ_n за n шагов алгоритма и $\eta(x, \tau)$ определяется формулой (2.2.7).

Геометрический смысл алгоритма (2.2.10): в пространстве $\{\tau\} = R^p$ неравенства (2.2.5) образуют полосы шириной $\epsilon \|a(x)\|^{-1}$, которые имеют общую точку пересечения (и даже общий „шарик“ радиусом не меньше, чем $\epsilon_* \max_{x \in X} \|a(x)\|^{-1}$). При показе очередной полосы, характеризуемой точкой x_n , вектор τ_n может оказаться внутри или вне полосы. Если точка τ_n оказалась внутри полосы, то $\tau_{n+1} = \tau_n$. Если же вне полосы, то к τ_n прибавляется вектор, направленный вдоль $a(x_n)$ по направлению к полосе. Пренебрегая, как и раньше, для простоты

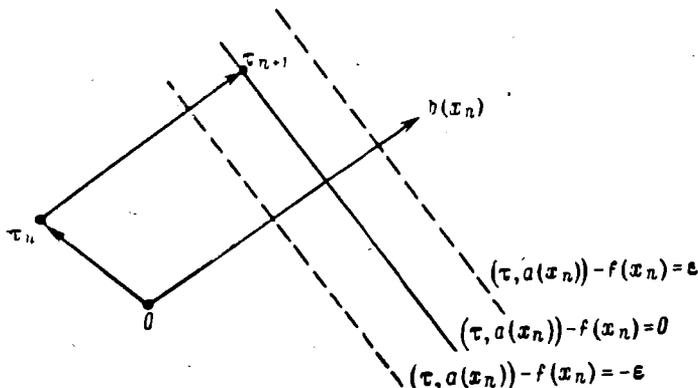


Рис. 2.2.2. Геометрическая интерпретация алгоритма «Полоска»

в алгоритме (2.2.10) „малым“ членом $x_n^{-1} \text{sign } \eta(x_n, \tau_n) \cdot a(x_n)$, видим, что при $\beta_n \equiv 1$ точка τ_n проектируется на ближайшую плоскость, определяющую полосу, а при $\beta_n \equiv 2$ отражается относительно этой плоскости.

Если потребовать выполнения более сильного неравенства для τ_* , именно $|f(x) - (a(x), \tau_*)| < \frac{\epsilon}{2}$, то можно показать, что конечно-сходящимся будет алгоритм, полученный проектированием точки τ_n (если τ_n находится вне очередной полосы) на плоскость $(a(x_n), \tau) - f(x_n) = 0$ (рис. 2.2.2). Аналитически этот алгоритм записывается так:

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} \tau_n, & \text{если } |\eta(x_n, \tau_n)| < \epsilon, \\ \tau_n + x_n^{-1} \text{sign } \eta(x_n, \tau_n) a(x_n) + \|a(x_n)\|^{-2} \eta(x_n, \tau_n) a(x_n), & \text{если } |\eta(x_n, \tau_n)| \geq \epsilon. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Доказательство алгоритма (2.2.11) может быть получено незначительной модификацией оценок в конечной части доказа-

тельства основной теоремы. Эта модификация связана с учетом дополнительного предположения о существовании «усиленного» решения системы неравенств.

Алгоритм (2.2.11) был реализован на ЭВМ (под названием «Полоска») и использован для решения различных задач об аппроксимации функции по ее реализации в некоторых точках. Принцип проектирования в «центр» полосы и привел к названию алгоритма. С точки зрения задачи о построении обучаемой опознающей системы аппроксимация функции $f(x)$ по знаку (задача **A**) более приемлема, чем равномерная аппроксимация (задача **B_ε**), так как приведенные выше алгоритмы сильно разнятся по машинному времени, необходимому для решения соответствующей системы неравенств. Так, алгоритм «Ява» в ряде практических задач позволял найти решения в два или даже три раза быстрее, чем алгоритм «Полоска». При этом следует помнить, что в задачах о разделении двух классов изображений функция $f(x)$ двузначна (см. § 1.1). Поэтому из разрешимости задачи **B_ε** (при $\epsilon < 1$) следует разрешимость задачи **A**, а обратного может и не быть.

Алгоритм «Отражение». Приведем еще алгоритм разделения двух множеств плоскостью, в котором функция $\varphi(x, \tau)$ уже не является линейной по τ . Пусть $\varphi(x, \tau)$ имеет вид

$$\varphi(x, \tau) = (b(x), \tau) - \epsilon \|b(x)\| \cdot \|\tau\|, \quad x \in X, \quad \epsilon > 0.$$

Здесь $\nabla_{\tau} \varphi(x, \tau) = b(x) - \epsilon \|b(x)\| \cdot \|\tau\|^{-1} \tau$ при $\tau \neq 0$. Предположим, как и раньше, что система неравенств

$$(b(x), \tau) \geq \epsilon \|b(x)\| \cdot \|\tau\|, \quad \forall x \in X, \quad (2.2.12)$$

разрешима в усиленном смысле. Именно, пусть существует вектор τ_* такой, что $(b(x), \tau_*) - \epsilon \|b(x)\| \cdot \|\tau_*\| \geq \epsilon_* > 0$. Тогда можно убедиться в применимости основной теоремы, и рекуррентный алгоритм (2.1.1)–(2.1.2) принимает вид

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} \tau_n, & \text{если } (b(x_n), \tau_n) > \epsilon \|b(x_n)\| \cdot \|\tau_n\|, \\ \left(1 - \frac{\epsilon}{\|\tau_n\|} \|b(x_n)\|\right) \tau_n + \\ + \left[x_n^{-1} - \beta_n \cdot \frac{(b(x_n), \tau_n) - \epsilon \|b(x_n)\| \cdot \|\tau_n\|}{\|b(x_n)\|^2 (1 + \epsilon^2) - 2\epsilon \|\tau_n\|^{-1} \|b(x_n)\| (b(x_n), \tau_n)} \right] b(x_n), & \\ \text{если } (b(x_n), \tau_n) \leq \epsilon \|b(x_n)\| \cdot \|\tau_n\|. \end{cases} \quad (2.2.13)$$

Геометрическая интерпретация алгоритма. В данном случае множество изображений X заключено в конусе раствора ϵ . Задача о нахождении решения системы неравенств (2.2.12) возникает в задаче о разделении двух множеств, которые могут иметь общую точку (например, в нуле), но при этом существует плоскость, разделяющая эти множества.

Итак, задача состоит в нахождении конуса заданного раствора ε , содержащего заданное множество X . Пусть после $(n-1)$ шагов алгоритма получен вектор τ_n . При поступлении на вход системы изображения x_n может оказаться, что точка τ_n лежит внутри или вне конуса, определяемого уравнением

$$(b(x_n), \tau) - \varepsilon \|b(x_n)\| \cdot \|\tau\| = 0. \quad (2.2.14)$$

Если τ_n находится внутри конуса, то $\tau_{n+1} = \tau_n$, если же вне, то к τ_n добавляется вектор, направленный внутрь этого конуса. Величина добавки зависит от выбора чисел β_n в алгоритме (2.2.13). Отбрасывая для простоты член с x_n^{-1} в алгоритме (2.2.13) и полагая $\beta_n \equiv 2$, нетрудно убедиться, что τ_{n+1} получа-

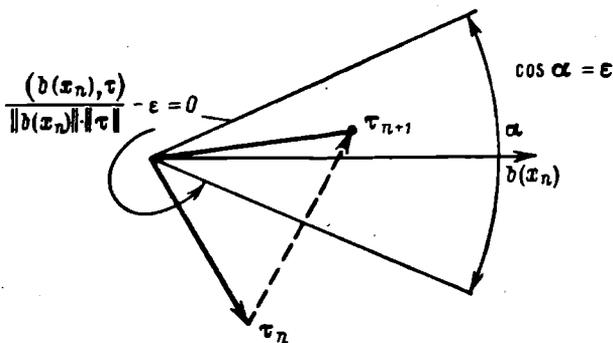


Рис. 2.2.3. Геометрическая интерпретация алгоритма «Отражение» ($\beta_n \equiv 2$)

ется как симметричное изображение τ_n относительно конуса (2.2.14) (рис. 2.2.3). При этом, разумеется, $\|\tau_{n+1}\| = \|\tau_n\|$, так что в процессе построения последовательности τ_1, τ_2, \dots мы никогда не попадем в точку $\tau = 0$, где градиент функции $\varphi(x, \tau)$ не существует. Способ получения точки τ_{n+1} как отражение τ_n и дал основание назвать этот алгоритм «Отражением». При $\varepsilon = 0$ приходим к однородной системе неравенств, а алгоритм (2.2.13) переходит в частный случай алгоритма «Ява».

Алгоритм «Отражение» полезен в следующих случаях. Во-первых, он позволяет разделить множества, которые могут неограниченно сближаться, но так, что проекции этих множеств на единичную сферу разделены положительным расстоянием. Во-вторых, при построении разделяющей плоскости по тренировочному множеству естественно требовать, чтобы эта плоскость находилась по возможности дальше от тренировочного множества. Это требование возникает из условия надежности работы системы в режиме экзамена. Производя перебор параметра ε в неравенствах (2.2.12), можно с помощью алгоритма (2.2.13) пытаться найти решение системы неравенств с возможно боль-

шим значением ϵ . Значение полученного параметра ϵ при этом и будет тем «запасом надежности», о котором говорилось выше. В этом случае находится не просто плоскость, отделяющая точки множества $\{b(x)\}$, $x \in X$, от нуля, но и плоскость, которая эти точки отделяет от нуля и проходит от множества $\{b(x)\}$, $x \in X$ на расстоянии, не меньшем ϵ .

Алгоритм «Надежное разделение». Рассмотрим КСА, связанный с функцией $\varphi(x, \tau) = (b(x), \tau) - (\tau, \tau)$, $x \in X$. Здесь $\nabla_{\tau} \varphi(x, \tau) = b(x) - 2\tau$. Предполагая, что существует вектор τ_* , для которого $(b(x), \tau_*) - (\tau_*, \tau_*) \geq \epsilon_*$ для некоторого $\epsilon_* > 0$ и любого $x \in X$, а также делая обычное предположение об ограниченности множества $\{b(x) | x \in X\}$, легко убеждаемся в применимости основной теоремы. Алгоритм (2.1.1)–(2.1.2) принимает такой вид (τ_1 — произвольный вектор):

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} \tau_n, & \text{если } (b(x_n), \tau_n) > (\tau_n, \tau_n), \\ \tau_n + \left[x_n^{-1} - \beta_n \frac{(b(x_n), \tau_n) - \|\tau_n\|^2}{\|b(x_n) - 2\tau_n\|^2} \right] (b(x_n) - 2\tau_n), & \text{если } (b(x_n), \tau_n) \leq (\tau_n, \tau_n), \end{cases} \quad (2.2.15)$$

$n = 1, 2, \dots$

Алгоритм (2.2.15) также дает возможность решить задачу о нахождении решения системы неравенств $(b(x), \tau) > 0$. При этом автоматически находится плоскость, которая не только отделяет нуль от множества $\{b(x) | x \in X\}$, но и проходит от этого множества на расстоянии, не меньшем $\|\tau\|$. Как говорилось при описании предыдущего алгоритма, это дает «запас надежности» при работе системы в режиме экзамена.

Аналогично может быть построен КСА для функции $\varphi(x, \tau) = (b(x), \tau) - \epsilon \|\tau\|$, $\epsilon \geq 0$, который позволяет с помощью перебора «оптимизировать» выбор параметра ϵ с целью повышения надежности работы опознающей системы. Здесь $\nabla_{\tau} \varphi(x, \tau) = b(x) - \epsilon \|\tau\|^{-1} \tau$, и после соответствующих предположений о существовании решения (в усиленном смысле) системы неравенств $\varphi(x, \tau) > 0$ и ограниченности векторной функции $b(x)$, $x \in X$, нетрудно выписать соответствующий конечно-сходящийся алгоритм для нахождения нужного значения вектора параметров τ .

Отметим, что в перечисленных выше алгоритмах функция $\varphi(x, \tau)$ не является ограниченной при всех τ или не имеет градиента при некоторых τ . Из доказательства теоремы будет видно, что достаточно потребовать ограниченности $\varphi(x, \tau)$ и существования ограниченного градиента этой функции лишь в некоторой области по τ , но при этом требуется следить, чтобы последовательность τ_1, τ_2, \dots не выходила из этой области. Для приведенных выше различных функций ограниченность по τ была в любой ограниченной области, а последовательность τ_1, τ_2, \dots начиная с некоторого номера r приближалась монотонно к вектору τ_* ,

так что достаточно было рассматривать эту функцию лишь в шаре:

$$\|\tau - \tau_*\| \leq \max_{k < r} \|\tau_k - \tau_*\|.$$

Аналогично обстояло дело и с ограниченностью градиента по τ . Там также члены последовательности τ_1, τ_2, \dots находились в области, где градиент существует и равномерно по τ ограничен.

§ 2.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

В основе доказательства теоремы 2.1.1 лежит идея, связанная с убыванием неотрицательной квадратичной формы на «траекториях» порождаемого алгоритмом процесса. Подобная идея составляет сущность знаменитого прямого метода Ляпунова в исследовании устойчивости решений дифференциальных уравнений. Здесь она реализуется в следующем простом утверждении.

Лемма 2.3.1. Предположим, что при

$$\varphi(x_n, \tau_n) \leq 0 \quad (2.3.1)$$

справедлива оценка

$$\|\tau_* - \tau_n\|^2 - \|\tau_* - \tau_{n+1}\|^2 \geq \epsilon_n, \quad (2.3.2)$$

причем $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = \infty$. Тогда условие (2.3.1) может быть выполнено не более чем для конечного числа пар (x_n, τ_n) , и для числа x_n пар, удовлетворяющих неравенству (2.3.1), справедлива оценка $x_n \leq r$, где r — наименьшее целое, для которого справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^r \epsilon_n \geq \|\tau_* - \tau_1\|^2. \quad (2.3.3)$$

Лемма допускает ясную геометрическую интерпретацию. Неотрицательная функция $V(\tau) = \|\tau_* - \tau\|^2$ в силу (2.3.2) убывает на «траектории» τ_1, τ_2, \dots , составленной из векторов, удовлетворяющих неравенству (2.3.1), причем каждое изменение допускает снизу оценку ϵ_n . Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = \infty$, а величина $V(\tau)$ неотрицательна, то траектория τ_1, τ_2, \dots может состоять лишь из конечного числа различных членов. Формальное доказательство повторяет сказанное. Действительно, суммируя неравенства (2.3.2), получим оценку

$$\|\tau_* - \tau_1\|^2 - \|\tau_* - \tau_{n+1}\|^2 \geq \sum_{k=1}^n \epsilon_k, \quad (2.3.4)$$

откуда

$$\|\tau_* - \tau_{n+1}\|^2 \leq \|\tau_* - \tau_1\|^2 - \sum_{k=1}^n \epsilon_k. \quad (2.3.5)$$

Поскольку $\sum_{k=1}^n \epsilon_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$, то неравенство (2.3.5) становится противоречивым, если n достаточно велико. Оценкой числа n ,

очевидно, может быть любое число r , для которого справедливо неравенство (2.3.3). Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы. Для этого предположим, что на некотором n -м шаге алгоритма выполнено неравенство

$$\varphi(x_n, \tau_n) \leq 0. \quad (2.3.6)$$

Постараемся найти величины ε_n , удовлетворяющие условию леммы, и числа α_n в алгоритме (2.1.1) такие, что вполне неравенство $V(\tau_n) - V(\tau_{n+1}) \equiv \|\tau_* - \tau_n\|^2 - \|\tau_* - \tau_{n+1}\|^2 \geq \varepsilon_n$, или, учитывая формулу (2.1.1), $\theta_n [2\alpha_n (\tau_* - \tau, \nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)) - \alpha_n^2 \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^2] \geq \varepsilon_n$. Получили квадратное неравенство для определения чисел α_n . Учитывая условие 3 теоремы, можем упростить это неравенство:

$$\theta_n [\alpha_n^2 \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^2 + 2\alpha_n [\varphi(x_n, \tau_n) - \varphi(x_n, \tau_*)] + \varepsilon_n] \leq 0. \quad (2.3.7)$$

Решением неравенства (2.3.7) являются все числа α_n из интервала

$$\alpha_n^- \leq \alpha_n \leq \alpha_n^+, \quad (2.3.8)$$

где

$$\alpha_n^\pm = \theta_n \frac{\varphi(x_n, \tau_*) - \varphi(x_n, \tau_n)}{\|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^2} [1 \pm \sqrt{1 - \delta_n}], \quad (2.3.9)$$

$$\delta_n = \varepsilon_n \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^2 [\varphi(x_n, \tau_*) - \varphi(x_n, \tau_n)]^{-2}.$$

Таким образом, если числа α_n выбраны из интервала (2.3.8), то справедливы будут неравенства (2.3.2), и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ расходящийся, то выполнены условия леммы. К сожалению, числа α_n^\pm зависят от неизвестной величины τ_* , поэтому пока алгоритмом (2.1.1) при $\alpha_n = \alpha_n^\pm$ воспользоваться нельзя. Постараемся, сужая интервал (2.3.8), получить оценки для чисел α_n , не содержащие неизвестных величин. Будем предполагать, что величины ε_n удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_n \leq C_2^{-2} \varepsilon_n^{2\theta_n}, \quad (2.3.10)$$

где ε_* и C_2 — постоянные, фигурирующие в первом условии теоремы. В силу (2.3.9) имеем $\delta_n \leq \varepsilon_n C_2^{2\varepsilon_n^{-2}} \leq 1$ (в формулах (2.3.8)–(2.3.9) рассматривается случай, когда $\varphi(x_n, \tau_n) \leq 0$), и, следовательно, справедлива оценка $1 - \delta_n \leq \sqrt{1 - \delta_n}$. Теперь из (2.3.9) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_n^+ &\geq \theta_n \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2} [\varphi(x_n, \tau_*) - \varphi(x_n, \tau_n)] (2 - \delta_n) = \\ &= -2\theta_n \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2} \varphi(x_n, \tau_n) + 2\theta_n \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2} \varphi(x_n, \tau_*) - \\ &\quad - \delta_n \theta_n \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2} [\varphi(x_n, \tau_*) - \varphi(x_n, \tau_n)] \geq \\ &> -\theta_n \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2} \varphi(x_n, \tau_n) + 2\varepsilon_* \theta_n C_2^{-2} - \\ &\quad - \varepsilon_n \theta_n \varepsilon_*^{-1} \geq -\theta_n \theta_n \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2} \varphi(x_n, \tau_n) + \varepsilon_n \theta_n \varepsilon_*^{-1}, \quad (2.3.11) \end{aligned}$$

где β_n — произвольные числа, для которых выполнены неравенства $0 \leq \beta_n \leq 2$, C_2 — постоянная из условия 1 теоремы. При выводе оценки (2.3.11) использовалось неравенство (2.3.10). Аналогично оценим α_n^- сверху:

$$\begin{aligned} \alpha_n^- &\leq \delta_n \theta_n \|\nabla_{\tau} \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2} [\varphi(x_n, \tau_*) - \varphi(x_n, \tau_n)] = \\ &= \varepsilon_n \theta_n [\varphi(x_n, \tau_*) - \varphi(x_n, \tau_n)]^{-1} \leq \varepsilon_n \theta_n \varepsilon_*^{-1}. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Выберем в качестве ε_n величину

$$\varepsilon_n = \varepsilon_* \theta_n x_n^{-1}, \quad (2.3.13)$$

тогда при достаточно больших n будут выполнены неравенства (2.3.10) и

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \theta_k = \varepsilon_* \sum_{k=1}^n \theta_k x_k^{-1} = \varepsilon_* \sum_{k=1}^{x_n} \frac{1}{k} \rightarrow \infty \text{ при } x_n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, из полученных оценок (2.3.11)–(2.3.12) следует, что при числах α_n , удовлетворяющих неравенствам

$$\theta_n x_n^{-1} \leq \alpha_n \leq \theta_n \max \{ -\beta_n \|\nabla_{\tau} \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2} \varphi(x_n, \tau_n); x_n^{-1} \}$$

либо равных

$$\alpha_n = [x_n^{-1} - \beta_n \|\nabla_{\tau} \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2} \varphi(x_n, \tau_n)] \theta_n,$$

выполнены условия леммы, что и доказывает теорему.

Для числа x_n изменений вектора τ_n за n шагов алгоритма с учетом (2.3.6) и (2.3.13) получаем оценку

$$V(\tau_1) \equiv \|\tau_* - \tau_1\|^2 \leq \varepsilon_* \sum_{k=1}^r \frac{1}{k} = \varepsilon_* (\ln r + C_0 + \gamma_r),$$

где $C_0 = 0,558 \dots$ — постоянная Эйлера и $\gamma_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Отсюда получаем

$$x_n \lesssim \exp \{ \varepsilon_*^{-1} V(\tau_1) - 1 \} \lesssim 2^{-1} \exp \varepsilon_*^{-1} V(\tau_1).$$

Полученная оценка справедлива в предположении, что числа α_n попадают в нужные интервалы при всех n начиная с $n=1$ (чем «обеспечивается» справедливость неравенства (2.3.2)). Для этого достаточно, чтобы были справедливы неравенства (см. (2.3.10) и (2.3.13)) $x_n^{-1} \leq \varepsilon_* C_2^{-2}$. Действительно, при выполнении последних неравенств получаем $\delta_n \leq 1$, что и было использовано при получении оценок для чисел α_n^{\pm} . Поскольку числа x_n возрастают, то эти неравенства удовлетворялись начиная с некоторого n , что и доказывало конечную сходимость алгоритма. Вообще говоря, за первые N_0 изменений вектора τ_n , где $N_0 = [\varepsilon_*^{-1} C_2^2]$ ($[a]$ — целая часть числа), норма разности $\|\tau_* - \tau_n\|$ может не убывать, как этого хотелось бы. Оценим возможное увеличение нормы $\|\tau_* - \tau_1\|^2$ за N_0 шагов алгоритма

$$\begin{aligned}
V(\tau_{n+1}) &= V(\tau_n) + 2\alpha_n(\tau_n - \tau_*) \nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n) + \\
&+ \alpha_n^2 \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^2 \leq V(\tau_n) + 2\alpha_n [\varphi(x_n, \tau_n) - \varphi(x_n, \tau_*)] + \\
&+ \alpha_n^2 \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^2 = V(\tau_n) + 2x_n^{-1} [\varphi(x_n, \tau_n) - \varphi(x_n, \tau_*)] - \\
&- 2\beta_n \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\| \Gamma^2 \varphi(x_n, \tau_n) [\varphi(x_n, \tau_n) - \varphi(x_n, \tau_*)] + \\
&+ x_n^{-2} \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^2 - 2\beta_n x_n^{-1} \varphi(x_n, \tau_n) + \\
&+ \beta_n^2 \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^2 \varphi^2(x_n, \tau_n) = V(\tau_n) - \beta_n x_n^{-1} \varphi(x_n, \tau_n) - \\
&- \beta_n (2 - \beta_n) \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^2 \varphi^2(x_n, \tau_n) - 2x_n^{-1} \varphi(x_n, \tau_n) + \\
&+ 2\beta_n \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^2 \varphi(x_n, \tau_n) \varphi(x_n, \tau_*) + \\
&+ (2 - \beta_n) x_n^{-1} \varphi(x_n, \tau_n) + x_n^{-2} \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^2 \leq \\
&\leq V(\tau_n) + 2x_n^{-1} C_1 + x_n^{-2} C_2^2 \leq V(\tau_n) + (1 + x_n^{-1} C)^2,
\end{aligned}$$

поскольку $0 \leq \beta_n \leq 2$ и $\varphi(x_n, \tau_n) \leq 0$. Здесь впервые использовалась оценка $\varphi(x_n, \tau_n) \leq C_1$ (см. условие 1 теоремы) и введено обозначение $C = \max\{C_1; C_2\}$. Таким образом, нужная оценка для числа x_n может быть получена из неравенств $x_n \leq N_0 + N_1$, где N_1 следует определить из условия

$$V(\tau_1) + \sum_{k=1}^{N_0} (x_k^{-1} C + 1)^2 \leq \varepsilon_* \sum_{k=1}^{N_1} k^{-1},$$

а N_0 было определено выше. Так получается оценка числа изменений вектора τ_n за n шагов алгоритма. Производя очевидное округление, приходим к оценке (2.1.4). Теорема доказана.

§ 2.4. ЗАМЕЧАНИЯ К ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ

1°. Свойство конечной сходимости алгоритма (2.1.1)–(2.1.2) основано на выполнении оценки $\varepsilon_n \leq \varepsilon_*^2 C_2^{-2} \theta_n$, где C_2 — постоянная из неравенства $\|\nabla_\tau \varphi(x, \tau)\| \leq C_2$. Если градиент $\nabla_\tau \varphi(x, \tau)$ не ограничен, но величины $C_n = \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|$ удовлетворяют оценке $\varepsilon_n \leq \varepsilon_*^2 C_n^{-2} \theta_n$, то сходимость алгоритма (2.1.1)–(2.1.2) в конечное число шагов по-прежнему будет иметь место. Если, как и раньше, $\varepsilon_n = \varepsilon_* x_n^{-1} \theta_n$, то это означает, что

$$\|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\| \leq \sqrt{\varepsilon_* x_n}. \quad (2.4.1)$$

Итак, если градиент по τ функции $\varphi(x, \tau)$ возрастает в процессе алгоритма не слишком быстро (см. (2.4.1)), то алгоритм (2.1.1)–(2.1.2) является конечно-сходящимся.

2°. Используя конкретные функции $\varphi(x, \tau)$, можно получать более точные оценки числа изменений вектора τ в процессе работы алгоритма. Рассмотрим, например, функцию

$\varphi(x, \tau)$ вида $\varphi(x, \tau) = (x, \tau)$, $x \in X$, где (x, τ) — скалярное произведение векторов x и τ , X — ограниченное множество.

Предположим, что система неравенств относительно вектора τ

$$(x, \tau) > 0, \quad \forall x \in X, \quad (2.4.2)$$

имеет решение τ_* , для которого

$$(x, \tau_*) \geq \delta_* \|\tau_*\|, \quad \forall x \in X, \quad (2.4.3)$$

при некотором $\delta_* > 0$ (если X — конечное множество, то (2.4.3) следует из (2.4.2)). Неравенство (2.4.3) означает, что система неравенств

$$(x, \tau_*) > \varepsilon_* (= \delta_* \|\tau_*\|) \quad (2.4.4)$$

имеет решение для любого сколь угодно большого числа ε_* . Это означает, что в формулах (2.3.11)–(2.3.12) в качестве ε_* может быть выбрано сколь угодно большое число. Поскольку множество X ограничено, то в качестве чисел ε_n в неравенствах (2.3.10) может быть выбрана произвольная ограниченная последовательность чисел ε_n , $\varepsilon_n \leq \varepsilon_* q$. Оценки (2.3.11)–(2.3.12) принимают при этом вид

$$\begin{aligned} \alpha_n^+ &\geq -\beta_n \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2} \varphi(x_n, \tau_n) + \\ &+ \varepsilon_n^{-1} \varepsilon_n \geq \beta_n \|x_n\|^{-2} (x_n, \tau_n) + q, \quad \alpha_n^- \leq q. \end{aligned}$$

Эти неравенства показывают, что алгоритм

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} \tau_n, & \text{если } (x_n, \tau_n) > 0, \\ \tau_n + \gamma_n \|x_n\|^{-1} x_n - \beta_n \|x_n\|^{-2} (x_n, \tau_n) x_n, & \text{если } (x_n, \tau_n) \leq 0, \end{cases}$$

будет конечно-сходящимся при любом выборе чисел γ_n и β_n из интервалов $0 < C \leq \gamma_n \leq q$, $0 \leq \beta_n \leq 2$, C и q — произвольные положительные числа.

При $\beta_n \equiv 0$ и $\gamma_n \equiv q > 0$ получается известный алгоритм обучения перцептрона Розенблатта. Оценка числа x_n коррекций вектора τ_n определяется из неравенства

$$V(\tau_1) \equiv \|\tau_* - \tau_1\|^2 \geq \sum_n^{x_n} \varepsilon_n = \varepsilon_* q x_n,$$

откуда получаем $x_n \leq \varepsilon_*^{-1} q^{-1} V(\tau_1)$. Эта оценка «лучше», чем оценка, приведенная в теореме (2.1.1).

3°. Остановимся еще на одном следствии оценок, полученных при доказательстве основной теоремы. В § 2.2 был рассмотрен алгоритм «Полоска» и указана возможность его реализации в виде алгоритма (2.2.11). Покажем, что алгоритм (2.2.11) будет конечно-сходящимся. Для этого достаточно внимательно рассмотреть полученные оценки (2.3.11)–(2.3.12) для чисел α_n^\pm :

$$\alpha_n^+ \geq -\beta_n \|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^{-2} \varphi(x_n, \tau_n) + 2\varepsilon_* C_2^{-2} - \varepsilon_*^{-1} \varepsilon_n, \quad \alpha_n^- \leq \varepsilon_*^{-1} \varepsilon_n.$$

Так как

$$\begin{aligned}\varphi(x_n, \tau_n) &= \varepsilon - |(a(x_n), \tau_n) - f(x_n)|, \\ \nabla_{\tau} \varphi(x_n, \tau_n) &= -\text{sign} [(a(x_n), \tau_n) - f(x_n)] a(x_n),\end{aligned}$$

то эти оценки можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\alpha_n^+ &\geq \beta_n \|a(x_n)\|^{-2} |(a(x_n), \tau_n) - f(x_n)| + \|a(x_n)\|^{-2} [2\varepsilon_* - \beta_n \varepsilon], \\ \alpha_n^- &\leq \varepsilon_*^{-1} \varepsilon_n.\end{aligned}$$

Если потребовать выполнения неравенства

$$2\varepsilon_* > \mu > \beta_n \varepsilon, \quad (2.4.5)$$

то при $\varepsilon_n = \varepsilon_* x_n^{-1} \theta_n$ (2.2.11) будет КСА при

$$\alpha_n = x_n^{-1} + \beta_n \|a(x_n)\|^{-2} |(a(x_n), \tau_n) - f(x_n)| \theta_n.$$

Напомним, что ε_* — величина из условия $|(a(x_n), \tau_n) - f(x_n)| < \varepsilon - \varepsilon_*$, так что при $\beta_n \equiv 1$ условие (2.4.5) превращается в $2\varepsilon_* > \varepsilon$, т. е. $|(a(x_n), \tau_n) - f(x_n)| < 2^{-1}\varepsilon$, что и предполагалось при написании алгоритма (2.2.11). Заметим, что если $\beta_n \in (0; 2]$, то КСА будет (2.2.11) при

$$\alpha_n = \beta_n \theta_n \|a(x_n)\|^{-2} |(a(x_n), \tau_n) - f(x_n)|,$$

поскольку при $\theta_n = 1$ справедливо неравенство $|(a(x_n), \tau_n) - f(x_n)| > \varepsilon$. В более общем случае достаточно потребовать, чтобы вектор τ_* удовлетворял неравенствам

$$|(a(x), \tau_*) - f(x)| < \varepsilon \gamma,$$

где γ — некоторое число из интервала $(0; 1)$. Приведенные выше рассуждения тогда показывают, что алгоритм

$$\begin{aligned}\tau_{n+1} &= \begin{cases} \tau_n, & \text{если } |\eta(x_n, \tau_n)| < \varepsilon, \\ \tau_n + \beta_n \|a(x_n)\|^{-2} \eta(x_n, \tau_n) a(x_n), & \text{если } |\eta(x_n, \tau_n)| \geq \varepsilon, \end{cases} \\ n &= 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

будет конечно-сходящимся, если числа β_n заключены в интервале $x_n^{-1} \leq \beta_n < \mu < 2(1 - \gamma)$.

4^o. В ряде случаев известно, что $\tau_* \in T$, где T — некоторое множество, и требуется, чтобы итерации τ_n вектора τ_* удовлетворяли условию $\tau_n \in T$ при всех n . Если имеется возможность построить отображение $Q: R^p \rightarrow T$ такое, что

$$\|\tau_* - Q\tau\| \leq \|\tau_* - \tau\| \quad (2.4.6)$$

для $\forall \tau \in R^p$, то нетрудно модифицировать алгоритм теоремы 2.1.1 следующим образом:

$$\tau_{n+1} = Q[\tau_n + \alpha_n \theta_n \nabla_{\tau} \varphi(x_n, \tau_n)], \quad (2.4.7)$$

остальные обозначения прежние. Доказательство сходимости

алгоритма (2.4.7) повторяет доказательство теоремы 2.1.1 с использованием свойства (2.4.6) отображения Q .

Отображение Q удается эффективно построить в задачах следующего типа. Пусть T — выпуклое замкнутое множество в пространстве R^p , имеющее простую конфигурацию (шар, куб и т. д.). Для произвольной точки $\tau \in R^p$ обозначим через $\bar{\tau}$ ближайшую к τ точку из T . Так определенное соответствие порождает отображение $Q: R^p \rightarrow T$, которое легко записать аналитически для множеств T простой конфигурации. Тогда последовательные итерации τ_n , определяемые формулой (2.4.7), не выходя из множества T , а если $\tau_* \in T$ и выполнены остальные условия теоремы 2.1.1, то имеет место (2.4.6) и, следовательно, обеспечивается сходимость процедуры (2.4.7) в конечное число шагов к некоторой точке $\tau_\infty \in T$.

§ 2.5. ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ К ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ОБУЧАЕМЫХ ОПОЗНАЮЩИХ СИСТЕМ

В § 2.2 демонстрировались конкретные КСА, предназначенные в своем большинстве для нахождения решения линейных систем неравенств. Именно к этой задаче сводится в одном из вариантов задача об обучении опознающей системы перцептронного вида. Напомним постановку последней задачи. Имеются два множества (класса) изображений $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, относительно которых предполагается, что они не пересекаются и, более того, что их можно разделить плоскостью, т. е. существует вектор v и число γ , характеризующие плоскость, такие, что

$$\begin{aligned} (x, v) + \gamma > 0, & \text{ если } x \in X^{(1)}, \\ (x, v) + \gamma < 0, & \text{ если } x \in X^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Требуется найти такие v и γ . В перцептронном варианте оценки для v и γ получаются на основе информации о принадлежности к тому или иному классу элементов тренировочной последовательности x_1, x_2, \dots , и требуется найти плоскость $\{v, \gamma\}$, разделяющую соответствующим образом тренировочное множество. Введем функцию (1.1.2), и тогда задача сводится к нахождению решения $\{v, \gamma\}$ системы неравенств

$$f(x_n) [(x_n, v) + \gamma] > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.5.2)$$

Введем обозначения

$$a(x) = \begin{pmatrix} f(x) x \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} v \\ \gamma \end{pmatrix},$$

перепишем неравенства (2.5.2) в виде

$$(a(x_n), \tau) > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.5.3)$$

где (a, τ) обозначает скалярное произведение векторов a, τ ,

определяемое естественным образом. В неравенствах (2.5.3) векторы $a(x_n)$ — заданные, а вектор τ — искомый. Следовательно, задача о построении плоскости, разделяющей два множества, сводится к задаче о нахождении решения однородной системы неравенств, и для достижения этой цели в § 2.2 было сформулировано несколько алгоритмов.

Если требуется построить обучающую машину, разделяющую не два, а несколько классов, то можно поступить следующим образом. Пусть $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(l)}$ — классы изображений. Введем функцию $f(x)$, которая на каждом из классов принимает постоянное свое для каждого класса значение. Если существует вектор τ такой, что для достаточно малого $\epsilon > 0$ разрешима система неравенств

$$|f(x) - (x, \tau)| < \epsilon, \quad \forall x \in X = \bigcup_{i=1}^l X^{(i)}, \quad (2.5.4)$$

то алгоритм «Полоска» позволит найти этот вектор в конечном числе шагов. Однако предположение о разрешимости системы (2.5.4) весьма ограничительно и обычно не выполняется. Предполагая, что каждый класс $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(l)}$ может быть отделен от остальных классов плоскостью, нетрудно, последовательно используя один из алгоритмов нахождения решения однородной системы неравенств, найти все эти плоскости с помощью тренировочной последовательности и построить систему, разделяющую эти классы. Можно, однако, так переформулировать задачу, что она сведется к той, что рассматривалась в основной теореме. Поясним сказанное подробнее.

Будем предполагать, что существует набор $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(l)}$ векторов таких, что справедливы неравенства

$$(x, \tau^{(p)}) > \max_{k \neq p} (x, \tau^{(k)}), \quad \forall x \in X^{(p)}, \quad p = 1, \dots, l. \quad (2.5.5)$$

Введем вектор τ размерности ml , где m — размерность векторов x , $\tau^* = (\tau^{(1)*}, \tau^{(2)*}, \dots, \tau^{(l)*})$, и каждому вектору $x_n \in X^{(p)}$ сопоставим $(l-1)$ векторов $a_i(x_n)$, $i = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, l$, по следующему правилу: вектор $a_i(x_n)$, $i \neq p$, состоит из l векторов длины m , причем на p -м месте стоит вектор x_n , на i -м — вектор $(-x_n)$, а на остальных местах — нуль-векторы. Так каждый член x_n тренировочного множества порождает $(l-1)$ векторов $a_i(x_n)$. Вводя естественным способом скалярное произведение для векторов a_i и τ , нетрудно убедиться, что неравенства (2.5.5) на элементах x_n тренировочного множества примут вид

$$(a_i(x_n), \tau) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, l, \\ n = 1, 2, \dots, \quad (2.5.6)$$

т. е. нахождение вектора τ свелось к нахождению решения однородной системы неравенств (2.5.6). Используя, например,

алгоритм «Ява», получим следующий алгоритм нахождения векторов $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(l)}$: $\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(l)}$ — произвольный набор векторов $\tau^{(i)}$, $i = 1, \dots, l$. Пусть на n -м шаге алгоритма получен набор $\tau_n^{(1)}, \dots, \tau_n^{(l)}$ и появился вектор $x_n \in X^{(p)}$. Тогда, если

$$(x_n, \tau_n^{(p)}) > \max_{k \neq p} (x_n, \tau_n^{(k)}),$$

то

$$\tau_{n+1}^{(i)} = \tau_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Если для некоторого $p_1 \neq p$ окажется $(x_n, \tau_n^{(p)}) \leq (x_n, \tau_n^{(p_1)})$, то

$$\tau_{n+1}^{(i)} = \tau_n^{(i)}, \quad i \neq p_1,$$

$$\tau_{n+1}^{(p)} = \tau_n^{(p)} + [x_n^{-1} - 2^{-1} \beta_n \|x_n\|^{-2} (\tau_n^{(p)} - \tau_n^{(p_1)}, x_n)] x_n,$$

$$\tau_{n+1}^{(p_1)} = \tau_n^{(p_1)} - [x_n^{-1} - 2^{-1} \beta_n \|x_n\|^{-2} (\tau_n^{(p)} - \tau_n^{(p_1)}, x_n)] x_n,$$

где x_n — число изменений вектора τ за n шагов алгоритма. Отметим, что в соответствии с заключением, сделанным в § 2.4 по поводу однородных систем (множество решений которых, если существует, содержит шар сколь угодно большого радиуса), вместо чисел x_n^{-1} могут быть взяты произвольные положительные числа $q_n \geq x_n^{-1}$, ограниченные в совокупности.

§ 2.6. АЛГОРИТМ «НАИЛУЧШЕГО» РАЗДЕЛЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК ДВУХ МНОЖЕСТВ

В § 2.2 уже отмечалось, что для надежности работы опознающей системы, обучаемой различению двух классов изображений, следует выбирать разделяющую плоскость, наиболее удаленную от изображений тренировочного множества. Очевидно, такой плоскостью будет плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего две ближайшие точки выпуклых оболочек $S_0 X^{(1)}$ и $S_0 X^{(2)}$ классов изображений $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, перпендикулярно этому отрезку (рис. 2.6.1).

Ниже приводится рекуррентный алгоритм для нахождения такой плоскости, названный «Оптимальное разделение». Доказательство сходимости алгоритма не укладывается в рамки основной теоремы.

Геометрический смысл алгоритма. Пусть z_1, z_2, \dots — элементы тренировочного множества. Пусть $x_1(y_1)$ — первый элемент тренировочного множества, принадлежащий классу $X^{(1)}$ ($X^{(2)}$). В качестве начального приближения к точкам x_0, y_0 , реализующим расстояние между выпуклыми оболочками классов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, выбираются точки x_1, y_1 .

Пусть на n -м шаге алгоритма получены точки x_n, y_n , аппроксимирующие собой точки x_0, y_0 , и пусть появилось изображение

z_n . Предположим для определенности, что $z_n \in X^{(1)}$. Тогда $y_{n+1} = y_n$, а в качестве x_{n+1} выбирается точка, реализующая расстояние от точки y_n до отрезка, соединяющего точки x_n и z_n (см. рис. 2.6.1).

Если $z_n \in X^{(2)}$, то $x_{n+1} = x_n$, а в качестве y_{n+1} выбирается точка, на которой реализуется наименьшее расстояние от точки x_n до отрезка, соединяющего точку y_n, z_n .

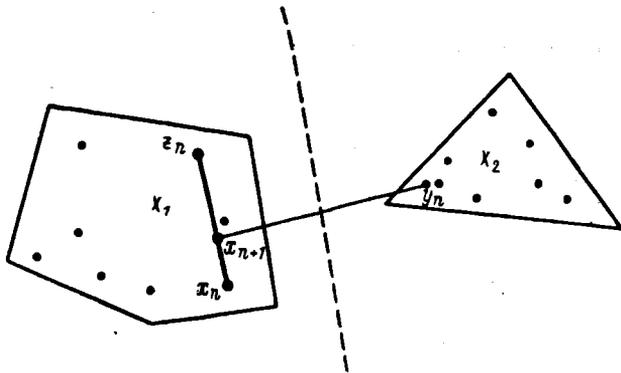


Рис. 2.6.1. Геометрическая интерпретация алгоритма «Оптимальное разделение»

Описание работы алгоритма „Оптимальное разделение“.

Расстояние от точки до заданного отрезка нетрудно вычислить аналитически. Действительно, пусть требуется найти расстояние от заданной точки y_n до отрезка прямой, соединяющего заданные точки x_n и z_n , $x_n \neq z_n$. Это можно записать следующим образом: найти наименьшее значение функции $\rho^2(\mu) = \|y_n - x_n + \mu(x_n - z_n)\|^2$ при изменении μ в интервале $[0, 1]$. Наименьшее значение на всей оси функция $\rho^2(\mu)$ принимает в точке

$$\mu_n^{\min} = \|x_n - z_n\|^{-2} (x_n - y_n, x_n - z_n). \quad (2.6.1)$$

Следовательно, точка x'_n , реализующая наименьшее расстояние от точки y_n до отрезка, соединяющего точки x_n и z_n , имеет вид

$$\text{где } \mu_n = \begin{cases} x'_n = x_n + \mu_n(z_n - x_n), \\ 0, & \text{если } \mu_n^{\min} \leq 0, \\ \mu_n^{\min}, & \text{если } 0 < \mu_n^{\min} \leq 1, \\ 1, & \text{если } \mu_n^{\min} > 1. \end{cases} \quad (2.6.2)$$

Сам алгоритм будет таким: пусть x_n, y_n — точки, аппроксимирующие после n шагов алгоритма точки x_0, y_0 , и $z_n \in X^{(1)}$.

Тогда

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n, \\ x_{n+1} &= x_n + \mu_n (z_n - x_n), \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

где значения μ_n определяются формулами (2.6.1)–(2.6.2).

Если же $z_n \in X^{(2)}$, то $x_{n+1} = x_n$, а y_{n+1} получится по формулам (2.6.3) после замены в них x_n и y_n соответственно на y_n и x_n .

Строго говоря, алгоритм (2.6.1)–(2.6.3) не является конечно-сходящимся. Действительно, рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 2.6.2. Здесь множество $X^{(2)}$ состоит из единственной точки y_0 , а множество $X^{(1)}$ — из точек z_1, z_2, z_3 . Искомой парой точек являются точки x_0, y_0 . Если выбрать $y_1 = y_0, x_1 = z_1$ и затем последовательно предъявлять точки $z_2, z_3, z_1, z_2, z_3, z_1, z_2, \dots$ и т. д., то получим бесконечную последовательность $\{x_n\}$, которая лишь в пределе при $n \rightarrow \infty$ стремится к x_0 . Причина состоит в том, что при больших номерах n точка x_n мало изменяется. Чтобы сделать алгоритм (2.6.1)–(2.6.3) конечно-сходящимся, следует при предъявлении точки $z_n \in X^{(1)}$ ($z_n \in X^{(2)}$) не сразу изменять точку x_n на x_{n+1} (y_n на y_{n+1}), а только в том случае, если величина $\|x_{n+1} - x_n\|$ ($\|y_{n+1} - y_n\|$) изменится при этом не меньше, чем на некоторое положительное число δ — параметр программы. Алгоритм (2.6.1)–(2.6.2) в развернутой форме запишется в виде (опять полагаем, что $z_n \in X^{(1)}$)

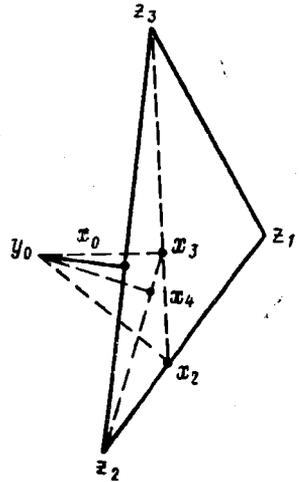


Рис. 2.6.2. Иллюстрация возможности бесконечного числа итераций

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n, & \text{если } (y_n - x_n, z_n - x_n) \geq \|x_n - z_n\|^2 \text{ и} \\ & \|z_n - y_n\|^2 + \delta^2 \geq \|x_n - y_n\|^2, \\ & \text{либо } (y_n - x_n, z_n - x_n) \leq \delta \|z_n - x_n\|, \\ z_n, & \text{если } (y_n - x_n, z_n - x_n) > \|z_n - x_n\|^2 \text{ и} \\ & \|z_n - y_n\|^2 + \delta^2 \leq \|x_n - y_n\|^2, \\ x_n + \frac{(y_n - x_n, z_n - x_n)}{\|z_n - x_n\|^2} (z_n - x_n), & \text{если} \\ & \delta \|z_n - x_n\|^2 < (y_n - x_n, z_n - x_n) \leq \|z_n - x_n\|^2. \end{cases} \quad (2.6.4)$$

Доказательство конечной сходимости алгоритма (2.6.4) теперь тривиально. Действительно, при каждом изменении точки x_n или y_n расстояние между ними убывает на величину,

не меньшую, чем δ^*) и, следовательно, через конечное число шагов будет исчерпана величина $\|x_1 - y_1\|$.

Возникает, однако, вопрос: какое отношение имеют найденные с помощью алгоритма (2.6.4) точки $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ к точкам x_0, y_0 , реализующим наименьшее расстояние между выпуклыми оболочками $\text{Co } X^{(1)}, \text{Co } X^{(2)}$ множеств $X^{(1)}, X^{(2)}$? Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 2.6.1. *Предположим, что каждое множество $\text{Co } X^{(1)}$ и $\text{Co } X^{(2)}$ может быть заключено в некоторый шар радиуса R .*

Обозначим через z_1, z_2, \dots бесконечную последовательность элементов тренировочного множества, в котором каждое изображение повторяется бесконечное число раз, а через $\text{Co } \tilde{X}^{(1)}$ и $\text{Co } \tilde{X}^{(2)}$ — выпуклые оболочки изображений из тренировочной последовательности, принадлежащих соответственно множествам $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$.

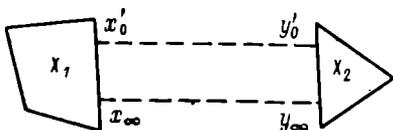


Рис. 2.6.3. Возможная неединственность точек, реализующих расстояние между классами изображений

Пусть x_∞, y_∞ — предельные точки для последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}$, построенных согласно алгоритму (2.6.4), и x_0', y_0' — точки, реализующие наименьшее расстояние между множествами $\text{Co } \tilde{X}^{(1)}$ и $\text{Co } \tilde{X}^{(2)}$. Тогда справедлива импликация

$$\{\delta < \min [2R, \|x_\infty - y_\infty\| / 4R]\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \{\|x_0' - y_0'\| \geq \|x_\infty - y_\infty\| - 4R\delta\}.$$

Число изменений точек x_n, y_n в процессе работы алгоритма не превосходит числа

$$\delta^{-2} [\|x_1 - y_1\|^2 - \|x_0' - y_0'\|^2].$$

Таким образом, при достаточно малых значениях параметра δ в алгоритме (2.6.4) построенные точки x_∞, y_∞ дают достаточно хорошую аппроксимацию точек x_0', y_0' . Заметим, что сами точки x_0' и y_0' могут быть далекими соответственно от точек x_∞, y_∞ , как это показано на рис. 2.6.3.

Доказательство теоремы. Приведем следующее построение. Рассмотрим шар D_1 радиуса $R_\delta = \sqrt{\|x_\infty - y_\infty\|^2 - \delta^2}$ с центром в точке x_∞ . Через Γ_1 обозначим круговой конус с вершиной в точке y_∞ , по отношению к которому шар D_1 яв-

*) Точнее, $\|x_n - y_n\|^2 - \|z_n - y_n\|^2 \geq \delta^2$ (при $z_n \in X^{(1)}$).

ляется вписанным. Аналогично введем шар D_2 и отвечающий ему конус Γ_2 . Построим также шары радиуса $2R$ с центрами в x_∞ и y_∞ (рис. 2.6.4).

Можно утверждать, что ни одна из точек $\{z_n\}$ не может лежать в множестве $D_1 \cap D_2$. Действительно, предположим, что, например, некоторая точка $z_n \in X^{(1)}$ принадлежит множеству $D_1 \cap D_2$. Поскольку каждый элемент тренировочного множе-

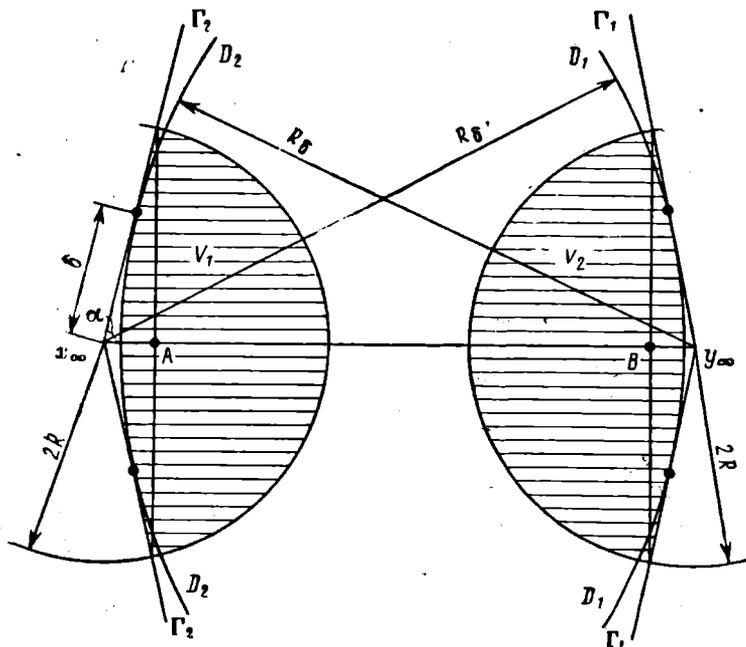


Рис. 2.6.4. Построение к доказательству теоремы 2.6.1.

ства повторяется бесконечно много раз, рано или поздно появится точка z_n , когда уже будут выполнены соотношения $x_n = x_\infty$, $y_n = y_\infty$ (так как алгоритм (2.6.4) сходится в конечное число шагов). Но тогда окажется, что $\|z_n - y_\infty\|^2 < \|x_\infty - y_\infty\|^2 - \delta^2$, и, следовательно, точка x_∞ должна изменять свое значение, что приводит к противоречию. Следовательно, все элементы тренировочной последовательности расположены вне множества $D_1 \cap D_2$.

Поскольку $x_\infty \in X^{(1)}$, то множество $X^{(1)}$ заведомо содержится в шаре радиусом $2R$ с центром в точке x_∞ . Пересечение этого шара с конусом Γ_2 позволяет построить выпуклое множество V_1 (см. рис. 2.6.4), в котором согласно вышесказанному не может быть точек тренировочной последователь-

ности, принадлежащих множеству $X^{(1)}$. Следовательно, множество $V_1 \cap \text{Co } \tilde{X}^{(1)}$ пусто, и поэтому не может содержать точку x'_0 . Аналогичные рассуждения применимы к точке y'_0 . Окончательно можно утверждать, что $\|x'_0 - y'_0\| \geq \|A - B\|$, где A и B — точки, изображенные на рис. 2.6.4. Но $\|x_\infty - y_\infty\| = \|x_\infty - A\| + \|A - B\| + \|B - y_\infty\| = 2\|x_\infty - A\| + \|A - B\|$. В свою очередь $\|x_\infty - A\| = 2R \cos \alpha$, где α — угол, определяемый соотношением (см. рис. 2.6.4) $\sin \alpha = R_\delta / \|x_\infty - y_\infty\|$. Производя несложные вычисления, получим

$$\begin{aligned} \|x_\infty - y_\infty\| &= 4\|x_\infty - y_\infty\|^{-1} R \delta + \|A - B\| \leq \\ &\leq 4\|x_\infty - y_\infty\|^{-1} R \delta + \|x'_0 - y'_0\|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Посылка импликации обеспечивает лишь выполнение неравенств $\delta < 2R$, $2\|x_\infty - A\| < \|y_\infty - x_\infty\|$. Мы остановимся на этом геометрически очевидном доказательстве.

Сделаем одно замечание. Приведенный алгоритм, являясь конечно-сходящимся, не укладывается в рамки основной теоремы. Кроме того, основная теорема «работает» при естественном условии разрешимости рассматриваемой системы неравенств. Если система неравенств неразрешима, то алгоритм, естественно, не будет сходиться. Алгоритм «Оптимальное разделение» этим недостатком не обладает, ибо всегда существует какое-то расстояние между выпуклыми оболочками двух произвольных множеств (это расстояние равно нулю, если выпуклые оболочки пересекаются). Поэтому после окончания работы алгоритма может оказаться, что $\|x_\infty - y_\infty\| > \delta$, и это будет означать, что $\text{Co } \tilde{X}^{(1)}$ и $\text{Co } \tilde{X}^{(2)}$ не пересекаются. Если $\text{Co } \tilde{X}^{(1)}$ и $\text{Co } \tilde{X}^{(2)}$ пересекаются либо расстояние между ними достаточно мало, то получим $\|y_\infty - x_\infty\| < \delta$. Поэтому априорное предположение о существовании разделяющей плоскости здесь не является необходимым, и алгоритм позволит найти такую плоскость либо указать на ее отсутствие.

§ 27. АЛГОРИТМ РАЗДЕЛЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ, ЗАДАННЫХ НА ЕДИНИЧНОМ КУБЕ

Если элементы множеств $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ суть вершины единичного куба, то полезно так модифицировать алгоритм построения разделяющей плоскости, чтобы направляющий вектор плоскости состоял из нулей и единиц. Этот частный случай весьма важен для приложений, так как алгоритм обладает простой «логикой», что весьма существенно при реализации его в «металле».

Ниже предлагается алгоритм, позволяющий построить указанную плоскость при условии, что «оболочки» рассматриваемых множеств не пересекаются. (Точное определение оболочки множества дается ниже и является некоторым обобщением по-

нения выпуклой оболочки множества в евклидовом пространстве.)

Идея алгоритма проста. Определяется пара точек, расстояние между которыми совпадает с расстоянием между оболочками бинарных векторов; вектор, определяемый этими точками, является искомым. По существу предлагаемый алгоритм представляет собой «мини-алгоритм» процедуры, описанной в § 2.6. Сразу отметим, что требование непересечения оболочек множеств бинарных векторов является, в определенном смысле, более сильным ограничением, чем требование непересечения выпуклых оболочек множеств в случае евклидова пространства. Это обстоятельство можно рассматривать как плату за простоту алгоритма.

Условимся о некоторых обозначениях и понятиях. Буквами x , y , z , w (с нижними индексами или без них) будем в данном параграфе обозначать бинарные векторы, т. е. векторы, компоненты которых суть нули и единицы. Через $x \oplus y$ обозначим вектор z , полученный покомпонентным сложением векторов x и y по модулю 2, т. е. если $x^* = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$, $y^* = (y^{(1)}, \dots, y^{(N)})$, то $z^* = (z^{(1)}, \dots, z^{(N)})$, где $z^{(i)} = x^{(i)} \oplus y^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Аналогично через $x \wedge y$ обозначим вектор z , полученный покомпонентным умножением векторов x и y , т. е. $z^{(i)} = x^{(i)} \cdot y^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$. Нормой $|x|$ вектора x называется сумма содержащихся в нем единиц. Расстояние $\rho(x, y)$ (расстояние по Хеммингу) и скалярное произведение (x, y) векторов x и y определяются следующим образом:

$$\rho(x, y) = |x \oplus y|, \quad (x, y) = |x \wedge y|.$$

Через e_i , $i = 1, \dots, N$, обозначим базисные векторы (i -я компонента вектора равна единице, остальные — нулю). Очевидно, всякий бинарный вектор x однозначно может быть представлен в виде

$$x = \sum_{i=1}^N x^{(i)} e_i,$$

где $x^{(i)}$ — компоненты вектора x .

Пусть известны два вектора x и y . Введем понятие о векторе, расположенном между векторами x и y . Для этого образуем вектор $z = x + y$, который может быть представлен в виде

$$z = \sum_{i=1}^N z^{(i)} e_i.$$

Будем говорить, что вектор w расположен между векторами x и y , если его можно представить в виде

$$w = x \oplus \sum' z^{(i)} e_i.$$

Штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по некоторому подмножеству индексов (в частности, это подмно-

жество может быть пустым, и тогда $\omega = x$, или совпадать со всем множеством векторов $i = 1, 2, \dots$, и тогда $\omega = y$). Геометрически множество векторов, заключенных между x и y , представляет собой множество вершин единичного куба, через которые проходит точка при движении от x к y вдоль ребер куба всевозможными кратчайшими путями.*)

Определение 2.7.1. Множество Q на единичном кубе (множество бинарных векторов) называется *подкубом* (кубом меньшей размерности), если из условия $x_1 \in Q$, $x \in Q$ следует, что множеству Q принадлежат все вершины, заключенные между вершинами x_1 и x_2 .

Определение 2.7.2. *Оболочкой* Q множества F на единичном кубе называется подкуб наименьшей размерности, содержащий это множество.

В дальнейшем будут рассматриваться множества F_1, F_2 , относительно которых предполагается, что их оболочки Q_1, Q_2 не пересекаются.**)

Расстоянием $\rho(F_1, F_2)$ между множествами на единичном кубе называется величина

$$\rho(F_1, F_2) = \min |x \oplus y|, \quad (2.7.1)$$

где минимум берется по всем $x \in F_1$ и $y \in F_2$. Основное содержание понятия оболочки множества на единичном кубе заключается в следующем: обозначим через x_0, y_0 пару векторов, $x_0 \in Q_1, y_0 \in Q_2$, для которых $\rho(x_0, y_0) = \rho(Q_1, Q_2) > 0$, т. е. x_0, y_0 — точки, расстояние между которыми равно расстоянию между оболочками множеств. Для точек x_0, y_0 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |x_0 \oplus x| &< |y_0 \oplus x|, \quad \forall x \in Q_1, \\ |x_0 \oplus y| &> |y_0 \oplus y|, \quad \forall y \in Q_2. \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Отсюда нетрудно получить следующее свойство, эквивалентное (2.7.2):

$$(x, z_0) = (x_0, z_0) \text{ при } x \in Q_1, \quad (2.7.3)$$

$$(y, z_0) = (y_0, z_0) \text{ при } y \in Q_2, \quad (2.7.4)$$

где $z_0 = x_0 \oplus y_0$. Следовательно, для разделения множеств F_1, F_2 достаточно построить по формуле (2.7.4) вектор z_0 , который и определяет искомую плоскость согласно формулам (2.7.3). Отметим, что вектор z_0 определяется по оболочкам Q_1, Q_2 единственным образом, хотя векторы x_0, y_0 могут определяться неоднозначно.

Сформулируем рекуррентный алгоритм для нахождения векторов x_0, y_0 , реализующих расстояние между подкубами

*) Кратчайшим называется путь, при движении вдоль которого точка проходит минимальное число ребер куба.

**) В частности может случаться, что $F_1 = Q_1, F_2 = Q_2$.

Q_1 и Q_2 . Векторы x_1 и y_1 выбираются произвольно, $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$. Допустим, что на n -м шаге алгоритма получены векторы $x_n \in Q_1$, $y_n \in Q_2$, которые являются n -й итерацией искомым векторов x_0, y_0 .

Пусть системе предъявлен вектор z_n . образуем вектор

$$w_n = z_n \wedge (x_n \oplus y_n) \oplus x_n \wedge y_n. \quad (2.7.5)$$

Тогда

$$\begin{cases} x_{n+1} = w_n, \\ y_{n+1} = y_n, \text{ если } z_n \in F_1, \\ x_{n+1} = x_n, \\ y_{n+1} = w_n, \text{ если } z_n \in F_2. \end{cases}$$

Пусть z_1, z_2, \dots — бесконечная последовательность векторов, составленная из векторов множеств F_1 и F_2 . Пусть в этой последовательности каждый вектор множеств F_1 и F_2 повторяется бесконечное число раз.

Теорема 2.7.1. Существует конечное N такое, что $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = y_n$ при $n \geq N$, причем расстояние между оболочками Q_1 и Q_2 множеств F_1 и F_2 достигается на векторах x_n и y_n .

Доказательство просто и основывается на проверке того факта, что расстояние между векторами x_n, y_n монотонно убывает.

Формулу (2.7.5) можно представить в следующих эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} w_n &= x_n \oplus (x_n \oplus z_n) \wedge (x_n \oplus y_n) = \\ &= y_n \oplus (y_n \oplus z_n) \wedge (x_n \oplus y_n) = \\ &= z_n \wedge x_n \oplus x_n \wedge y_n \oplus z_n \wedge y_n. \end{aligned}$$

Упражнения к гл. 2

1. Пусть функция $\varphi(x, \tau)$ и ее градиент $\nabla_{\tau} \varphi(x, \tau)$ измеряются с малыми «погрешностями». Предполагая, что множество решений системы неравенств $\varphi(x, \tau) > 0$ содержит шар известного радиуса, сформулировать аналог основной теоремы 2.1.1.

2. Предполагая, что множество решений неравенств $\varphi(x, \tau) > 0$ содержит шар известного радиуса, сформулировать аналог основной теоремы 2.1.1 для функции $\varphi(x, \tau)$, для которой условие 3 теоремы 2.1.1 «немного» нарушается.

3. Обобщить основную теорему на случай алгоритма вида

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \tau_n + \gamma_n \theta_n \psi(x_n, \tau_n), \\ \theta_n &= \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x_n, \tau_n) \leq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi(x_n, \tau_n) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(γ_n — числовая последовательность) при выполнении условия

$$(\psi(x, \tau), \tau - \tau_*) \geq \epsilon_* > 0, \quad \forall x \in X, \forall \tau.$$

4. Известно, что при $\varphi(x, \tau) = (x, \tau)$ алгоритм

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \gamma_n \theta_n \nabla_{\tau} \varphi(x_n, \tau_n), \quad 0 < \gamma_n < 2, \quad \|x\| = 1,$$

определяет ограниченную последовательность векторов τ_n , даже если система неравенств $\varphi(x, \tau) > 0$ неразрешима. Что можно сказать в общем случае?

5. Алгоритм «Полоска» (2.2.11) при $\epsilon=0$ и $x_n = \infty$ в 1937 г. был предложен для решения линейных уравнений польским математиком Качмажем. Пусть тренировочная последовательность $\{x_n\}$ циклическая, т. е. составлена периодическим повторением конечного набора $\{x_1, \dots, x_m\}$. Убедиться в справедливости для алгоритма Качмажа следующих утверждений:

а) При любом натуральном l

$$\tau_{m(l+1)+1} = A\tau_{ml+1} + b,$$

где матрица A и вектор b соответствующих размерностей определяются лишь набором $\{x_1, \dots, x_m\}$.

б) Все собственные значения матрицы A по модулю не превосходят единицы.

в) Если модули всех собственных значений матрицы A меньше единицы, то при любом начальном значении τ_1 последовательность τ_{mk+1} стремится при $k \rightarrow \infty$ с экспоненциальной скоростью к вектору $\tau = (I-A)^{-1}b$.

г) Если рассматриваемая система линейных уравнений имеет решение τ_* и это решение единственно, то $b = (I-A)\tau_*$.

Упражнение 5 показывает, в каких направлениях возможно искать ответ на вопрос, поставленный в упражнении 4.

6. В некоторых задачах идентификации величина $(\nabla_{\tau} \varphi(x, \tau), \tau_* - \tau)$ может предполагаться известной (хотя вектор τ_* неизвестен). Сформулировать аналог алгоритма вида (2.1.1), при котором величина $\|\tau_n - \tau_*\|$ будет убывать наискорейшим образом на каждом шаге алгоритма (в литературе такие алгоритмы иногда называют локально-оптимальными).

7. Показать, что в алгоритме «Отражение» (§ 2.2) при $\epsilon < 0$ условия основной теоремы не выполнены.

8. Проверить, существует ли соотношение между условиями (2.5.5) и отделимостью каждого из множеств $X^{(p)}$ от остальных.

9. Доказать теорему 2.7.1.

ГЛАВА 3. НЕЛИНЕЙНАЯ РАЗДЕЛИМОСТЬ КЛАССОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Предложенные в гл. 2 алгоритмы обучения предназначены в основном для построения линейных разделяющих (дискриминантных) функций. Если классы изображений не удается разделить плоскостью, то возможно по крайней мере два пути построения более сложных дискриминантных функций. На первом пути делается попытка с помощью дополнительных A -элементов отобразить исходные классы изображений в новое пространство так, чтобы образы классов оказались бы линейно-разделимыми (новое пространство по этой причине иногда называют *спрямляющим пространством* — в нем дискриминантной функцией является плоскость). Указать эффективную систему отоб-

ражений (признаков) обычно затруднительно, поэтому в теоретическом плане указаний путь весьма неопределен: в качестве нужной системы отображений достаточно взять любую полную (в том или ином смысле) систему. Поэтому выбор «хорошей» системы отображений (признаков) производится обычно с точки зрения таких плохо формализуемых критериев, как возможность простой схемной реализации соответствующих A -элементов, используется аналогия с биологическими системами и т. п. Ниже с этих точек зрения будет обсуждаться некоторый класс A -элементов.

Второй путь состоит в попытке строить более сложные, чем линейные, дискриминантные функции. Этот путь приемлем не всегда — построение достаточно сложной дискриминантной функции связано обычно с необходимостью хранить в памяти машины большое число параметров. Сам процесс оценки параметров становится сложным, и для него требуются большие объемы тренировочных множеств. Кроме того, по-прежнему остается нерешенным вопрос, что взять в качестве простых элементов при формировании сложных дискриминантных функций. Естественно возникает мысль осуществить построение дискриминантной функции с помощью системы гиперплоскостей. Ниже будут рассмотрены некоторые алгоритмы такого типа.

§ 3.1. ПЕРЕХОД В СПРЯМЛЯЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть, как и раньше, x — элемент некоторого множества X и $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... — вещественные функции, определенные на множестве X . Множество таких функций можно рассматривать как линейное множество, если ввести обычные операции сложения и умножения на вещественные числа. Поскольку нас будет интересовать вопрос об аппроксимации вещественной функции $f(x)$, заданной на X , с помощью системы A -элементов, роль которых играют функции $\{a_n(x)\}$, то следует ввести в рассматриваемом линейном пространстве понятие близости его элементов. Наиболее важны для теории опознающих систем следующие два вида расстояния:

$$\text{равномерное} \quad \|f(x)\|_C = \sup_{x \in X} |f(x)| \quad (3.1.1)$$

и среднеквадратичное

$$\|f(x)\|_{L_2} = \left[\int_X |f(x)|^2 F(dx) \right]^{1/2}. \quad (3.1.2)$$

В последнем случае предполагается, для общности, что на множестве X задано некоторое распределение F , $F(X) = 1$. Множество функций с нормой (3.1.1) и (3.1.2) будем обозначать соответственно через C и L_2 . Отметим, что если x — случайная величина со значениями в X , имеющая распределение F , то для нее также можно ввести норму по формуле (3.1.1) или (3.1.2),

причем в первом случае под супремумом $|f(x)|$ понимается существенный супремум. Формула (3.1.2) может быть в данном случае записана в виде

$$\|f(x)\|_{L_2} = [M |f(x)|^2]^{1/2} = \left[\int_{\Omega} |f(x(\omega))|^2 dP \right]^{1/2}.$$

Напомним, что система элементов a_1, a_2, \dots линейного нормированного пространства называется *полной*, если любой элемент этого пространства может быть сколь угодно точно приближен (в метрике рассматриваемого пространства) линейными комбинациями элементов системы. Другими словами, *линейная оболочка* такой системы плотна в пространстве.

Если функция распределения F имеет ограниченную плотность, то пространство S вкладывается в L_2 , причем полная в S система элементов будет полной и в L_2 .

В теории обучаемых систем функция $f(x)$ играет роль «истинной» дискриминантной функции, а аппроксимация функции $f(x)$ с помощью линейной комбинации A -элементов — дискриминантной функции, построенной в результате «обучения» системы. Ясно, что чем лучше функция $f(x)$ будет аппроксимирована с помощью линейной комбинации функций $\{a_j(x)\}$, тем меньше будет «ошибаться» «обученная» система. Точный смысл в это утверждение можно вложить, если ввести понятие о вероятности ошибки распознавания.

Для простоты ограничимся рассмотрением двух классов изображений $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, $X^{(1)} \cup X^{(2)} = X$. Пусть $a_1(x), \dots, a_N(x)$ — фиксированный набор A -элементов и $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(N)}$ — набор коэффициентов, полученных при аппроксимации функции (1.1.2) с помощью линейной комбинации функций $\{a_j(x)\}_{j=1}^N$. Тогда, напомним, *вероятностью ошибки распознавания* называется величина

$$p(\tau) = F \left\{ x \mid f(x) \sum_{k=1}^N \tau^{(k)} a_k(x) \leq 0 \right\}, \quad \tau = \{\tau^{(k)}\}_{k=1}^N,$$

где F — распределение на X , $F(X) = 1$. В случае нескольких классов изображений вероятность ошибки распознавания вводит аналогичным способом.

Имеет место следующее простое утверждение.

Теорема 3.1.1. *Предположим, что система функций $\{a_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ полна в L_2 . Тогда по любому $\varepsilon > 0$ существуют число N_0 и коэффициенты $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(N)}$ такие, что при $N \geq N_0$ справедлива оценка $p(\tau) < \varepsilon$.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ ограничена, а система $\{a_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ полна в L_2 , то по заданному ε найдутся такое N_0 и коэффициенты $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(N)}$, что при $N \geq N_0$ справедливо неравенство

$$\int_X \left| f(x) - \sum_{k=1}^N \tau^{(k)} a_k(x) \right|^2 F(dx) < \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\int_X |f(x) - \sum_{k=1}^N \tau^{(k)} a_k(x)|^2 F(dx) \geq \int_{X_N} |f(x) - \sum_{k=1}^N \tau^{(k)} a_k(x)|^2 F(dx) \geq F\{x | x \in X_N\},$$

$$X_N \triangleq \{x | |f(x) - \sum_{k=1}^N \tau^{(k)} a_k(x)| \geq 1\}.$$

Следовательно, $F\{x | x \in X \setminus X_N\} > 1 - \varepsilon$. Учитывая, что $1 - p(\tau) = F\{x | f(x) \sum_{k=1}^N \tau^{(k)} a_k(x) > 0\} \geq F\{x | x \in X \setminus X_N\}$, получаем $p(\tau) < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Таким образом, если система A -элементов полная в пространстве L_2 , то для произвольной дискриминантной функции $f(x)$ существует конечный набор A -элементов такой, что при некотором наборе весов этих A -элементов опознающая система будет «ошибаться» как угодно редко. Разумеется, число A -элементов, обеспечивающих заданную малость вероятности ошибки распознавания, зависит от функции $f(x)$. В реальных задачах число A -элементов всегда конечно, поэтому заведомо возможности такой опознающей системы ограничены. Актуален вопрос о выборе таких A -элементов, что при сравнительно небольшом их числе они с нужной точностью могли аппроксимировать широкий и важный для приложений класс дискриминантных функций. В таком плане этот вопрос может быть переформулирован как вопрос о выборе «хороших» признаков. Строгий смысл вложить в эти понятия довольно затруднительно. Коэффициенты «хорошие» A -элементы выбраны, остается лишь указать способ нахождения нужных весов A -элементов. В гл. 2 был указан ряд способов нахождения весов A -элементов, причем эти способы были приведены в терминах конечно-сходящихся алгоритмов (обучения опознающих систем).

§ 3.2. ПОЛНОТА ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ

Важное значение при построении опознающих систем играют так называемые *пороговые функции*. Значимость этих функций определяется как возможностью «простой» технической реализации, так и возможностью описывать с их помощью работу нейронных сетей. В связи со сказанным в § 3.1 возникает вопрос о полноте пространства пороговых функций. С помощью полной системы пороговых функций возможно, в принципе, построить опознающую систему, способную реализовывать сколь угодно сложную дискриминантную функцию.

Перейдем к описанию пороговых функций и докажем их полноту. Пусть X — множество изображений и $l(x)$ — линейный функционал на X . *Пороговой функцией* на X называется функция вида

$$a(x) = 0 [l(x) - \gamma], \quad (3.2.1)$$

где γ — вещественное число и $\theta(z)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \geq 0, \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases}$$

Пусть L — множество линейных функционалов на X . Обозначим через $\{a\}$ множество пороговых функций вида (3.2.1), где l пробегает множество L , а γ — вещественную ось.

Теорема 3.2.1. Пусть X — произвольное ограниченное замкнутое множество евклидова пространства R^q . Тогда любую заданную на X непрерывную вещественную функцию $f(x)$ можно сколь угодно точно приблизить в равномерном смысле линейной комбинацией конечного числа пороговых функций из $\{a\}$ (число и набор пороговых функций зависят, разумеется, от функции $f(x)$ и выбранной степени приближения).

Доказательство. Продолжим функцию $f(x)$ вне множества X с сохранением непрерывности так, чтобы она стала финитной (обращалась в нуль вне некоторого ограниченного множества). Поэтому можно считать, что $f(x)$ непрерывна и финитна в некотором кубе X_N , содержащем множество X и имеющем ребро длиной N . Хорошо известно, что $f(x)$ можно в равномерном смысле сколь угодно точно аппроксимировать на X_N тригонометрическими многочленами, т. е. линейными комбинациями вида

$$f(x) \cong \sum_p (A_p \cos 2\pi\eta_p + B_p \sin 2\pi\eta_p), \quad (3.2.2)$$

где $\eta_p = (p, x)$; p — вектор с целочисленными компонентами, $p^* = (p_1, \dots, p_N)$; A_p и B_p — числовые коэффициенты. Рассмотрим функции $\cos 2\pi z$ и $\sin 2\pi z$ скалярного аргумента z . Очевидно, эти функции можно сколь угодно точно на промежутке $[0, 1]$ аппроксимировать в равномерном смысле ступенчатыми функциями $\chi_j(z)$:

$$\cos 2\pi z \cong \sum_j c_j \chi_j(z), \quad \sin 2\pi z \cong \sum_j d_j \chi_j(z),$$

где $\chi_j(z)$ — функция, равная единице на некотором интервале из $[0, 1]$ и нулю на остальном множестве. Нетрудно видеть, что всякая такая ступенчатая функция представляет собой разность двух пороговых функций. Например, если

$$\chi(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \in [a, b), \\ 0 & \text{при } z \notin [a, b), \quad b > a, \end{cases}$$

то $\chi(z) = -\theta(z-b) + \theta(z-a)$. Это означает, что функции $\cos 2\pi z$ и $\sin 2\pi z$ равномерно на $[0, 1]$ могут быть аппроксимированы линейными комбинациями вида

$$\cos 2\pi z \cong \sum_j c'_j \theta(z - \alpha_j); \quad \sin 2\pi z \cong \sum_j d'_j \theta(z - \beta_j).$$

Подставим эти разложения в (3.2.2):

$$f(x) \cong \sum_p A_p \sum_j c_j' \theta[(p, x) - \alpha_j] + \sum_p B_p \sum_j d_j' \theta[(p, x) - \beta_j] = \\ = \sum_{p,j} c_{pj} \theta[(p, x) - \gamma_j],$$

где суммирование производится по конечному множеству целочисленных векторов p и вещественных чисел γ_j . Но функции $\theta[(p, x) - \gamma]$ являются пороговыми на множестве X , что и доказывает теорему.

Из приведенного доказательства следует, что для обеспечения нужной аппроксимации достаточно брать довольно узкий подкласс пороговых функций $\{a\}$: линейные функционалы $l(x) = (p, x)$ определяются векторами p с целочисленными компонентами, а числа γ_j («пороги») могут выбираться из условия $0 \leq \gamma_j \leq N$.

§ 3.3. ПОНЯТИЕ О КОМИТЕТЕ НЕРАВЕНСТВ

В § 3.1—3.2 было показано, что если два множества не пересекаются, то всегда можно с помощью полной системы A -элементов (в частности, с помощью пороговых элементов) перейти в такое спрямляющее пространство, в котором классы изображений (точнее, их образы при указанных отображениях) окажутся линейно-разделимыми. К сожалению, в практических задачах указать такие преобразования затруднительно, поскольку обычно не известно, сколько и какие A -элементы следует брать, чтобы обеспечить нужную аппроксимацию дискриминантной (разделяющей) функции. Здесь мы обсудим случай, когда делается попытка построить разделяющую функцию без предварительного «распрямления» исходного пространства.

Предположим, что множество изображений X является подмножеством евклидова пространства и состоит из двух непёре-секающихся классов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, $X = X^{(1)} \cup X^{(2)}$, $X^{(1)} \cap X^{(2)} = \emptyset$.

Предположим, теперь, что существует конечное число плоскостей $L_j = \{c_*^{(j)}, \gamma_*^{(j)}\}$, $j = 1, \dots, 2N + 1$, таких, что для любого элемента $x \in X$ справедливо неравенство

$$f(x) \sum_{j=1}^{2N+1} \text{sign}[(c_*^{(j)}, x) + \gamma_*^{(j)}] > 0, \quad (3.3.1)$$

где, как и раньше, $f(x)$ имеет вид (1.1.2) и $\text{sign } z$ означает знак z . Геометрический смысл неравенств (3.3.1) очевиден: каждая плоскость L_j „голосует“ за принадлежность элемента x множеству $X^{(1)}$ или $X^{(2)}$ (если $\text{sign}[(c_*^{(j)}, x) + \gamma_*^{(j)}] > 0$, то плоскость L_j относит x к классу $X^{(1)}$, если же знак обратный — то к классу $X^{(2)}$), а система в целом классифицирует x по большинству поданных „голосов“. По этой причине набор плоскостей $\{L_j\}$ указанного вида называется *комитетом неравенств*,

основанном на принципе большинства голосов (для краткости будем этот набор называть „Комитет-I“); число $2N+1$ называется „порядком комитета“.

Возможны и другие определения комитетов неравенств. Допустим, например, что имеется набор плоскостей $L_j = \{c_*^{(j)}, \gamma_*^{(j)}\}$, $j=1, \dots, N$, таких, что для любого элемента $x \in X$ справедливо неравенство

$$f(x) \min_j [(c_*^{(j)}, x) + \gamma_*^{(j)}] > 0. \quad (3.3.2)$$

Смысл неравенств (3.3.2) также очевиден: если все плоскости L_j „голосуют“ за x (т. е. если $(c_*^{(j)}, x) + \gamma_*^{(j)} > 0$ для всех j),

то $x \in X^{(1)}$, в противном случае $x \in X^{(2)}$. Набор плоскостей $\{L_j\}$ назовем „комитетом плоскостей“, основанном на принципе единогласия („Комитет-II“), число N — „порядком комитета“.

Прежде всего теперь возникает вопрос: когда существуют комитеты неравенств? Что касается «Комитета-II», то ответ очень прост. Именно, если выпуклая оболочка множества $X^{(1)}$ отделена положительным расстоянием от множества $X^{(2)}$, то существует «Комитет-II» конечного порядка.

Порядок N зависит от конфигурации множеств $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$; в указанных предположениях множества $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ могут быть таковыми, что порядок комитета будет сколь угодно высоким. Доказательство перечисленных утверждений очевидно и на них останавливаться не будем.

Значительно интереснее обстоит дело с «Комитетом-I». Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.3.1. *Если классы $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ ограничены и разделены положительным расстоянием, то существует «Комитет-I» конечного порядка.*

Доказательство этого утверждения уже не столь просто. Проведем его, используя специальную конструкцию построения последовательно вложенных друг в друга выпуклых множеств, порождаемых классами $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$.

Для дальнейшего удобно считать $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ множествами, состоящими из конечного числа элементов. Это нетрудно сделать, если на множестве X ввести равномерную сеть, размер ячеек которой не превосходит заданного числа ε (рис. 3.3.1).

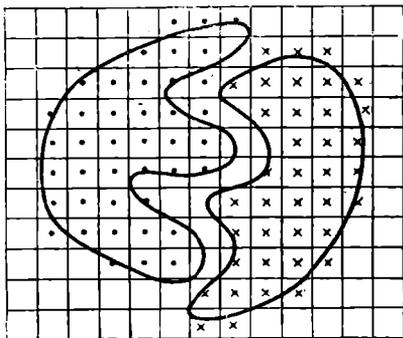


Рис. 3.3.1. Замена непрерывных множеств точечными

В дальнейшем все изображения, попавшие в некоторую ячейку, будут считаться помещенными в центр ячейки. Итак, каждый из классов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ состоит теперь из конечного числа представителей и эти классы по-прежнему разделены положительным расстоянием, если число ε выбрано достаточно малым. Ясно, что если удастся построить комитет для так сконструированных конечных множеств, то при достаточно малом ε этот комитет будет «обслуживать» и исходные классы $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$. Поэтому в дальнейшем будем просто считать, что $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ состоят из конечного (хотя и сколь угодно большого) числа элементов.

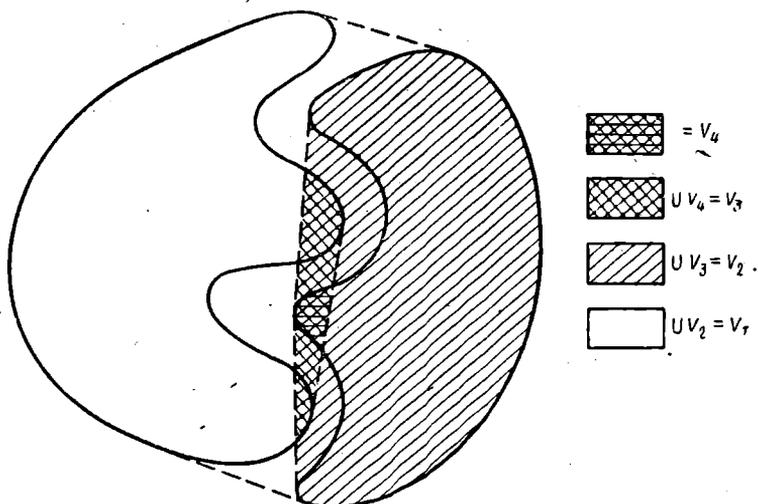


Рис. 3.3.2. Построение последовательности выпуклых множеств

Проведем следующее построение. Обозначим через V_i , $i = 1, 2, \dots$, выпуклые множества, определяемые следующими рекуррентными соотношениями:

$$V_1 = \text{Co}(X^{(1)} \cup X^{(2)}), \quad V_2 = \text{Co} X^{(2)},$$

$$V_3 = \text{Co}(X^{(1)} \cap V_2), \quad V_4 = \text{Co}(X^{(2)} \cap V_3)$$

(см. рис. 3.3.2, на котором поясняется процесс образования множеств V_i . На рис. 3.3.2 процесс закончился после образования множества V_4 — множество V_5 пусто).

Построенные множества V_1, V_2, \dots обладают следующими свойствами:

$$1) (V_{2k} \setminus V_{2k-1}) \cap X^{(1)} = \emptyset,$$

$$(V_{2k+1} \setminus V_{2k}) \cap X^{(2)} = \emptyset.$$

2) Множество V_k вложено в V_{k-1} , $k = 2, 3, \dots$, причем V_k — правильная часть множества V_{k-1} . Поскольку мы пред-

полагаем, что $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ — конечные множества, то множества V_1, V_2, \dots будут выпуклыми многогранниками, причем каждое последующее по сравнению с предыдущим содержит хотя бы на одну точку меньше из множества X . Поэтому последовательность V_1, V_2, \dots всегда состоит из конечного числа элементов. Обозначаем это число через N , так что V_N — многогранник, не пересекающийся с $X^{(1)}$ (если N четно), либо с $X^{(2)}$ (если N нечетно). Предположим для определенности, что N нечетно. Тогда $V_N \cap X^{(2)} = \Phi$. Проведем через грани многогранника V_N плоскости, нормали которых являются внутренними по отноше-

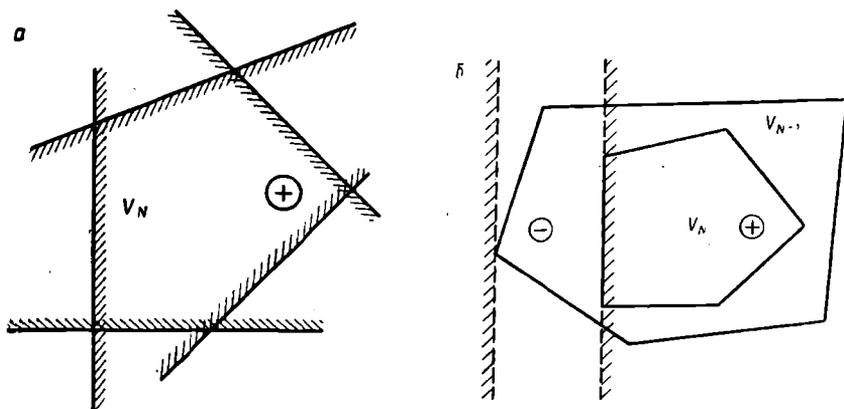


Рис. 3.3.3. Построение комитета неравенств:
 а — V_N — 1-й класс; б — $V_{N-1} \setminus V_N$ — 2-й класс.

нию к V_N (рис. 3.3.3, а). Если многогранник V_N вырожден (например, точка, отрезок и т. д.), то V_N можно заключить в невырожденный многогранник таким образом, чтобы в последний не попали точки из множества $X^{(1)}$. Это всегда можно сделать, поскольку множества V_N и V_{N-1} состоят из конечного числа точек и, следовательно, множества V_N и $(V_{N-1} \setminus V_N)$ разделены положительным расстоянием.

Описанный выше процесс позволяет получить набор плоскостей, таких, что по отношению к каждой из них любая точка множества V_N находится в положительном полупространстве. Перейдем к рассмотрению множества $V_{N-1} \setminus V_N$. Мы должны построить систему плоскостей такую, что по отношению к любой точке из множества $V_{N-1} \setminus V_N$ большинство из плоскостей были ориентированы отрицательно, а по отношению к точкам из V_N большинство плоскостей были ориентированы положительно. Поэтому дополним построенную выше систему плоскостей следующей. Проведем новую плоскость через грань множества V_N (для простоты рассуждений полагаем, что V_N — невырожденный многогранник), ориентированную положительно

по отношению к V_N , а чтобы не «испортить» знаки других точек из $V_{N-1} \setminus V_N$ по отношению к построенной плоскости, проведем параллельно ей другую плоскость противоположной ориентации (рис. 3.3.3, б). Точки, расположенные вне полученной «полосы», имеют ту же разность положительно и отрицательно ориентированных по отношению к ним плоскостей, что и в отсутствие плоскостей, образующих «полосу», в то время как для точек, расположенных внутри «полосы», число плоскостей, ориентированных по отношению к этим точкам отрицательно, увеличится на два. Увеличивая, если нужно, кратность образующих «полосу» плоскостей, всегда можно добиться, чтобы для каждой точки внутри полосы большинство плоскостей стало ориентировано отрицательным образом. Существенно, что при этом большинство плоскостей остаются ориентированными положительно по отношению к множеству V_N . Продолжая строить аналогичные полосы относительно остальных граней и выбирая эти полосы достаточно широкими, мы построим систему плоскостей такую, что большинство из них ориентировано к каждой точке множества $V_{N-1} \setminus V_N$ отрицательно, а по отношению к каждой точке множества V_N — положительно. «Справившись» с выпуклым многогранником V_{N-1} , переходим к многограннику V_{N-2} , и т. д. В результате получим набор плоскостей, который в силу свойств 1)–2) множество $\{V_n\}$ является комитетом для множеств $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$. Теорема доказана.

Приведенный метод доказательства существования комитета вряд ли можно назвать эффективным, и, во всяком случае, очень мало надежд, что построенный комитет будет оптимальным, т. е. состоять из наименьшего возможного числа плоскостей.

Теорема 3.3.1 утверждает, что если классы изображений разделены положительным расстоянием, то дискриминантная функция может быть аппроксимирована «по знаку» линейной комбинацией пороговых функций.

§ 3.4. РЕКУРРЕНТНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ КОМИТЕТА НЕРАВЕНСТВ

Перейдем к постановке задачи о построении опознающей системы, способной обучаться разделять непересекающиеся классы изображений $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$. Пусть, как и раньше, x_1, x_2, \dots — тренировочное множество (т. е. элементы из множества $X^{(1)} \cup X^{(2)}$, для которых известна принадлежность к тому или иному классу).

Комитет, основанный на принципе большинства «голосов»

Пусть известно, что для классов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ существует «Комитет-1» порядка $2N+1$. Требуется построить рекуррентную процедуру нахождения комитета.

Заметим, что при $N = 0$ приходим к комитету 1-го порядка, рекуррентные процедуры для которого были приведены в гл. 2. По аналогии с этими алгоритмами выпишем рекуррентную процедуру для «Комитета-I» произвольного порядка $2N + 1$.

Пусть $\{c_1^{(j)}, \gamma_1^{(j)}\}$ — произвольный набор $2N + 1$ векторов и чисел. Опишем n -й шаг алгоритма. Пусть к n -му шагу получен набор $\{c_n^{(j)}, \gamma_n^{(j)}\}, j = 1, \dots, 2N + 1$. Тогда, если

$$f(x_n) \sum_{j=1}^{2N+1} \text{sign} [(c_n^{(j)}, x_n) + \gamma_n^{(j)}] > 0,$$

то

$$c_{n+1}^{(j)} = c_n^{(j)}, \gamma_{n+1}^{(j)} = \gamma_n^{(j)}.$$

Если же

$$f(x_n) \sum_{j=1}^{2N+1} \text{sign} [(c_n^{(j)}, x_n) + \gamma_n^{(j)}] \leq 0, \quad (3.4.1)$$

то введем числа $\eta_n^{(j)} \Delta [(c_n^{(j)}, x_n) + \gamma_n^{(j)}] f(x_n)$ и упорядочим их по величине. Пусть $\eta_n^{(1)}, \dots, \eta_n^{(m)}$ неположительны и $\eta_n^{(m+1)}, \dots$

$\dots, \eta_n^{(2N+1)}$ положительны ($m \geq N + 1$). Тогда

$$\begin{cases} c_{n+1}^{(j)} = c_n^{(j)}, \gamma_{n+1}^{(j)} = \gamma_n^{(j)} & \text{при } j = 1, \dots, N, m + 1, \dots, 2N + 1, \\ \begin{cases} c_{n+1}^{(j)} = c_n^{(j)} - \beta_n^{(j)} (1 + \|x_n\|^2)^{-1} \eta_n^{(j)} x_n, \\ \gamma_{n+1}^{(j)} = \gamma_n^{(j)} - \beta_n^{(j)} (1 + \|x_n\|^2)^{-1} f(x_n) \end{cases} & \text{при } j = N + 1, \dots, m, \end{cases} \quad (3.4.2)$$

$\beta_n^{(j)}$ — произвольные числа из интервалов $[0, 2]$.

Приведем геометрическую интерпретацию алгоритма (3.4.2), связанную с переходом в сопряженное пространство. Введем обозначения

$$\tau^{(j)} = \begin{pmatrix} c^{(j)} \\ \gamma^{(j)} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} x f(x) \\ f(x) \end{pmatrix}. \quad (3.4.3)$$

Тогда неравенства, решение которых разыскивается, могут быть записаны в виде

$$\varphi(y, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(2N+1)}) \Delta \sum_{j=1}^{2N+1} \text{sign}(y, \tau^{(j)}) > 0, \quad (3.4.4)$$

где y пробегает некоторое множество Y , определяемое по (3.4.3) при $x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}$, а $\{\tau^{(j)}\}_{j=1}^{2N+1}$ — искомый набор векторов. Предположим, что в пространстве векторов τ существует набор $\{\tau_*^{(j)}\}_{j=1}^{2N+1}$ такой, что для любого вектора $y \in Y$ справедливо неравенство

$$\varphi(y, \tau_*^{(1)}, \dots, \tau_*^{(2N+1)}) \geq \varepsilon_* > 0. \quad (3.4.5)$$

Каждый вектор y определяет плоскость, проходящую через начало координат, и неравенство (3.4.5) показывает, что для любой такой плоскости большинство из точек $\tau_*^{(1)}, \dots, \tau_*^{(2N+1)}$ рас-

положены в положительном полупространстве.*) Описанный выше алгоритм работает следующим образом. В качестве начального набора $\{\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(2N+1)}\}$ выбирается произвольный набор, состоящий из $2N + 1$ векторов. При появлении очередного изображения y_n проверяется, находится ли большинство из найденного к данному шагу алгоритма набора векторов $\{\tau_n^{(1)}, \dots, \tau_n^{(2N+1)}\}$ в положительном полупространстве, определяемом вектором y_n . Если это имеет место, то набор не изме-

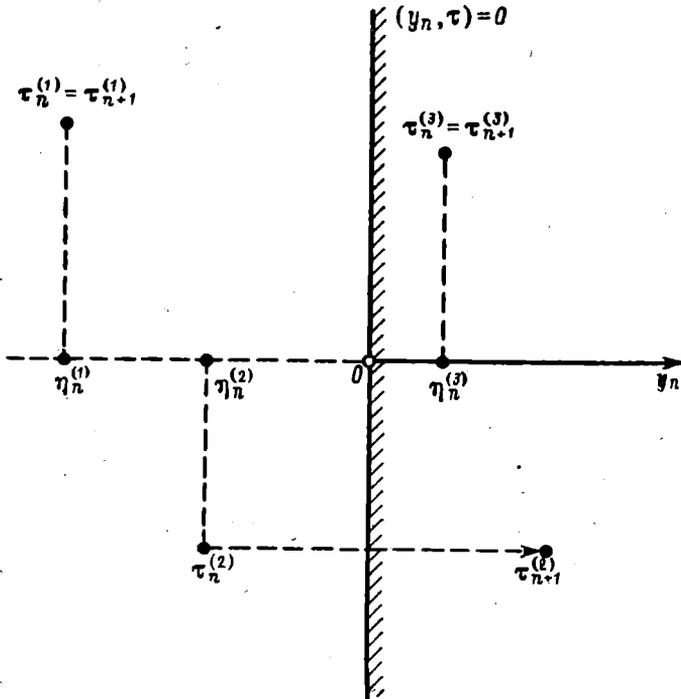


Рис. 3.4.1. Геометрическая иллюстрация рекуррентной процедуры построения «Комитета-1» ($N = 3, \beta_n \equiv 2$)

няется. Если же большинство из векторов $\{\tau_n^{(1)}, \dots, \tau_n^{(2N+1)}\}$ оказалось в отрицательном полупространстве, то ближайшие к плоскости точки $\tau_n^{(j)}$, из тех, что расположены в отрицательном полупространстве, перемещаются в сторону положительного полупространства на расстояние, определяемое числами $\beta_n^{(j)}$. При $\beta_n^{(j)} \equiv 1$ они двигаются до плоскости, определяемой

) Нетрудно видеть, что если множество Y имеет хотя бы одну пару точек, симметричную относительно начала координат, то ни при каком N неравенство (3.4.5) не может быть выполнено для всех $y \in Y$. Из теоремы 3.3.1 нетрудно вывести, что если Y не содержит таких точек, то указанный набор векторов $\{\tau_^{(j)}\}_{j=1}^{2N+1}$ при некотором N существует.

вектором y_n ; при $\beta_n^{(i)} \equiv 2$ переходят в точки, зеркально отраженные относительно этой плоскости. При этом число точек, изменяющих свое положение, равно избытку числа точек в отрицательном полупространстве над числом N . Остальные точки не изменяют своего положения. Эта ситуация иллюстрируется при $\beta_n^{(i)} \equiv 2$ и $N = 3$ на рис. 3.4.1.

Приведенный алгоритм вполне аналогичен рекуррентным алгоритмам обучения, приведенным в гл. 2. Каждую плоскость $\{c^{(j)}, \gamma^{(j)}\}$ можно трактовать как персептрон, рассмотренный в § В.1. Итак, имеется $2N+1$ элементарных (трехслойных) персептронов (рис. В.1.2). Разделение множеств $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ производится по большинству «голосов» трехслойных персептронов. Это большинство в соответствии с указанным алгоритмом изменяется так, чтобы в конечном счете произошло нужное разбиение множеств. На выходе $(2N+1)$ трехслойных персептронов установлен сумматор, подсчитывающий число «голосов» на каждом изображении. Такую систему можно рассматривать как простейший вариант четырехслойного персептрона, называемого иногда *ассоциативной машиной*.

Доказательства сходимости алгоритма (3.4.2) нет. Методы, развитые для линейно-разделимых множеств, здесь оказываются недостаточными. Можно привести пример, показывающий, что алгоритм может заикливаться. Однако такие примеры довольно исключительны. Эксперименты на ЭВМ с алгоритмом (3.4.2) показывают, что его сходимость, в общем, имеет тот же характер, что и алгоритмы гл. 2.

В гл. 5 будет приведена модификация алгоритма (3.4.2), относительно которой сходимость будет доказана.

Комитет, основанный на принципе единогласия

Рекуррентную процедуру можно предложить и для нахождения «Комитета II». Пусть существует конечный набор из N плоскостей $\{c_*^{(j)}, \gamma_*^{(j)}\}, j = 1, \dots, N$, таких, что для любого элемента $x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}$ справедливо неравенство

$$f(x) \min_j [(c_*^{(j)}, x) + \gamma_*^{(j)}] > 0.$$

Пусть $\{c_1^{(j)}, \gamma_1^{(j)}\}, j = 1, \dots, N$, — произвольный начальный набор из N плоскостей. Пусть к n -му шагу алгоритма получены векторы $c_n^{(j)}$ и числа $\gamma_n^{(j)}, j = 1, \dots, N$. Если на n -м шаге выполнено неравенство

$$f(x_n) \min_j [(c_n^{(j)}, x_n) + \gamma_n^{(j)}] > 0,$$

то

$$c_{n+1}^{(j)} = c_n^{(j)}, \gamma_{n+1}^{(j)} = \gamma_n^{(j)}.$$

Если же имеет место неравенство

$$f(x_n) \min_j [(c_n^{(j)}, x_n) + \gamma_n^{(j)}] \leq 0,$$

$$\text{то } c_{n+1}^{(j)} = c_n^{(j)} - \beta_n^{(j)} (1 + \|x_n\|^2)^{-1} f(x_n) [(c_n^{(j)}, x_n) + \gamma_n^{(j)}] x_n, \quad (3.4.6.)$$

$$\gamma_{n+1}^{(j)} = \gamma_n^{(j)} - \beta_n^{(j)} (1 + \|x_n\|^2)^{-1} f(x_n),$$

где

$$\beta_n^{(j)} = \begin{cases} 0, & \text{если } (c_n^{(j)}, x_n) + \gamma_n^{(j)} \neq \\ & \neq \min_i [(c_n^{(i)}, x_n) + \gamma_n^{(i)}], \\ \beta_n, & \text{если } (c_n^{(j)}, x_n) + \gamma_n^{(j)} = \\ & = \min_i [(c_n^{(i)}, x_n) + \gamma_n^{(i)}]. \end{cases} \quad (3.4.7)$$

Доказательства сходимости алгоритма (3.4.6)—(3.4.7) также нет, так что алгоритмы (3.4.2) и (3.4.6)—(3.4.7) носят эвристический характер. В гл. 5 будет дана стохастическая модификация алгоритма (3.4.6)—(3.4.7), относительно которой сходимость можно доказать.

Сравнение алгоритмов (3.4.2) и (3.4.6)—(3.4.7) показывает, что они имеют одинаковую форму; отличие состоит лишь в условиях, при которых совершается изменение плоскостей. Алгоритм (3.4.2) начинает изменять набор плоскостей, если большинство плоскостей «голосует» неправильно, алгоритм (3.4.6)—(3.4.7) изменяет набор плоскостей, если при появлении изображения из класса $X^{(1)}$ хотя бы одна из плоскостей «голосует» против, либо все они «голосуют» «за» при появлении изображения из класса $X^{(2)}$. Сам же характер изменения плоскостей в алгоритмах (3.4.2) и (3.4.6)—(3.4.7) один и тот же.

Упражнения к гл. 3

1. Выяснить, какие условия основной теоремы не выполнены для функций

$$\varphi_1(y, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(2N+1)}) \triangleq \sum_{j=1}^{2N+1} \text{sgn}(\tau^{(j)}, y),$$

и

$$\varphi_2(y, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(N)}) \triangleq f(y) \min_j (\tau^{(j)}, y).$$

2. Написать градиентную процедуру для функции φ_2 из упражнения 1. Результат сравнить с алгоритмом (3.4.6).

3. Пусть y_1, y_2, y_3 — двухкомпонентные векторы, изображенные на рис. 3.У.1.

а) Убедиться, что для множества $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ существует «Комитет-1» 3-го порядка.

б) Пусть тренировочное множество составлено циклическим повторением векторов y_1, y_2, y_3 . На рис. 3.У.1 показано построение примера, в котором

происходит «зацикливание» алгоритма (3.4.2). Реализовать эту идею. Убедиться, что множество зацикливающихся начальных векторов образует множество «положительной меры».

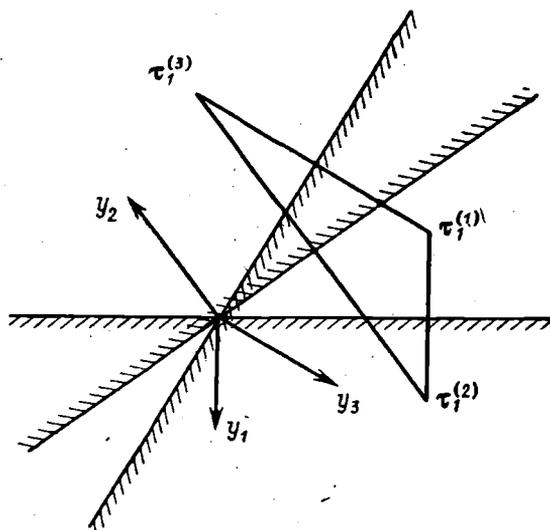


Рис. 3.У.1. Пример зацикливания рекуррентной процедуры построения «Комитета-1»

4. Дать геометрическую интерпретацию алгоритма (3.4.6)—(3.4.7).
5. Получить из теоремы 3.2.1 в качестве следствия теорему 3.3.1. (Указание: аппроксимировать $f(x)$ линейной комбинацией пороговых функций с рациональными коэффициентами и привести все эти коэффициенты к единому знаменателю.)

ГЛАВА 4. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Язык теории вероятностей — одно из основных средств выражения многих утверждений теории обучаемых систем. Ниже без доказательства приводятся необходимые для дальнейшего известные утверждения и конструкции теории вероятностей. Более тонкие результаты (теорема Дж. Л. Дуба о сходимости супермартингалов, теорема П. Леви — обобщение закона «нуль или единица» Бореля) приводятся с доказательствами. Читателю, знакомому с этими утверждениями, в гл. 4 достаточно ознакомиться лишь с принятыми обозначениями и затем можно перейти непосредственно к гл. 5.

§ 4.1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНАЯ СХЕМА

Вероятностным пространством называется тройка $(\Omega, \mathbf{A}, \mathbf{P})$, где Ω — абстрактное множество с элементами ω , называемыми *элементарными событиями*, \mathbf{A} — некоторая σ -алгебра подмно-

жеств множества Ω , называемых *событиями*, и P — *вероятностная мера*, определенная на событиях.

Предположение о том, что A — σ -алгебра, означает, в частности, что событиями являются множество Ω , пустое множество \emptyset , и множество A является замкнутым относительно счетного числа операций объединения и пересечения событий.

Вероятностная мера P выделяется тем, что она неотрицательна, удовлетворяет условию нормированности $P(\Omega) = 1$ и является σ -аддитивной функцией событий. Последнее определяется, как обычно, свойством $P\left\{\bigcup_n A_n\right\} = \sum_n P(A_n)$, справедливым для любой счетной совокупности $\{A_n\}$ непересекающихся событий. Пусть R^q — q -мерное вещественное евклидово пространство и ξ — однозначное отображение Ω в R^q :

$$\xi: \Omega \rightarrow R^q. \quad (4.1.1)$$

Тогда ξ называется *случайной величиной* (точнее, *случайным вектором*), если полный прообраз каждого открытого в R^q множества X принадлежит σ -алгебре A , т. е.

$$\xi^{-1}(X) \in A. \quad (4.1.2)$$

Как обычно, полный прообраз B множества X состоит из всех тех и только тех элементов $\omega \in \Omega$, для которых $\xi(\omega) \in X$. Отображение (4.1.1), удовлетворяющее условию (4.1.2), называют также *измеримым* по отношению к σ -алгебре A .

Далее для случайной величины (случайных величин) будет применяться общепринятое сокращение сл. вел.

Часто удобно рассматривать не саму сл. вел. ξ , а ее *класс эквивалентности*, в который входят все сл. вел. η такие, что $P\{\xi \neq \eta\} = 0$, где $\{\xi \neq \eta\} \triangleq \{\omega | \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\}$. В этом случае говорят, что сл. вел. ξ задана с точностью до *P -эквивалентности*. Если ξ и η принадлежат одному классу эквивалентности, то, говорят, что ξ и η *почти наверное* (по отношению к вероятности P) *совпадают*. Это иногда записывается так: $\xi = \eta$ (п. н.)

Сл. вел. обладают следующими свойствами:

Класс сл. вел. замкнут относительно обычных операций анализа, если эти операции приводят к конечным функциям.

Конечная *борелевская* функция от конечного числа сл. вел. является сл. вел.*)

Если ξ — сл. вел. со значениями в R^q и X — произвольное открытое множество в R^q , то формула

$$F_\xi(X) = P\{\xi^{-1}(X)\}$$

определяет в R^q некоторую вероятностную меру, заданную на

*) Напомним, что борелевской называется функция, осуществляющая преобразование, при котором полный прообраз каждого открытого множества является открытым множеством.

σ -алгебре борелевских множеств.*) Мера $F_{\xi}(X)$ называется *распределением вероятностей* (или просто *распределением*) сл. вел. ξ . Обозначим через \mathbf{B} алгебру борелевских множеств в \mathbb{R}^q . Вероятностное пространство $(\mathbb{R}^q, \mathbf{B}, F_{\xi})$ называется *выборочным вероятностным пространством* сл. вел. ξ . Теория вероятностей, как часть общей теории меры, отличается от последней тем, что все окончательные результаты теории вероятностей должны выражаться в терминах выборочного пространства.

Пусть x_0 — некоторая точка из \mathbb{R}^q и $D_{\varepsilon}(x_0)$ — шар радиуса ε с центром в x_0 и объемом V_{ε} . Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_{\varepsilon}^{-1} F_{\xi}(D_{\varepsilon}(x_0)) = p_{\xi}(x_0), \quad (4.1.3)$$

то величина $p_{\xi}(x_0)$ называется *плотностью распределения* F_{ξ} в точке x_0 . Если соотношение (4.1.3) имеет место для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^q$, то говорят просто о плотности распределения сл. вел. ξ .

Средним или *математическим ожиданием* (для краткости — м. о.) сл. вел. ξ называется величина

$$M\xi \triangleq \int_{\Omega} \xi dP = \int_{\mathbb{R}^q} x F_{\xi}(dx), \quad (4.1.4)$$

если интеграл определен и конечен. Вторая часть написанного соотношения следует непосредственно из определения F_{ξ} и свойства интеграла Стильеса. Другими общепринятыми обозначениями для м. о. сл. вел. ξ служат $E\xi$, $M. O. \xi$, $\langle \xi \rangle$, $\bar{\xi}$. Мы в дальнейшем будем придерживаться обозначения (4.1.4).

Если распределение имеет непрерывную плотность, то можно также написать

$$M\xi = \int_{\mathbb{R}^q} x p_{\xi}(x) dx,$$

где интеграл понимается в смысле Римана. Математическое ожидание называют еще моментом первого порядка. Аналогично вводятся моменты высших порядков. Второй центрированный момент сл. вел. ξ называется ее дисперсией.

$$\sigma_{\xi}^2 = M \|\xi - M\xi\|^2 = M \|\xi\|^2 - \|M\xi\|^2,$$

где $\|\xi\|$ — норма вектора ξ . Во многих случаях полезно знаменитое неравенство Чебышева $P \{\|\xi - M\xi\| \geq \lambda\} \leq \lambda^{-2} \sigma_{\xi}^2$. В случае $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ можно ввести функцию $F_{\xi}(x) \triangleq F_{\xi}(-\infty, x)$, называемую функцией распределения сл. вел. ξ . Плотность распределения теперь может быть вычислена по формуле

$$p_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx},$$

если $F_{\xi}(x)$ дифференцируема в точке x .

*) σ -алгебра борелевских множеств — наименьшая σ -алгебра, порождаемая системой открытых множеств.

§ 4.2. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность сл. вел. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ сходится к сл. вел. ξ

а) по вероятности, $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \xi$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \|\xi_n - \xi\| < \epsilon \} = 1, \quad \forall \epsilon > 0;$$

б) почти наверное (п. н.), $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \xi$, если

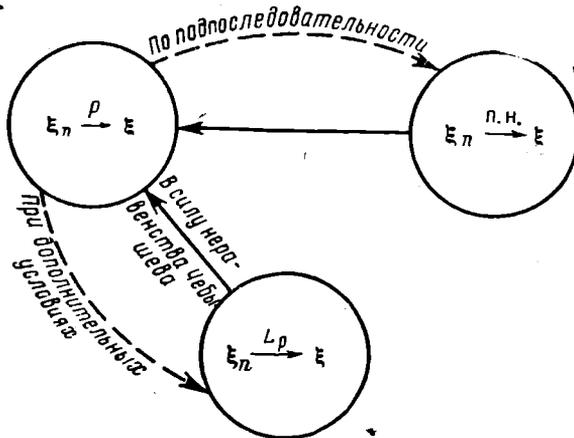


Рис. 4.2.1. Соответствие между различными видами сходимости сл. вел.

$$P \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi \} = 1;$$

в) в среднем, $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_r} \xi$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \{ \|\xi_n - \xi\|^r \} = 0, \quad r - \text{натуральное число. При } r=2$$

говорят также о *среднеквадратичной сходимости*.

Схема соответствия между различными видами сходимости приведена на рис. 4.2.1. Основное свойство интеграла Лебега выражается следующим утверждением.

Теорема 4.2.1. Если последовательность сл. вел. ξ_n из Ω в R^1 удовлетворяет условиям $0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_n \leq \xi_{n+1} \leq \dots$, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \xi$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} M \xi_n = M \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$.

Следствием этой теоремы Лебега является следующая теорема Фату—Лебега о возможности предельного перехода под знаком интеграла.

Теорема 4.2.2. Пусть сл. вел. ν и η имеют конечные м. о. Если $\xi_n \geq \nu$ или $\xi_n \leq \eta$, то соответственно

$$\begin{aligned} M \liminf \xi_n &\leq \liminf M \xi_n, \\ \limsup M \xi_n &\leq M \limsup \xi_n. \end{aligned}$$

Если $\nu \leq \xi_n$ и ξ_n монотонно не убывая сходится к ξ , либо $\nu \leq \xi_n \leq \eta$ и $\xi_n \xrightarrow{п. н.} \xi$, то

$$\lim M \xi_n = M \lim \xi_n.$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \liminf \xi_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k > n} \xi_k, \\ \limsup \xi_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} \xi_k. \end{aligned}$$

Теорема 4.2.2 получается из теоремы 4.2.1, если воспользоваться аддитивным свойством и применить теорему 4.2.1 к последовательности $\{\xi_n - \nu\}$ и $\{\eta - \xi_n\}$ неотрицательных сл. вел. Равенства сразу получаются из этих неравенств.

§ 4.3. ТЕОРЕМА РАДОНА — НИКОДИМА

Пусть ξ — сл. вел., $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ и $M\xi < \infty$. Рассмотрим некоторую σ -подалгебру A_1 σ -алгебры A . Тогда для произвольного события $B \in A_1$ интеграл $\int_B \xi dP$ конечен и является σ -аддитивной P_{A_1} -непрерывной функцией событий. Последнее означает, что $\int_B \xi dP \rightarrow 0$, если $P_{A_1}(B) \rightarrow 0$, где P_{A_1} — вероятностная мера P , рассматриваемая только на событиях из A_1 (сужение P на A_1).

Оказывается, имеется естественное обращение этих свойств, как это утверждается в следующей *теореме Радона—Никодима*.

Теорема 4.3.1. Если G — произвольная функция событий, определенная на σ -подалгебре A_1 , является σ -аддитивной, конечной и P_{A_1} -непрерывной, то существует единственная с точностью до P_{A_1} -эквивалентности сл. вел. ξ , измеримая по отношению к A_1 и такая, что для произвольного события $B \in A_1$ справедливо соотношение

$$G(B) = \int_B \xi dP_{A_1}.$$

Теорема 4.3.1 является следствием теоремы Лебега о разложении σ -аддитивной функции множеств на непрерывную и сингулярную части, при доказательстве которой используется известная теорема Жордана — Хана о разложении аддитивных функций множеств.

§ 4.4. НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

События A_1 и A_2 называются *стохастически независимыми*, если

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

Пусть A_1 и A_2 — два множества событий из \mathcal{A} . Множества A_1 и A_2 называются *независимыми*, если любая пара событий (A_1, A_2) , $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ независима. В частности, если \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 — подалгебры \mathcal{A} , то можно говорить о независимости подалгебр.

Пусть ξ — сл. вел., определенная на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{A}, P) . С ξ однозначно связывается минимальная σ -алгебра \mathcal{A}_ξ , порождаемая событиями $\xi^{-1}(X)$, где X — произвольное открытое множество из области значений сл. вел. ξ . Говорят, что ξ порождает σ -алгебру \mathcal{A}_ξ . Две сл. вел. ξ_1 и ξ_2 называются *стохастически независимыми*, если независимы порождаемые ими σ -алгебры. Простейшие свойства независимых сл. вел.:

- 1) $M(\xi_1, \xi_2) = (M\xi_1, M\xi_2)$, $\xi_1, \xi_2 \in R^q$,
- 2) $M\|\xi_1 + \xi_2\|^2 = M\|\xi_1\|^2 + M\|\xi_2\|^2$, если $M\xi_1 = M\xi_2 = 0$.

Имеет место следующий *критерий Бореля* «нуль или единица».

Теорема 4.4.1. *Если события A_n независимы, то $P\{\limsup A_n\} = 0$ или 1 в зависимости от сходимости или расходимости ряда $\sum_n PA_n$.*

Здесь
$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n, \quad (4.4.1)$$

т. е. $\limsup A_n$ — событие, состоящее из тех элементарных событий, которые в последовательности событий A_n встречаются бесконечно много раз.

§ 4.5. УСЛОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ И ВЕРОЯТНОСТИ

Элементарный подход. Условной вероятностью $P_A(B)$ события $B \in \mathcal{A}$ при данном событии A (при условии A) называется величина

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{если } P(A) \neq 0.$$

Функция P_A , определенная на σ -алгебре событий \mathcal{A} и имеющая своими значениями $P_A B$, называется условной вероятностью. Условное м. о. определяется как

$$M\{\xi|A\} = \int_{\Omega} \xi dP_A = [P(A)]^{-1} \int_A \xi dP, \quad \xi \in R^q.$$

Удобнее, однако, условное м. о. интерпретировать как значение некоторой сл. вел. Число $M\{\xi|A\}$ приписывается теперь каждой точке из A . Аналогично поступают и с $M\{\xi|A^c\}$, где $A^c = \Omega \setminus A$ — дополнение A в Ω . Тогда получается двузначная сл. вел. со значениями $M(\xi|A)$ при $\omega \in A$ и $M(\xi|A^c)$ при $\omega \in A^c$.

Общий случай. Конструктивное определение. Пусть $\{\Omega_j\}$ — счетное разбиение Ω и A_1 — минимальная σ -алгебра, порождаемая этим разбиением. Тогда функция $M(\xi|A_1)$, определенная с точностью до эквивалентности формулой

$$M(\xi|A_1) = \sum_j [P(\Omega_j)]^{-1} I_{\Omega_j} \int_{\Omega_j} \xi dP, \quad (4.5.1)$$

называется условным средним или математическим ожиданием

сл. вел. ξ при данной σ -алгебре A_1 (условным м. о. ξ при условии A_1). Здесь I_{Ω_j} — характеристическая функция (индикатор) события Ω_j ; $I_{\Omega_j}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \Omega_j \\ 0, & \omega \notin \Omega_j \end{cases}$. Условная вероятность события B при условии A_1 вводится по формуле

$$P^{A_1}B = M(I_B|A_1). \quad (4.5.2)$$

На рис. 4.5.1 приведена иллюстрация понятия условного м. о. для случая, когда A_1 порождается тремя интервалами: B_1 ,

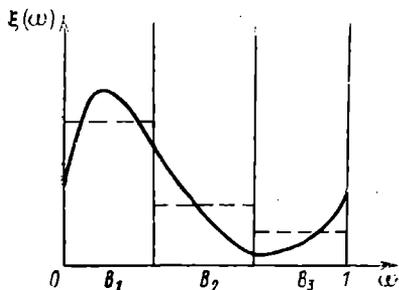


Рис. 4.5.1. Иллюстрация к вычислению условного среднего (пунктир) сл. вел. $\xi(\omega)$ (сплошная линия)

$B_2, B_3, \bigcup_{j=1}^3 B_j = [0, 1]$.

Дискриптивное определение. Пусть (Ω, A, P) — вероятностное пространство, B — σ -алгебра, содержащаяся в A , и пусть P_B — сужение функции множеств P на B .

Определение 4.5.1. Условное математическое ожидание $M(\xi|B)$ при данной B есть B -измеримая функция, определенная с точностью до P_B -эквивалентности соотношением

$$\int_B M(\xi|B) dP_B = \int_B \xi dP, \quad \forall B \in B, \quad M\|\xi\| < \infty. \quad (4.5.3)$$

Определение имеет смысл. Действительно, интеграл $\int_B \xi dP$ при $B \in B$ определяет конечную σ -аддитивную и P_B -непрерывную функцию событий B . Согласно теореме 4.3.1 существует B -измеримая сл. вел. $M(\xi|B)$, определенная формулой (4.5.3), причем она определяется единственным с точностью до P_B -эквивалентности образом.

Перечислим простейшие свойства условных м. о., непосредственно следующих из данных определений:

1. $M\{M(\xi|B)\} = M\xi$.

2. Если $V = A$ или $\xi - V$ -измерима, то $M(\xi|V) = \xi$ (п. н.).
 3. Для $\xi: \Omega \rightarrow R^1$

$$M(\xi|V) = M(\xi^+|V) + M(\xi^-|V), \quad (\text{п. н.}),$$

где $2\xi^+ = \xi + |\xi|$, $2\xi^- = \xi - |\xi|$ и $|\xi|$ — абсолютное значение ξ .

4. Если V и V_ξ независимы, то $M(\xi|V) = M\xi$.

§ 4.6. ТЕОРЕМА ДЖ. Л. ДУБА О СХОДИМОСТИ СУПЕРМАРТИНГАЛОВ

Последовательность сл. вел. $\{\xi_n\}$, $\xi_n: \Omega \rightarrow R^1$, называется (супер) *мартингалом*, если при любом n существует $M|\xi_n|$ и

$$M(\xi_{n+1}|\xi_1, \dots, \xi_n) \leq \xi_n \quad (\text{п. н.}).$$

Здесь $M(\xi|\xi_1, \dots, \xi_n)$ — условное м. о. ξ при σ -алгебре, порожденной сл. вел. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Очевидно,

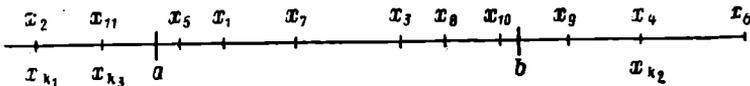
$$M\xi_{n+1} \leq M\xi_n.$$

Теорема 4.6.1. Если последовательность $\{\xi_n\}$ — супермартингал и $\inf_n M\xi_n^- > -\infty$, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \xi$, причем

$$M\xi \geq \inf_n M\xi_n^-, \quad M|\xi| \leq \sup_n M|\xi_n|.$$

Доказательство теоремы 4.6.1 (теоремы Дуба) основано на специальном *неравенстве Дуба*.

Произведем вспомогательное построение. Пусть x_1, x_2, \dots ,



Если $k_2 > n$, то $h = 0$. Если $k > k_{2n}$, то $i_k = 0$. Если $k > k_{2h+1}$, то $i_k = 1$. Пусть $k_{2h+1} > n$, тогда

$$\sum_{k=2}^n i_k (x_k - x_{k-1}) = x_{k_2} - x_{k_1} + \dots + x_{k_{2h}} - x_{k_{2h-1}} \geq (b-a)h.$$

При $k_{2h+1} \leq n$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n i_k (x_k - x_{k-1}) &= x_{k_2} - x_{k_1} + \dots + x_{k_{2h}} - x_{k_{2h-1}} + \\ &+ x_n - x_{k_{2h+1}} \geq (b-a)h + (x_n - x_{k_{2h+1}}). \end{aligned}$$

Следовательно, в любом случае

$$\sum_{k=2}^n i_k (x_k - x_{k-1}) \geq (b-a)h - (a - x_n)^+.$$

Поставим в соответствие сл. вел. ξ_1, \dots, ξ_n сл. вел. H_n и сл. вел. I_k , $k > 1$, определяемые $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$. Определим эти величины равенствами $H_n(\omega) = h$, $I_k(\omega) = i_k$ при $x_1 = \xi_1(\omega), \dots, x_n = \xi_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Установленные выше неравенства превращаются в неравенство

$$\sum_{k=2}^n I_k(\omega) [\xi_k(\omega) - \xi_{k-1}(\omega)] \geq (b-a)H_n(\omega) - (a - \xi_n(\omega))^+.$$

Вычисляя м. о., будем иметь

$$\sum_{k=2}^n \int_{\{I_k=1\}} (\xi_k - \xi_{k-1}) dP \geq (b-a)MH_n - M(a - \xi_n)^+.$$

Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ образуют супермартингал, то каждый из стоящих слева интегралов неположителен. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{\{I_k=1\}} (\xi_k - \xi_{k-1}) dP &= \int_{\Omega} I_k [\xi_k - \xi_{k-1}] dP = \\ &= M \{I_k [\xi_k - \xi_{k-1}]\} = M (M \{I_k [\xi_k - \xi_{k-1}] | \xi_1, \dots, \xi_{k-1}\}) = \\ &= M (I_k M \{\xi_k - \xi_{k-1} | \xi_1, \dots, \xi_{k-1}\}) = \\ &= \int_{\{I_k=1\}} (M \{\xi_k | \xi_1, \dots, \xi_{k-1}\} - \xi_{k-1}) dP \leq 0 \end{aligned}$$

(поскольку событие $\{I_k=1\}$ принадлежит σ -алгебре, порожденной сл. вел. ξ_1, \dots, ξ_{k-1}). Окончательно,

$$(b-a)MH_n \leq \sup_{k < n} M(a - \xi_k)^+.$$

Это и есть *неравенство Дуба*.

Доказательство теоремы 4.6.1. Введем множество $A_{a,b} = [\liminf \xi_n < a < b < \limsup \xi_n]$. Тогда множество расходимости сл. вел. $\{\xi_n\}$ имеет вид $\bigcup_{a,b} A_{a,b}$, где a и b

пробегают счетное множество всех рациональных чисел. Поэтому множество расходимости будет нулевым, если и только если нулевым будет любое множество $A_{a,b}$. Применим неравенство Дуба к произвольному множеству $A_{a,b}$. Так как на $A_{a,b}$ имеем $H_n \nearrow H = \infty$, то это множество будет нулевым,

если $\mathbf{P}\{H = \infty\} = 0$. Последнее будет иметь место для супермартигалов в предположении

$$\mathbf{M}H = \sup_n \mathbf{M}H_n \leq \sup_n \mathbf{M}(a - \xi_n)^+(b - a)^{-1} < \infty.$$

Для каждого a из неравенства $\inf_n \mathbf{M}\xi_n^- > -\infty$, и, следовательно, $\sup_n \mathbf{M}(a - \xi_n)^+ < \infty$, вытекает, что ξ_n стремится при $n \rightarrow \infty$ к некоторой ξ , конечной или бесконечной, причем в силу теоремы Фату — Лебега (теорема 4.2.2) $\mathbf{M}|\xi| \leq \sup_n \mathbf{M}|\xi_n|$.

Отсюда следует, что $\xi_n^- \rightarrow \xi^-$ и $\mathbf{M}\xi^- \geq \inf_n \mathbf{M}\xi_n^- > -\infty$. Поэтому ξ^- интегрируемая. Изменяя ее на событие нулевой вероятности, можем считать ξ^- конечной, так что $\xi \geq \xi^- > -\infty$. Итак, $\mathbf{M}\xi$ существует и $\mathbf{M}\xi \geq \mathbf{M}\xi^- \geq \inf_n \mathbf{M}\xi_n^-$.

Следствие 4.6.1. Предположим, что последовательность сл. вел. $\{\xi_n\}$, $\xi_n \geq 0$, удовлетворяет условию

$$\mathbf{M}(\xi_{n+1} | \xi_1, \dots, \xi_n) \leq (1 + \alpha_n)\xi_n + \nu_n, \quad \mathbf{M}\xi_1 < \infty,$$

где $\alpha_n \geq 0$, $\nu_n = \nu_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \geq 0$ — величины такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\nu_n < \infty$. Тогда $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}}$ ξ и $\mathbf{M}\xi < \infty$.

Действительно, рассмотрим сл. вел. $\eta_n = \prod_{k=n}^{\infty} (1 + \alpha_k) \xi_k - \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{s=k+1}^{\infty} (1 + \alpha_s) \nu_k$. Из принципа монотонной сходимости (теорема 4.2.1) следует, что $\sum_{k=n}^{\infty} \prod_{s=k+1}^{\infty} (1 + \alpha_s) \nu_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{s=k+1}^{\infty} (1 + \alpha_s) \nu_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{s=k+1}^{\infty} (1 + \alpha_s) \mathbf{M}\nu_k = 0.$$

Величина η_{n+1} удовлетворяет, очевидно, неравенству

$$\mathbf{M}(\eta_{n+1} | \xi_1, \dots, \xi_n) \leq \eta_n.$$

Усредняя это неравенство при условии η_1, \dots, η_n , получим $\mathbf{M}(\eta_{n+1} | \eta_1, \dots, \eta_n) \leq \eta_n$. Из теоремы 4.6.1 следует, что $\eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}}$ η , т. е. $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}}$ ξ , причем $\mathbf{M}\xi \leq \sup_n \mathbf{M}\xi_n$. Итак, «малые» шумы не мешают сходимости последовательности $\{\xi_n\}$.

§ 4.7. ТЕОРЕМА П. ЛЕВИ (ОБОБЩЕНИЕ ЗАКОНА «НУЛЬ ИЛИ ЕДИНИЦА» БОРЕЛЯ)

Обобщение теоремы 4.4.1 на случай зависимых событий дано П. Леви в следующем утверждении.

Теорема 4.7.1. Пусть B_1, B_2, \dots — произвольная последовательность событий и \mathbf{B}_n — σ -алгебра, порождаемая событиями B_1, \dots, B_n . Тогда почти наверное ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}^{B_{n-1}}(B_n) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} I_{B_n}$$

сходятся или расходятся одновременно. Здесь $P^{B_{n-1}}$ — условная вероятность при условии B_{n-1} (см. (4.5.2)) и I_{B_n} — характеристическая функция (индикатор) события B_n .

В словесной форме утверждение теоремы 4.7.1 можно сформулировать следующим образом: число осуществлений событий B_n почти наверное конечно или бесконечно в зависимости от того, конечна или бесконечна сумма ряда условных вероятностей $P^{B_{n-1}}(B_n)$.

Если события B_1, B_2, \dots независимы, то $P^{B_{n-1}}(B_n) = P(B_n)$ и теорема 4.7.1 сводится к утверждению того, что

$$P(\limsup B_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty, \\ 0, & \text{если } \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < \infty, \end{cases}$$

т. е. приходим к теореме 4.4.1.

Доказательство. Последовательность $\xi_n = \sum_{k=1}^n \eta_k$, где $\eta_k = I_{B_k} - P^{B_{k-1}}(B_k)$ (очевидно, $|\eta_k| \leq 1$ (п. н.)), является мартингалом. Действительно,

$$\begin{aligned} M(\eta_k | B_{k-1}) &= M(I_{B_k} | B_{k-1}) - M(P^{B_{k-1}}(B_k) | B_{k-1}) = \\ &= P^{B_{k-1}}(B_k) - P^{B_{k-1}}(B_k) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $M(\xi_n | \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = M(\eta_n | \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k = \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k = \xi_{n-1}$. Пусть $a > 0$ — некоторое конечное число.

Определим сл. вел. ν с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \{\nu = n\} &= \{\sup_{k < n} \xi_k \leq a, \xi_n > a\}, \quad n = 2, 3, \dots, \\ \{\nu = \infty\} &= \{\sup_n \xi_n \leq a\}. \end{aligned}$$

Положим $\eta'_n = \eta_n I_{\{\nu > n\}}$. Тогда $B_{\eta'_1}, \dots, B_{\eta'_n} \subseteq B_{\eta_1}, \dots, B_{\eta_n}$ (минимальные σ -алгебры, порождаемые соответствующими наборами случайных величин) и

$$M(\eta'_{n+1} I_{\{\nu > n+1\}} | \eta_1, \dots, \eta_n) = I_{\{\nu > n+1\}} M(\eta_{n+1} | \eta_1, \dots, \eta_n) = 0,$$

так как $\{I_{\{\nu > n+1\}} = 1\} \in B_{\eta_1, \dots, \eta_n}$ (множества $\{\cdot\}$ и $\{\cdot\}^c$ измеримы или неизмеримы одновременно). Итак, $M(\eta'_{n+1} | \eta'_1, \dots, \eta'_n) = M\{M(\eta'_{n+1} | \eta_1, \dots, \eta_n) | \eta'_1, \dots, \eta'_n\} = 0$, т. е. последовательность $\xi'_n = \sum_{k=1}^n \eta'_k$ является мартингалом (процедура ν -усечения по Леви). В то же время мартингал ξ'_n ограничен числом $a + 1$. Действительно, $\cup_k I_{\{\nu = k\}} = \Omega$, $\{\nu = l\} \cap \{\nu = l'\} = \emptyset$ при $l \neq l'$. Если $\omega \in \{\nu = l\}$, то при $l > n$ имеем $\xi'_n \leq a$; если $l \leq n$,

то $\xi'_n \leq a + 1$, так как $|\eta'_k| \leq 1$. По теореме 4.6.1 $\xi'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \xi$, где ξ конечная. Поскольку на множестве $\{\sup_n \xi_n \leq a\}$ имеем $\xi_n = \xi'_n$ и a — произвольное положительное число, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \xi$, где ξ конечна на множестве $\{\sup_n \xi_n < \infty\}$, за исключением нулевого события. Аналогично ξ оказывается конечной на множестве $\{\inf_n \xi_n > -\infty\}$, за исключением нулевого события. Поэтому $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \xi$, где ξ почти всюду конечна вне события

$$\left\{ \inf_n \xi_n = -\infty \right\} \cap \left\{ \sup_n \xi_n = \infty \right\}.$$

Последовательности $\sum_{k=1}^n I_{B_k}$ и $\sum_{k=1}^n P^{B_{k-1}}(B_k)$ неотрицательны и монотонно неубывающие. Поэтому почти наверное обе последовательности имеют предел, конечный или бесконечный. Так как $\{\xi_n\}$ является последовательностью, образованной разностями, то обе последовательности имеют почти наверное пределы, которые одновременно конечны или бесконечны.

Упражнения к гл. 4

1. Убедиться в выполнении свойств (4.4.1).
2. Доказать свойства 1—4 условных м. о., приведенных в § 4.5.
3. Пусть

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega \in [0, 1 - n^{-1}), \\ n, & \text{если } \omega \in [1 - n^{-1}, 1], \end{cases}$$

и P — равномерное распределение на интервале $[0, 1]$. Доказать, что последовательность $\{\xi_n\}$ — мартингал.

4. Пусть

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega \in [0, 1 - n^{-1}), \\ n + 1, & \text{если } \omega \in [1 - n^{-1}, 1], \end{cases}$$

и P — равномерное на $[0, 1]$ распределение. Показать, что последовательность $\{\xi_n\}$ — супермартингал.

5. Пусть $\eta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$. Показать, что если ξ_k независимы и $M\xi_k = 0$, то последовательность $\{\eta_n\}$ — мартингал.
6. Пусть ξ_n — последовательность сл. вел., удовлетворяющая условиям

$$M(\xi_n | \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) < \xi_{n-1} + \mu_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} M|\mu_n| < \infty.$$

Показать, что существует п. н. предел $\lim \xi_n \rightarrow \xi$, который п. н. конечен, если $\sup_n M|\xi_n| < \infty$.

7. Объединяя методы доказательства теорем 4.6.1 и 4.6.2, показать, что если $\{\xi_n\}$ — супермартингал и

$$|\xi_n - \xi_{n-1}| \leq \eta_n, \quad \sup_n M\eta_n < \infty,$$

то на множестве $\{\inf_n \xi_n > -\infty\}$ существует п. н. конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi.$$

ГЛАВА 5. СТОХАСТИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ КОНЕЧНО-СХОДЯЩИХСЯ АЛГОРИТМОВ

Обычно изображения x_n , входящие в тренировочную последовательность, являются значениями некоторого случайного вектора. Следовательно, результат обучения — набор весов τ — также является случайным вектором. Поэтому естественно рассмотреть вопрос о том, какими свойствами обладает этот вектор как сл. вел. Из основной теоремы лишь следует, что на каждой реализации процесс обучения завершается за конечное число шагов работы алгоритма обучения. Нашей ближайшей целью будет придать точный смысл следующему утверждению: «Если тренировочная последовательность представительна, то результат обучения будет хорошим». Затем будут сформулированы правила останова процесса обучения и приведены некоторые новые результаты по сходимости рекуррентных процедур.

§ 5.1. КОНЕЧНО-СХОДЯЩИЕСЯ АЛГОРИТМЫ В СЛУЧАЕ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕЗАВИСИМОЙ ТРЕНИРОВОЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Вновь вернемся к рассмотрению процедур обучения с поощрением в смысле определения 1.2.1. Будем предполагать, что алгоритм построения векторов τ_n является КСА (см. определение 1.2.2).

Пусть $\varphi(x, \tau)$ — целевая функция, участвующая в определении 1.2.2. Рассмотрим последовательность событий

$$B_n \triangleq \{ \varphi(x_n, \tau_n) \leq 0 \}. \quad (5.1.1)$$

Для конечно-сходящегося алгоритма можно тогда записать

$$P(\limsup B_n) = 0, \quad (5.1.2)$$

где $\limsup B_n$ — события, определяемые формулой (4.4.2). Напомним (см. § В.3), что $x_n = x(\omega_n)$, где $\omega_n \in \Omega$. Чтобы перейти к стохастическому варианту задачи распознавания изображений, будем считать, что имеется последовательность $\{\omega_n(\omega)\}$ отображений Ω в себя. В этих условиях элементы x_n тренировочной последовательности становятся сл. вел., $x_n = x_n(\omega) \triangleq x(\omega_n(\omega))$.

Если элементы x_n тренировочного множества стохастически независимые сл. вел., то естественно ожидать, что полученный в результате работы КСА вектор будет «хорошо» классифицировать изображения в режиме экзамена.

Точный смысл этого высказывания состоит в следующем.

Теорема 5.1.1. Пусть x_1, x_2, \dots — независимые сл. вел., имеющие одинаковое распределение F . Если для последователь-

ности $\{\tau_n\}$, образуемой с помощью алгоритма обучения с поощрением, выполнены соотношения (5.1.1), (5.1.2), то справедливо предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F\{x | \varphi(x, \tau_n) > 0\} = 1 \text{ (п. н.)}. \quad (5.1.3)$$

Здесь, как обычно, обозначение $\{x | Q\}$ принято для множества всех тех x , которые удовлетворяют условию Q .

Формула (5.1.3) в других терминах выражает свойство конечной сходимости алгоритма с поощрением, когда тренировочная последовательность образована из независимых сл. вел. с одинаковым распределением F . На описательном языке теорема 5.1.1 утверждает, что если элементы тренировочной последовательности выбираются «наугад», то в большинстве случаев вектор τ_n при достаточно больших n будет «хорошим» в том смысле, что будет мала вероятность ошибки распознавания, определяемая формулой

$$p(\tau_n) \triangleq F\{x | \varphi(x, \tau_n) \leq 0\}. \quad (5.1.4)$$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 5.1.1, рассмотрим более общую ситуацию, когда x_1, x_2, \dots — произвольные сл. вел. со значениями в множестве $X \subseteq R^q$. Обозначим через \mathbf{B}_{n-1} σ -алгебру, порождаемую сл. вел. $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, и введем условное распределение F_n сл. вел. x_n по формуле

$$F_n(A) \triangleq P(x_n \in A | \mathbf{B}_{n-1}), \quad (5.1.5)$$

где A — произвольное борелевское множество в R^q . Формула (5.1.5) для почти каждого элементарного события ω определяет последовательность распределений $\{F_n\}$. Обозначим через $F = F(\omega)$ множество частичных пределов этой последовательности, т. е. все функции распределения, являющиеся (поточечными) пределами подпоследовательностей последовательности $\{F_n\}$.

Теорема 5.1.2. Пусть в алгоритме с поощрением функция $\varphi(x, \tau)$ непрерывна по τ равномерно по $x \in X$, а сам алгоритм таков, что выполнены соотношения (5.1.1)—(5.1.2) и существует

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \text{ (п. н.)}. \quad (5.1.6)$$

Тогда п. н. выполнено соотношение

$$F\{x | \varphi(x, \tau) > 0\} = 1, \quad (5.1.7)$$

где F — произвольное распределение из множества F .

Доказательство теорем 5.1.1 и 5.1.2. Очевидно, теорема 5.1.1 при выполнении условия (5.1.6) является частным случаем теоремы 5.1.2. Доказательство последней основано на использовании теоремы 4.7.1. Действительно, в силу условий

(5.1.1)–(5.1.2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} I_{B_n}$, где I_{B_n} — индикатор события B_n , сходится п. н. По теореме 4.7.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{B_{n-1}}(B_n) = 0. \quad (5.1.8)$$

$$\text{Но } P^{B_{n-1}}(B_n) = F_n \{x \mid \varphi(x, \tau_n) \leq 0\},$$

поскольку сл. вел. τ_n измерима относительно σ -алгебры B_{n-1} . Переходя к пределу по различным подпоследовательностям и учитывая условия (5.1.5), (5.1.7), в силу непрерывности $\varphi(x, \tau)$ приходим к утверждению теоремы 5.1.2. Если $\{x_n\}$ независимы и имеют одинаковое распределение F , то из (5.1.8) сразу получаем (5.1.3). Теоремы 5.1.1 и 5.1.2 доказаны.

Заметим, что теорема 4.7.1 в условиях теоремы 5.1.1 утверждает, что п. н. сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} F \{x \mid \varphi(x, \tau) \leq 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(\tau_n),$$

составленный из вероятностей ошибок распознавания на каждом шаге алгоритма

§ 5.2. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ ОБУЧЕНИЯ С ПООЩРЕНИЕМ

В предыдущем параграфе обсуждался вопрос о «качестве» КСА в случае, когда элементы тренировочной последовательности суть независимые сл. вел. Оказывается, в этих предположениях можно значительно ослабить условия основной теоремы 2.1.1. Этому вопросу и посвящен данный параграф.

Рассмотрим задачу о нахождении вектора τ такого, что для любого элемента x из некоторого множества X выполнялось бы неравенство

$$\varphi(x, \tau) > 0. \quad (5.2.1)$$

Ранее в гл. 1 показывалось, как к этой задаче приводят некоторые постановки задач теории обучаемых опознающих систем.

Нужную оценку вектора τ будет искать с помощью рекуррентной процедуры с поощрением

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta(x_n, \tau_n) \psi_n(x_n, \tau_n, \lambda_n), \quad (5.2.2)$$

определяемой с помощью задания начального вектора τ_1 и тренировочной последовательности. В соотношении (5.2.2) $\psi_n(x, \tau, \lambda)$ — заданная последовательность функций аргументов x, τ, λ ; $\theta(x, \tau)$ — характеристическая функция множества $\{\varphi(x, \tau) \leq 0\}$:

$$\theta(x, \tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x, \tau) \leq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi(x, \tau) > 0, \end{cases}$$

и $\{\lambda_n\}$ — числовая последовательность. Процедура (5.2.2) является некоторым обобщением процедуры, рассмотренной в основной теореме 2.1.1.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

1. Множество $T_0 = \{\tau \mid \varphi(x, \tau) > 0, \forall x\}$ не пусто.
2. Тренировочная последовательность $\{x_n\}$ состоит из независимых сл. вел., имеющих одно и то же распределение F .
3. Параметры $\{\lambda_n\}$ в процедуре (5.2.2) являются независимыми сл. вел., имеющими одинаковые распределения σ ; $\{\lambda_n\}$ независимы от $\{x_n\}$.
4. Начальное значение τ_1 в алгоритме (5.2.2) является сл. вел., независимой от $\{x_n\}$, $\{\lambda_n\}$, и имеет распределение P_1 .
5. Функции $\varphi(x, \tau)$ и $\psi_n(x, \tau, \lambda)$ из алгоритма (5.2.2) всюду конечны и измеримы по отношению к распределению вероятностей, порождаемому произведением вероятностных мер F , P_1 и σ .

Обозначим через $Q_{nl}(\tau)$, T_n функции и множества, определяемые для каждого натурального n и некоторого положительного ν рекуррентными соотношениями

$$Q_{nl}(\tau) = \int_{\{\tau + \psi_l(x, \tau, \lambda) \in T_n\}} \theta(x, \tau) F(dx) \sigma(d\lambda), \quad (5.2.3)$$

$$T_{n+1} = \{\tau \mid \liminf_{k \rightarrow \infty} \inf_{l > k} Q_{nl}(\tau) > \nu\}. \quad (5.2.4)$$

6. Для любого положительного числа ρ существует натуральное число N , $N = N(\rho)$, такое, что справедливо включение

$$D_\rho \Delta \{\tau \mid \|\tau\| < \rho\} \subseteq \bigcup_{k=0}^N T_k. \quad (5.2.5)$$

7. Для почти всех реализаций последовательности $\{\tau_n\}$ справедлива оценка $\|\tau_n\| < C(\|\tau_1\|)$, где $C(r)$ — некоторая положительная функция, не зависящая от выбора реализации и конечная при положительных r .

Теорема 5.2.1. Пусть выполнены условия 1—7. Тогда последовательность сл. вел. $\{\tau_n\}$, порождаемая алгоритмом (5.2.2), сходится:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau_\infty \quad (\text{н. н.}), \quad (5.2.6)$$

$$\text{причем } \sum_{k=1}^{\infty} \theta(x_n, \tau_n) < \infty \quad (\text{н. н.}) \quad (5.2.7)$$

$$\text{и } P\{\tau_\infty \in T_0\} = 1. \quad (5.2.8)$$

Обозначим через P_n условное при условии $\{x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$ распределение вероятностей сл. вел. τ_n , определяемое для произвольного события B формулой

$$P_n(B) = P\{\tau_n \in B \mid x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}.$$

Тогда п. н.

$$P_{n+1}(T_0) \geq P_n(T_0), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(T_0) = 1. \quad (5.2.9)$$

Неравенство (5.2.7) означает, что почти на каждой реализации значение τ_∞ достигается в конечное число шагов; равенство (5.2.8) показывает, что п. н. $F\{x | \varphi(x, \tau_\infty) > 0\} = 1$.

Соотношения (5.2.9) можно интерпретировать как утверждение о том, что вероятность найти решение τ системы неравенств (5.2.1) монотонно с каждым шагом алгоритма (5.2.2) возрастает до 1. Заметим, что если на некотором шаге работы алгоритма такой вектор найден, то он больше не будет изменяться в процессе дальнейшей работы алгоритма (см. определение 1.2.2 КСА).

Доказательство теоремы 5.2.1. Для произвольного события B имеет место рекуррентное соотношение

$$P_{n+1}(B) = \int_B P_n(d\tau) [1 - \theta(x_n, \tau)] + \int_{\{\tau + \psi_n(x_n, \tau, \lambda_n) \in B\}} \theta(x_n, \tau) P_n(d\tau). \quad (5.2.10)$$

Если $B = T_0$, то $\theta(x_n, \tau) \equiv 0$ при $\tau \in T_0$, и, вводя обозначения

$$Q_n = \{\tau | \tau + \psi_n(x_n, \tau, \lambda_n) \in T_0\},$$

из (5.2.10) получаем

$$P_{n+1}(T_0) = P_n(T_0) + \int_{Q_n} \theta(x_n, \tau) P_n(d\tau) \geq P_n(T_0), \quad (5.2.11)$$

откуда следует монотонность сл. вел. $P_n(T_0)$. Возьмем м. о. от обеих частей соотношения (5.2.11) и перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \int_{Q_n} \theta(x_n, \tau) P_n(d\tau) = 0. \quad (5.2.12)$$

$$\text{Но } M \int_{Q_n} \theta(x_n, \tau) P_n(d\tau) = \int Q_{0n}(\tau) P_n(d\tau),$$

где P_n — распределение вероятностей (безусловное) сл. вел. τ_n , $P_n(d\tau) = M P_n(d\tau)$. В силу определения множества T_1 соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int Q_{0n}(\tau) P_n(d\tau) = 0$$

означает, что $P_n(T_1) = P\{\tau_n \in T_1\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Аналогично, если в соотношении (5.2.10) выберем $B = T_1$, возьмем от обеих частей м. о. и перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$, то получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{\tau + \psi_n(x, \tau, \lambda) \in T_1\}} \theta(x, \tau) F(dx) \nu(d\lambda) P_n(d\tau) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int Q_{1n}(\tau) P_n(d\tau) = 0, \end{aligned}$$

откуда, как и раньше, следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(T_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\tau_n \in T_2\} = 0.$$

Продолжая этот процесс, убеждаемся, что для любого $k \neq 0$ справедливо предельное равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \tau_n \in T_k \} = 0$. В силу условия 6 для любого шара D_p имеем $\mathbf{P} \{ \tau_n \in D_p \setminus T_0 \} \rightarrow 0$. Отсюда следует сходимость распределений \mathbf{P}_n , причем в силу условия 7 $\mathbf{P}_n(T_0) = \mathbf{P} \{ \tau_n \in T_0 \} \rightarrow 1$. Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(T_0) = 1$, откуда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(T_0) = 1$ (п. н.). Теперь легко выводятся соотношения (5.2.6), (5.2.8) и проверяется неравенство (5.2.7). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть $\{x_n, \lambda_n\}$ — произвольные сл. вел., F_n — условное распределение пары сл. вел. $\{x_n, \lambda_n\}$:

$$F_n(B) \triangleq \mathbf{P} \left((x_n, \lambda_n) \in A \mid \tau_1, x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \right),$$

где B — произвольное борелевское множество в прямом произведении пространств значений x и λ . Если предположить выполненными условия 1,4,5 и 7 теоремы 5.2.1, а в условии 6 определить функции $Q_{nl}(\tau)$ как $Q_{nl}(\tau) = \int_{\tau + \psi_l(x, \tau) \in T_n} \theta(x, \tau) F_l(dx, d\lambda)$ и потребовать, чтобы включение (5.2.5)

было справедливо п. н. при $N = N(p, \omega)$, $\mathbf{P} \{ N < \infty \} = 1$, то, повторяя почти дословно доказательство теоремы 5.2.1, можно убедиться в справедливости ее утверждений и в рассматриваемом случае.

§ 5.3. ПРАВИЛО ОСТАНОВА ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ

Опознающая система, алгоритм обучения которой КСА, «заканчивает» свое обучение через конечное число шагов, но это число обычно неизвестно. Кроме того, тренировочная последовательность может оказаться «неудачной», не представительной, и «обученная» система будет плохо классифицировать изображения в режиме экзамена. Если тренировочное множество выбирается не специально, то естественно ожидать, что система, правильно опознающая подряд большое число предъявленных изображений, хорошо обучена, и это может служить сигналом об окончании процесса обучения. Сформулируем одно из возможных правил останова процесса обучения, предполагая, что тренировочная последовательность составлена из независимых сл. вел.

Правила останова процесса обучения. Пусть L — заданное натуральное число. Если $\{\tau_n\}$ — последовательность векторов, полученная с помощью какого-либо КСА с поощрением (см. § 1.2), то процесс построения векторов τ_n заканчивается, как только в течение L последовательных шагов алгоритма вектор τ_n не изменит своего значения.

Обозначим через τ_∞ вектор, полученный в результате применения указанного правила останова:

$$\tau_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n. \quad (5.3.1)$$

Для КСА вектор τ_∞ определен и конечен на всех реализациях.

Теорема 5.3.1. Пусть $\{x_n\}$ — стохастически независимые сл. вел. с распределениями вероятностей $\{F_n\}$ и F — «экзаменационное» распределение. С помощью функций $\varphi(x, \tau)$, входящей в определение алгоритма с поощрением, и произвольного вектора τ определим величины

$$\begin{aligned} p_n(\tau) &= F_n \{x | \varphi(x, \tau) \leq 0\}, \\ p(\tau) &= F \{x | \varphi(x, \tau) \leq 0\}. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Предположим, что для любого натурального n и произвольного вектора τ справедлива оценка

$$p_n(\tau) \geq Cp(\tau) \quad (5.3.3)$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Тогда при любых достаточно малых положительных числах δ_1 и δ_2 для случайного вектора τ_∞ , полученного с помощью сформулированного выше правила останова, справедлива оценка

$$P \{p(\tau_\infty) < \delta_1\} \geq 1 - \delta_2, \quad (5.3.4)$$

если число L в правиле останова удовлетворяет неравенству

$$L > \frac{\ln \delta_2}{\ln(1 - C\delta_1)}, \quad (5.3.5)$$

где C — постоянная из неравенства (5.3.3).

Отметим, что «достаточная малость» чисел δ_1 и δ_2 в условии теоремы означает лишь выполнение неравенств $C\delta_1 < 1$, $\delta_2 < 1$. Из формулировки теоремы следует, что полученные оценки малости вероятности ошибки распознавания $p(\tau)$ не зависят от вида функций распределений сл. вел. x_n .

Для приложений наиболее интересен случай, когда все распределения F_n совпадают с распределением F , в терминах которого определяется вероятность ошибки распознавания. Условие (5.3.3) при этом, очевидно, выполнено при $C = 1$, и оценка (5.3.5) принимает особенно простой вид

$$L > \frac{\ln \delta_2}{\ln(1 - \delta_1)}, \quad (5.3.6)$$

где δ_1 и δ_2 — произвольные числа из открытого интервала $(0, 1)$.

Доказательство. Обозначим через N сл. вел., равную номеру n изображения x_n , для которого $\varphi(x_n, \tau_n) \leq 0$ и $\tau_{n+1} = \tau_\infty$. В силу конечной сходимости алгоритма обучения величина N определена и конечна на каждой реализации процедуры обучения. Рассмотрим событие

$$\Omega_L = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{N = l\} \cap \bigcap_{s=l+1}^{l+L} \{\varphi(x_s, \tau_s) > 0\} \cap \{p(\tau_s) \geq \delta_1\},$$

которое в силу сформулированного правила останова совпадает с событием $\{p(\tau_\infty) \geq \delta_1\}$. Оценим вероятность события Ω_L .

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Omega_L) &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{P} \left[\{N=l\} \cap_{s=l+1}^{l+L} \{\varphi(x_s, \tau_s) > 0\} \cap \{p(\tau_s) \geq \delta_1\} \right] = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{M} \left[\mathbf{M} \left(I_{\{N=l\}} \prod_{s=l+1}^{l+L} I_{\{\varphi(x_s, \tau_s) > 0\}} I_{\{p(\tau_s) \geq \delta_1\}} \mid \tau_1, \dots, \tau_{l+L} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

где $I_{\{\cdot\}}$ — индикатор события $\{\cdot\}$ и м. о. в фигурных скобках берется при условии $\tau_1, \dots, \tau_{l+L}$. Заметим теперь, что сл. вел. $I_{\{N=l\}}$ и $I_{\{p(\tau_s) \geq \delta_1\}}$ измеримы относительно σ -алгебры, порождаемой сл. вел. $\tau_1, \dots, \tau_{l+L}$ и потому их можно вынести за знак условного м. о., а для сл. вел. $I_{\{\varphi(x_s, \tau_s) > 0\}}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} \left(\prod_{s=l+1}^{l+L} I_{\{\varphi(x_s, \tau_s) > 0\}} \mid \tau_1, \dots, \tau_{l+L} \right) = \\ &= \mathbf{M} \left(\prod_{s=l+1}^{l+L} I_{\{\varphi(x_s, \tau_s) > 0\}} \mid \tau_1, \dots, \tau_{l+1} \right) = \\ &= \mathbf{M} \left(\prod_{s=l+1}^{l+L} I_{\{\varphi(x_s, \tau_{l+1}) > 0\}} \mid \tau_1, \dots, \tau_{l+1} \right) = \\ &= \prod_{s=l+1}^{l+L} F_s \{x \mid \varphi(x, \tau_{l+1}) > 0\} = \prod_{s=l+1}^{l+L} (1 - p_s(\tau_{l+1})). \end{aligned}$$

Первое равенство написано в силу свойства алгоритма с поощрением не изменять вектора τ_s при выполнении неравенства $\varphi(x_s, \tau_s) > 0$, поэтому при вычислении условного м. о. от сл. вел. $\prod_{s=l+1}^{l+L} I_{\{\varphi(x_s, \tau_s) > 0\}}$ условие $\{\tau_1, \dots, \tau_{l+L}\}$ можно заметить на условие $\{\tau_1, \dots, \tau_{l+1}\}$. По аналогичной причине во втором равенстве все векторы τ_s можно заменить на вектор τ_{l+1} . Третье равенство написано в силу независимости сл. вел. x_{l+1}, \dots, x_{l+L} от σ -алгебры, порождаемой сл. вел. $\tau_1, \dots, \tau_{l+1}$, и четвертое — в силу (5.3.2). Используя оценку (5.3.3) и равенство $p(\tau_s) = p(\tau_{l+1}) = p(\tau_{\infty})$, справедливое на событии $\{N=l\}$, из соотношения (5.3.7) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Omega_L) &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{M} \left\{ I_{\{N=l\}} I_{\{p(\tau_{\infty}) \geq \delta_1\}} \prod_{s=l+1}^{l+L} (1 - p_s(\tau_{\infty})) \right\} \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{M} \left\{ I_{\{N=l\}} I_{\{p(\tau_{\infty}) \geq \delta_1\}} (1 - Cp(\tau_{\infty}))^L \right\} \leq \\ &\leq (1 - C\delta_1)^L \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{M} I_{\{N=l\}} I_{\{p(\tau_{\infty}) \geq \delta_1\}} \leq \\ &\leq (1 - C\delta_1)^L \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{M} I_{\{N=l\}} = (1 - C\delta_1)^L < \delta_2 \end{aligned}$$

в силу выбора числа L . Теорема доказана.

Возможны и другие правила останова процесса обучения. Например, если при заданном числе L процесс обучения прекращать, когда после очередного изменения на n -м шаге алгоритма вектор τ_n не изменяется в течение $k_n + L$ шагов, то в прежних обозначениях можно гарантировать оценку (5.3.4), если L удовлетворяет неравенству

$$L > \frac{\ln C\delta_1\delta_2}{\ln(1 - C\delta_1)}. \quad (5.3.8)$$

Получение оценки (5.3.8) производится вполне аналогично тому, как была получена оценка (5.3.5). Ясно, однако, что и при втором правиле останова выбор числа L из условия (5.3.5) гарантирует оценку (5.3.4), поскольку второе правило останова отличается от первого лишь более «жесткой» проверкой качества обученной системы.

§ 5.4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ РЕКУРРЕНТНЫХ ПРОЦЕДУР ПОСТРОЕНИЯ КОМИТЕТОВ НЕРАВЕНСТВ

В § 3.4 уже говорилось о построении дискриминантной функции, разделяющей два класса изображений, в виде кусочно-линейной поверхности. Реализацию такой функции можно осуществить с помощью простейших перцептронов с двумя слоями A -элементов. Первый слой A -элементов, в котором происходит переработка информации, интерпретируется как набор, или ассоциация, «избирателей», имеющих одинаковый голос.

Классификация входных изображений происходит в результате подсчета поданных «голосов» и применения принятого принципа их учета. В § 3.4 были рассмотрены два способа классификации: использование принципа большинства («Комитет-I») и принципа единогласия («Комитет-II»). Там же были предложены рекуррентные процедуры построения комитетов неравенств и было отмечено, что при специальной обучающей последовательности рассмотренные алгоритмы могут зацикливаться (а, следовательно, могут не сходиться).

Здесь будем предполагать, что обучающая выборка состоит из независимых сл. вел. Кроме того, изменим саму рекуррентную процедуру следующим образом: если на очередном шаге алгоритма возникает необходимость изменять набор $\{\tau_n^{(i)}\}$, то выбор изменяемого вектора производится случайно и независимо, т. е. производится независимый «розыгрыш» номера вектора, подлежащего изменению. В таком варианте, как оказывается, алгоритмы построения комитетов будут конечно-сходящимися на почти каждой реализации.

Приведем точные формулировки. Начнем с алгоритма для «Комитета-I» (см. § 3.3—3.4). Требуется найти вектор $\bar{\tau}$ с компонентами $\tau^{(i)} \in R^q$ такой, что для любого изображения x из некоторого множества X справедливо неравенство

$$\varphi_1(x, \bar{\tau}) \Delta \sum_{i=1}^{2N+1} \text{sign}(y, \tau^{(i)}), \quad y = y(x), \quad (5.4.1)$$

$$\text{sign } z = \begin{cases} +1, & \text{если } z \geq 0, \\ -1, & \text{если } z < 0. \end{cases}$$

Предполагается, что такой набор существует. Более того, будем предполагать, что существует набор $\bar{\tau}_*$, удовлетворяющий

неравенствам (5.4.1) в усиленном варианте. Именно, для любого $y \in Y = y(X)$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{2N+1} \theta_i(y) \operatorname{sign}(y, \tau_*^{(i)}) \geq \varepsilon_* > 0, \quad (5.4.2)$$

где

$$\theta_i(y) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } (y, \tau_*^{(i)}) \geq \delta \|y\|, \\ \text{либо } (y, \tau_*^{(i)}) < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq (y, \tau_*^{(i)}) < \delta, \end{cases}$$

и ε_* , δ — некоторые положительные постоянные, не зависящие от выбора y . Условие (5.4.2) означает, что существует «Комитет-I» τ_* такой, что происходит правильная классификация, даже если не учитывать положительные «неуверенные голоса».

Рекуррентная процедура построения «Комитета-I» описывается следующим образом.

Пусть $\bar{\tau}_1$ — произвольный начальный вектор с векторными компонентами $\tau_1^{(i)}$, $i = 1, \dots, 2N + 1$. Последующие приближения $\bar{\tau}_n$ строятся с помощью обучающей последовательности x_1, x_2, \dots по правилу

$$\tau_{n+1}^{(i)} = \tau_n^{(i)} - \theta_n q_n^{(i)} r_n^{(i)} \beta_n \|y_n\|^{-2} (y_n, \tau_n^{(i)}) y_n, \quad (5.4.3)$$

$$i = 1, \dots, 2N + 1, n = 1, 2, \dots$$

Здесь $y_n \triangleq y(x_n)$;

$$\theta_n \triangleq \theta(y_n, \bar{\tau}_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_1(x_n, \bar{\tau}_n) \leq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi_1(x_n, \bar{\tau}_n) > 0; \end{cases} \quad (5.4.4)$$

$$q_n^{(i)} \triangleq q^{(i)}(y_n, \bar{\tau}_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (y_n, \tau_n^{(i)}) \leq 0, \\ 0, & \text{если } (y_n, \tau_n^{(i)}) > 0; \end{cases} \quad (5.4.5)$$

$$r_n^{(i)} \triangleq r^{(i)}(\lambda_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_n = i, \\ 0, & \text{если } \lambda_n \neq i; \end{cases} \quad (5.4.6)$$

λ_n — последовательность независимых сл. вел., удовлетворяющих при любом n условиям

$$P\{\lambda_n = i\} = (2N + 1)^{-1}, \quad i = 1, \dots, 2N + 1, \quad (5.4.7)$$

и, наконец, β_n — произвольные числа из полуоткрытого интервала $(q, 2]$, $q > 1$.

«Детерминированный» алгоритм (3.4.2)–(3.4.3) также может быть записан в виде (5.4.3), но роль величины $r_n^{(i)}$ будет играть величина

$$r_n^{(i)} \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если индекс } i \text{ реализует } \max_{k: q_n^{(k)}=1} (y_n, \tau_n^{(k)}), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу этого изменяется тот из векторов $\tau_n^{(i)}$, расположенных в полупространстве $(y_n, \tau) \leq 0$, для которого величина $(y_n, \tau_n^{(i)})$ — наибольшая. В алгоритме же (5.4.3)—(5.4.6) любой из таких векторов имеет одинаковую вероятность измениться.

Теорема 5.4.1. *Предположим, что обучающая последовательность x_1, x_2, \dots составлена из независимых сл. вел. со значениями в конечном множестве X , которые имеют одинаковое распределение $F, F(X) = 1$, а сл. вел. λ_n имеют распределение (5.4.7).*

Предположим также, что существует набор $\bar{\tau}_$ векторов $\tau_*^{(i)}$, удовлетворяющий неравенствам (5.4.2) для любого $x \in X$.*

Тогда для алгоритма (5.4.3)—(5.4.6) выполнены все условия теоремы 5.2.1 и, следовательно, алгоритм (5.4.3)—(5.4.6) является конечно-сходящимся.

Напомним, что конечная сходимость алгоритма означает существование целочисленной сл. вел. $L(\omega)$, для которой выполнены условия

$$\bar{\tau}_n = \bar{\tau}_{n+1} = \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\tau}_k \text{ при } n \geq L(\omega) \text{ и } F\{y | \varphi_1(y, \bar{\tau}_L) > 0\} = 1 \quad (\text{п. н.}).$$

Доказательство. Условия 1—5 теоремы 5.2.1 выполнены в силу сделанных в теореме 5.4.1 предположений, если подразумевать под вектором τ в теореме 5.2.1 набор $\bar{\tau}$. В справедливости условия 7 нетрудно убедиться, поскольку из алгоритма (5.4.3)—(5.4.6) следует неравенство $\|\tau_{n+1}^{(i)}\| \leq \|\tau_n^{(i)}\|$. Итак, осталось проверить выполнение условия 6 теоремы 5.2.1. Это потребует некоторых усилий. Прежде всего ограничимся лишь случаем $\beta_n \equiv 2$, что упрощает рассуждения, но не влияет на окончательный вывод. В этом случае функции $Q_{nl}(\bar{\tau})$, определяемые формулами (5.2.3), не зависят от l , а сами формулы могут быть записаны в виде

$$Q_n(\bar{\tau}) = \int_{\{\bar{\tau} + \psi(y, \bar{\tau}, \lambda) \in T_n\}} \theta(y, \bar{\tau}) F(dy) \sigma(d\lambda),$$

$$T_{n+1} = \{\bar{\tau} | Q_n(\bar{\tau}) > 0\},$$

$$\psi^*(y, \bar{\tau}, \lambda) = (\psi^{(1)*}(y, \bar{\tau}, \lambda), \dots, \psi^{(2N+1)*}(y, \bar{\tau}, \lambda)), \quad (5.4.8)$$

$$\psi^{(i)}(y, \bar{\tau}, \lambda) = -2q^{(i)}(y, \bar{\tau}) r^{(i)}(\lambda) \|y\|^{-2}(y, \tau^{(i)}) y.$$

Нужно показать, что каждый шар в пространстве векторов $\bar{\tau}$ поглощается некоторым конечным объединением множеств T_n . Покажем, что для произвольного набора $\bar{\tau}_1$ существует последовательность $\{x_n\}$ точек из X такая, что векторы $\bar{\tau}_n$, построенные при $x_n = x_n$ согласно алгоритму (5.4.3)—(5.4.6) при специальном выборе (неслучайной) последовательности чисел λ_n , в конечное число шагов сойдутся к множеству T_0 .

Поскольку множество X конечно, то занумеруем все его точки последовательно и затем продолжим полученную последовательность циклически. Это и будет наша бесконечная последовательность $\{\tilde{x}_n\}$. Покажем, как теперь определить нужную последовательность $\{\lambda_n\}$. Обозначим через X_i множество тех точек $x \in X$, для которых выполнено неравенство

$$(y(x), \tau^{(i)}) \geq \delta \|y(x)\|, \quad i = 1, \dots, 2N + 1. \quad (5.4.9)$$

Некоторые из этих множеств могут быть пусты.

Пусть на n -м шаге уже получен набор $\bar{\tau}_n$ и $\theta_n = \theta(y(\tilde{x}_n), \bar{\tau}_n) = 1$ (см. (5.4.4)). Это означает, что набор $\bar{\tau}_n$ не является комитетом. Из множеств X_i , содержащих точку \tilde{x}_n , находим множество с наименьшим индексом i_n таким, что $(y(\tilde{x}_n), \tau^{(i_n)}) < 0$. Такой индекс обязательно найдется, поскольку $\varphi_1(\tilde{x}_n, \bar{\tau}_n) > 0$, $\varphi_1(\tilde{x}_n, \bar{\tau}_n) < 0$. Набор $\bar{\tau}_n$ теперь изменяется по правилу (5.4.3) — (5.4.6), где $\lambda_n = i_n$, т. е. изменяется лишь вектор $\tau^{(i)}$ с номером $i = i_n$. Затем переходим к точке \tilde{x}_{n+1} , и т. д. Если окажется, что $\varphi_1(\tilde{x}_n, \bar{\tau}_n) > 0$, то λ_n можно определить произвольно, поскольку набор $\bar{\tau}_n$ не изменяется. Так определенный алгоритм на каждом шаге „решает“ одно из неравенств вида $(y(\tilde{x}_n), \tau^{(i)}) > 0$, $\tilde{x} \in X_i$, каждое из которых разрешимо в силу (5.4.9). Известно, что для каждого из таких неравенств при предложенном алгоритме (в силу конечности каждого из множеств X_i) будет не более чем конечное число итераций. Это означает, что через некоторое конечное число m шагов алгоритма придем к набору $\bar{\tau}_m$, который при любом $x \in X$ будет удовлетворять неравенству

$$\varphi_1(x, \bar{\tau}_m) > 0 \quad (5.4.10)$$

(напомним, что по принятому соглашению $\text{sign } 0 = +1$). Используя полученные наборы $\{\bar{\tau}_s\}$, $s = 1, \dots, m$, покажем, что набор $\bar{\tau}_1$ принадлежит некоторому множеству T_n с конечным индексом n .

Без ограничения общности можно считать, что в последовательности наборов $\{\bar{\tau}_s\}_{s=1}^m$ нет двух одинаковых (в противном случае соответствующие точки \tilde{x}_k следует удалить из построенной последовательности). Поскольку $\bar{\tau}_{m-1} \notin T_0$ и в то же время существует множество положительной F -меры элементов x (куда входит \tilde{x}_m) и множество положительной σ -меры в пространстве λ индексов набора $\bar{\tau}$ (куда входит индекс i_{m-1}), для которых набор $\bar{\tau}$ после преобразования $\bar{\tau} + \psi(y(x), \bar{\tau}, \lambda) \times \theta(y(x), \bar{\tau})$ будет принадлежать множеству T_0 (см. (5.4.8)),

то $\bar{\tau}_{m-1} \in T_1$, если число ν в формулах (5.2.3) — (5.2.4) выбрано достаточно малым. Повторяя это рассуждение, убедимся, что исходный набор $\bar{\tau}_1$, который был выбран произвольно, принадлежит некоторому множеству T_n с конечным индексом n . Этим проверка условий теоремы 5.2.1 заканчивается и теорема 5.4.1 доказана.

Перейдем теперь к „Комитету-II“. Напомним, что так называется набор $\bar{\tau}$, состоящий из векторов $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(N)}$, для которых при любом $x \in X = X^{(1)} \cup X^{(2)}$ справедливо неравенство

$$\varphi_{II}(x, \bar{\tau}) \Delta f(x) \min_i (y(x), \tau^{(i)}) > 0, \quad (5.4.11)$$

$$f(x) \Delta \begin{cases} +1, & \text{если } x \in X^{(1)}, \\ -1, & \text{если } x \in X^{(2)}. \end{cases}$$

Будем предполагать, что существует набор $\bar{\tau}_*$, для которого неравенство (5.4.11) выполнено в усиленном смысле:

$$\varphi_{II}(x, \bar{\tau}_*) \geq \delta > 0. \quad (5.4.12)$$

По произвольному начальному набору $\bar{\tau}_1$ определим последовательность наборов $\{\bar{\tau}_n\}$ согласно алгоритму

$$\tau_{n+1}^{(i)} = \tau_n^{(i)} - \beta_n \theta_n r_n^{(i)} q_n^{(i)} f(x_n) \frac{(y(x_n), \tau_n^{(i)})}{\|y(x_n)\|^2} \cdot y(x_n), \quad (5.4.13)$$

$$\theta_n \Delta \theta(x_n, \bar{\tau}_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_{II}(x_n, \bar{\tau}_n) \leq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi_{II}(x_n, \bar{\tau}_n) > 0; \end{cases} \quad (5.4.14)$$

$$q_n^{(i)} \Delta q^{(i)}(x_n, \bar{\tau}_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x_n)(y(x_n), \tau_n^{(i)}) \leq 0, \\ 0, & \text{если } f(x_n)(y(x_n), \tau_n^{(i)}) > 0; \end{cases} \quad (5.4.15)$$

$$r_n^{(i)} \Delta r^{(i)}(\lambda_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_n = i, \\ 0, & \text{если } \lambda_n \neq i; \end{cases} \quad (5.4.16)$$

β^n — произвольные числа из интервалов $(q, 2]$, $q > 1$, и x_1, x_2, \dots — обучающая последовательность.

Теорема 5.4.2. *Предположим, что обучающая последовательность $\{x_n\}$ составлена из независимых сл. вел. со значениями в конечном множестве $X \subset R^q$, которые имеют одинаковое распределение F , $F(X) = 1$, а $\{\lambda_n\}$ те же, что и в теореме 5.4.1.*

Предположим также, что на множестве X выполнены неравенства (5.4.12).

Тогда для алгоритма (5.4.13) — (5.4.16) выполнены все условия теоремы 5.2.1 и, следовательно, алгоритм (5.4.13) — (5.4.16) является конечно-сходящимся.

Доказательство теоремы 5.4.2 повторяет почти дословно доказательство теоремы 5.4.1. Возможно обобщение тео-

рем 5.4.1 и 5.4.2 на случай непрерывных распределений F , но соответствующие доказательства представляются технически более сложными.

§ 5.5. АЛГОРИТМЫ ОБУЧЕНИЯ С ПООЩРЕНИЕМ И СЛУЧАЙНЫЙ ПОИСК

Ниже речь идет о некоторых недостатках теории рассматриваемых алгоритмов обучения. Без ущерба для понимания последующего текста этот параграф можно пропустить не читая.

Алгоритм (5.4.1) определяет по существу *случайный поиск* в пространстве параметров τ . Возникает естественный вопрос: в чем, собственно, состоит преимущество алгоритма (5.4.1) (и вообще алгоритмов обучения с поощрением) по сравнению с простейшим алгоритмом перебора (полного или частичного) в пространстве параметров τ ? Заметим прежде всего, что аналогичный вопрос может быть задан по отношению к любой процедуре градиентного типа и ответить на него, к сожалению, столь же трудно. Интуиция подсказывает, что целенаправленный перебор параметров, осуществляемый КСА, должен в разумных случаях быстрее приводить к цели, чем случайный перебор, но доказать это в каком-либо удовлетворительном смысле на современном этапе развития теории пока не удается. Естественно было бы попытаться сравнить среднее время обучения для алгоритмов случайного поиска и КСА. Однако получение достаточно точных оценок для среднего времени обучения весьма сложно. Это время зависит от решаемой задачи и вида применяемой процедуры обучения. Более того, класс КСА алгоритмов столь широк, что по существу включает в себя в качестве частного случая алгоритмы случайного перебора (см., например, теорему 5.2.1). Это говорит о том, что в классе КСА среднее время обучения может быть сравнимо со средним временем случайного поиска нужного параметра. Это, конечно, не умаляет важности вопроса о получении достаточно точных (и простых) оценок среднего времени обучения для конкретных процедур обучения.

В литературе неоднократно отмечалась необходимость получения подобных оценок. Если бы речь шла только о необходимости построить разделяющую плоскость в случае двух классов изображений, то вместо персептронных процедур гл. 2 можно было бы воспользоваться и более простыми процедурами. Например, широко известен *гомеостат Эшби*, основанный на процедуре случайного перебора. Если искомые параметры определяют множество положительной меры, то гомеостат через конечное число испытаний перейдет в нужное состояние. (Это простое утверждение можно вывести и из теоремы (5.2.1)).

Однако такая система, полностью игнорирующая предыдущий опыт, не соответствует нашему представлению об «обучаю-

шейся» системе. И хотя мы убеждены, что значение теоремы о сходимости процедуры обучения перцептрона Розенблатта состоит, в частности, и в том, что эта процедура лучше, чем процедура простого гомеостата, вложить в это утверждение какой-либо строгий смысл пока не удастся. Те же самые замечания (и даже в большей степени) относятся к процедурам стохастической аппроксимации, рассматриваемым в гл. 8—10.

В оправдание процедур гл. 2 можно было бы сказать, что они гарантируют монотонное убывание расстояния между оценкой параметра τ_n и множеством T_0 решающих задачу параметров. В этом смысле соответствующие таким процедурам системы используют «предыдущий опыт» и последовательно улучшают свою структуру. Однако в задачах распознавания это обстоятельство часто не является определяющим, поскольку приближение оценки к искомому множеству не гарантирует, вообще говоря, уменьшения вероятности ошибки распознавания. Для того чтобы «отмежеваться» от переборных процедур, можно было бы воспользоваться оценками для числа возможных в процессе обучения итераций (изменений) вектора параметров. Приведенные в гл. 2 подобные оценки слабо зависят от размерности пространства признаков, тогда как время случайного поиска очень быстро растет с увеличением числа признаков. Однако эти оценки слабо характеризуют общее время обучения. Более того, интуитивно ясно, что при приближении к множеству искомых параметров (при независимой обучающей выборке) итерации вектора параметров будут происходить все менее интенсивно, скорость приближения оценки к искомому параметру начинает замедляться и на этом этапе теряется значительное время. Если же задаться уровнем вероятности ошибки распознавания, то можно с помощью упомянутых оценок получить оценку максимально возможного времени обучения. Однако эта оценка столь груба, что, видимо, соизмерима с оценками (или превосходит их) для среднего времени случайного поиска.

Воспользуемся случаем сказать несколько слов в пользу алгоритмов обучения с поощрением перед стохастическими алгоритмами градиентного типа.

В ряде задач изображения обучающей последовательности нельзя считать *независимыми* сл. вел. В адаптивных системах управления выходы объекта, по которым производится настройка регулятора, не являются, как правило, независимыми сл. вел. Поэтому разумность использования стохастических процедур обучения и адаптации в подобных ситуациях остается под вопросом, поскольку все известные теоремы о сходимости таких процедур существенно используют свойство независимости обучающей выборки. Вместе с тем доказательство сходимости рассмотренных в гл. 2 процедур обучения с поощрением никак не связано с предположением о независимости элементов тренировоч-

вочной последовательности. Независимость использовалась в данной главе (см. § 5.2) лишь для обоснования «высокого качества» параметров, найденных с помощью процедуры обучения (в смысле малости вероятности ошибки распознавания). Ясно, что если «учитель» формирует обучающее множество, используя предшествующий опыт работы с обучаемой системой и стараясь ей «помочь», то алгоритм обучения с поощрением сойдется (и «качество» обучения, можно предполагать, будет высоким).

Будут ли работоспособны в этой ситуации процедуры стохастической аппроксимации?

§ 5.6. О МНОГОСЛОЙНЫХ ПЕРСЕПТРОНАХ

В Введении уже говорилось, что все множество A -элементов перцептрона иногда удобно представлять в виде нескольких последовательно связанных слоев A -элементов. Такое структурное разделение множества A -элементов целесообразно, если между слоями имеются устройства, позволяющие изменять веса A -элементов. Математическое исследование таких многослойных машин — задача весьма трудная и в настоящее время почти не исследованная.

Все предыдущие результаты относились к случаю, когда веса A -элементов настраивались лишь на выходе последнего слоя A -элементов. Исключение составляли лишь ассоциативные машины (с комитетными алгоритмами обучения, см. § 5.4), когда веса A -элементов изменялись в предпоследнем слое (на выходе последнего слоя веса A -элементов были выбраны единичными). Возможны более сложные перцептроны, когда изменение весов A -элементов производится в двух местах, причем первое изменение происходит между какими-то слоями с помощью алгоритмов самообучения на не классифицированной обучающей выборке (см. гл. 10), а второй — на выходе последнего слоя A -элементов с помощью алгоритмов обучения с поощрением (см. гл. 2). Первое изменение весов осуществляется относительно медленно и интерпретируется как отбор существенных для целого класса задач признаков (имитация *эволюционного* «развития» обучаемой системы), второе — как отбор признаков, существенных для *конкретной* задачи распознавания.

Попытка дальнейшего увеличения числа слоев A -элементов наталкивается на проблему: *на каких принципах должно основываться обучение (настройка весов) и в каком смысле многослойные перцептроны предпочтительнее однослойных с соответствующим числом A -элементов?*

Пока известен по существу лишь один способ конструирования многослойных перцептронов, относительно которых могут быть даны более или менее удовлетворительные ответы на по-

ставленные вопросы. Имеются в виду перцептронные системы, реализующие метод группового учета аргументов (МГУА), предложенные А. Г. Ивахненко. Приведем вариант такой системы, предназначенной для обучения распознаванию изображений из двух классов.

Итак, пусть Ω — пространство изображений и $x(\omega)$ — отображение Ω в пространство (первичных) признаков, $x \in R^q$. На R^q заданы N вещественных функций $a_j(x)$ (A -элементы первого слоя), отображающих R^q в R^N — спрямляющее пространство. Пусть на Ω определена функция $s(\omega)$ и задана тренировочная последовательность $\omega_1, \dots, \omega_m$. Зададимся числом l , $2 \leq l < N$, и рассмотрим некоторую группу из l A -элементов $\{a_{j_1}(x), \dots, a_{j_l}(x)\}$. С помощью этой группы найдем наилучшую в среднеквадратичном смысле линейную оценку функции $s(\omega)$:

$$\sum_{k=1}^m \left| s(\omega_k) - \sum_{p=1}^l \tau^{(p)} a_{j_p}(x_k) \right|^2 = \min. \quad (5.6.1)$$

Здесь, как обычно, $x_k = x(\omega_k)$. Отыскание минимума (5.6.1) сводится к решению системы нормальных уравнений Гаусса (см. § 1.3). Если соответствующая матрица коэффициентов невырождена, то решение системы однозначно определяет оптимальный набор коэффициентов, который обозначим через $\tau_1^{(j_1)}, \dots, \tau_l^{(j_l)}$. Существенно, что для однозначной разрешимости нормальной системы уравнений необходимо $m \geq l$. Выбирая теперь различные группы по l A -элементов, можем с их помощью строить различные оптимальные линейные аппроксимации функции $s(\omega)$. Выберем из этих групп q наилучших, для которых минимум (5.6.1) наименьший, соответствующие оптимальные линейные комбинации как-то перенумеруем и обозначим через $y^{(1)}(\omega), \dots, y^{(q)}(\omega)$. Этот набор определяет отображение Ω во второе спрямляющее пространство R^q . На R^q вновь рассматриваем вещественные функции $\{a_1(y), \dots, \dots, a_N(y)\}$, $y = [y^{(1)}, \dots, y^{(q)}]$, совокупность которых интерпретируется как второй слой A -элементов. Затем описанная процедура может быть продолжена.

На этом пути возможно получение перцептронных структур со сколь угодно большим числом настраиваемых слоев A -элементов. Ясно, что при ограниченной выборке (фиксированном числе m) выбрать чрезмерно большое число настраиваемых слоев нецелесообразно ввиду вырождения соответствующих нормальных уравнений Гаусса и, как следствие этого, ухудшения экстраполяционных свойств «обученного» многослойного перцептрона.

Возможность получения большого числа настраиваемых слоев A -элементов была достигнута за счет однородного спосо-

ба настройки весов на каждом этапе. Простые модельные примеры показывают, что за счет «селекции» наилучших комбинаций вырождение нормальных уравнений Гаусса начинается позднее, чем если бы рассматривался один слой A -элементов с соответствующим их числом. Это говорит о целесообразности использования многослойных структур в случае ограниченных тренировочных последовательностей.

В целом описанный способ носит эвристический характер, его математическое исследование не производилось. Моделирование на ЭВМ подобных систем указывает, по-видимому, на их эффективность при решении сложных задач распознавания образов и других задач технической кибернетики.

Упражнения к гл. 5

1. Соотношение (5.1.8) как-то характеризует скорость убывания $p(\tau_n)$ к нулю. Нельзя ли оценить эту скорость в каких-либо естественных терминах?

2. Попытаться найти условия на функцию $\varphi(x, \tau)$ и алгоритм 1.1.1, для которых (при условии независимости элементов тренировочной последовательности) вероятность ошибки $p(\tau_n)$ монотонно убывает.

3. Проверить, какое условие теоремы 5.2.1 нарушается для алгоритма «Ява» (см. § 2.2), если в последнем выбрать $\beta_n \equiv 1$.

4. Проверить, могут ли быть выполнены все условия теоремы 2.2 в случае алгоритма «Полоска» (см. § 2.2).

5. Оценить число L в правиле останова (см. § 5.3), при котором вероятность ошибки распознавания $p(\tau_\infty)$ не превосходила бы $\delta_1 = 0,05$ с надежностью, определяемой величиной $\delta_2 = 0,01$. То же самое при $\delta_1 = 0,05$ и $\delta_2 = 0,001$ (для простоты полагать, что все изображения из тренировочной последовательности имеют одинаковые распределения).

6. Доказать, что для алгоритма (5.4.2)—(5.4.5) справедливо неравенство (5.4.6).

7. Сформулировать алгоритм построения «Комитета-III», основанного на принципе «уверенного большинства» (положительное решение принимается, когда разность поданных голосов «за» и «против» превышает заданный порог).

8. Пусть x_1, x_2, \dots — бесконечная обучающая последовательность, составленная из конечного множества элементов так, что каждый элемент в последовательности $\{x_n\}$ повторяется бесконечное число раз. Предположим, что существует вектор τ_* такой, что

$$(\tau_*, x_n) \geq \delta \|x_n\|, \quad \delta > 0.$$

Показать, что алгоритм

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \tau_n - \theta_n \beta_n \|x_n\|^{-2} (\tau_n, x_n) x_n, \\ \theta_n &= \begin{cases} 1, & \text{если } (\tau_n, x_n) \leq 0, \\ 0, & \text{если } (\tau_n, x_n) > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

β — произвольные числа из интервала $(q, 2]$, $q > 1$, являются конечно-сходящимися.

9. Используя результаты предыдущего упражнения, обобщить теоремы 5.4.1 и 5.4.2 на случай $\beta_n \neq 2$.

10. Доказать аналог теоремы 5.2.1, для произвольных сл. вел. $\{x_n\}$, $\{\lambda_n\}$ (см. замечание к теореме 5.2.1).

ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБУЧАЕМЫХ ОПОЗНАЮЩИХ СИСТЕМ

Если в пространстве признаков классы изображений пересекаются, построение процедур безошибочной классификации изображений становится невозможным. В силу вступают новые способы построения дискриминантных функций (решающих правил), основанные на использовании аппарата теории статистических решений. Язык этой теории удобен для описания многих задач обучения, и неудивительно, что подавляющее число работ по распознаванию образов в той или иной степени использует статистические методы. И хотя аппарат теории статистических решений не является основным в теории обучаемых систем, он сохраняет и будет сохранять здесь свое значение, как и во всякой теории, имеющей дело с недетерминированными объектами.

ГЛАВА 6. ВЕРОЯТНОСТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПОСТРОЕНИИ ОБУЧАЕМОЙ ОПОЗНАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Задача о построении обучаемой системы может интерпретироваться как задача нахождения решающего правила из условия минимизации некоторого функционала, называемого средним риском. В главе рассматриваются различные вопросы, связанные с таким подходом к задаче обучения.

§ 6.1. РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ КАК ЗАДАЧА ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Пусть $x(\omega)$ — сл. вел., $x: \Omega \rightarrow R^q$. Предположим, что пространство элементарных событий Ω разбито на два непересекающихся подмножества Ω_{1*} и Ω_{2*} , $\Omega = \Omega_{1*} \cup \Omega_{2*}$, $\Omega_{1*} \cap \Omega_{2*} = \emptyset$. Если подмножества $x(\Omega_{1*})$ и $x(\Omega_{2*})$ не пересекаются, то по

наблюдаемым реализациям сл. вел. x можно однозначно определить, какому подмножеству, Ω_{1*} или Ω_{2*} , принадлежит соответствующее элементарное событие. Если Ω_{1*} и Ω_{2*} трактовать как два класса изображений, то приходим к задаче построения дискриминантной функции в пространстве признаков — пространстве значений сл. вел. $x(\omega)$. Именно так и ставилась задача о построении обучаемой опознающей системы в первой части (детерминированная постановка задачи). Если же классы изображений $x(\Omega_{1*})$ и $x(\Omega_{2*})$ в пространстве признаков пересекаются, то нельзя достоверно определить, элементарному событию из какого класса отвечает та или иная наблюдаемая реализация сл. вел. Теория статистических решений дает метод, который после изучения события $\{x(\omega) = x\}$ (x — фиксированная точка пространства R^q), с минимальной вероятностью ошибки позволяет ответить на вопрос о том, какому подмножеству, Ω_{1*} или Ω_{2*} , соответствует значение x сл. вел. $x(\omega)$.

В процессе принятия классифицирующего решения различаются ошибки двоякого рода. Будем считать, что существуют две гипотезы: $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ — гипотеза, предполагающая, что элементарное событие ω , для которого $x(\omega) = x$, принадлежит Ω_{1*} , и $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$ — гипотеза о принадлежности соответствующего ω к Ω_{2*} . Считается, что *ошибка первого рода* допускается тогда, когда отклоняется гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$, хотя она справедлива, и допускается *ошибка второго рода*, если принимается гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ тогда, когда справедлива гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$. Часто ошибку первого рода называют *пропуском цели*, а ошибку второго рода — *ложной тревогой*. Чаще всего эти ошибки не бывают равноценными для того, кто принимает решение.

Пусть $s_*(\omega)$ — функция, определенная на Ω и удовлетворяющая условиям $\{s_* > 0\} = \Omega_{1*}$, $\{s_* \leq 0\} = \Omega_{2*}$. Обозначим через $\{c_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, таблицу чисел, называемую *матрицей стоимости*. Элемент c_{ij} этой матрицы интерпретируется как *штраф*, который выплачивается, если элементарное событие $\omega \in \Omega_{i*}$, а относится принимающим гипотезу к классу Ω_{j*} .

Последняя фраза нуждается в уточнении. Пусть у нас имеется вещественная функция $f(x)$, определенная в пространстве R^q . Рассматривая $f(x)$ как дискриминантную функцию, получим разбиение Ω на непересекающиеся подмножества Ω_1 и Ω_2 :

$$\Omega_1 = \{f(x(\omega)) > 0\}, \quad \Omega_2 = \{f(x(\omega)) \leq 0\}.$$

Тогда c_{ij} отвечает элементарным событиям из множества $\Omega_{i*} \cap \Omega_j$ (см. рис. 6.1.1). Для данной функции $f(x)$ можно составить величину

$$W = \sum_{i,j=1}^2 P(\Omega_{i*} \cap \Omega_j) c_{ij}, \quad (6.1.1)$$

называемую средней ошибкой, или средним риском. Выбирая различные функции $f(x)$, будем получать различные разбиения пространства Ω и, следовательно, различные значения средней ошибки. Обычно ставится задача о нахождении функции $f(x)$, дающей минимальное в некотором классе дискриминантных функций (решающих правил) значение величине W . Такая функция $f(x)$ называется *оптимальной*. Если $f(x)$ ищется в классе всех вещественных функций, то нетрудно найти оптимальную функцию. Это оптимальное решающее правило называется *байесовым*. Покажем, как получается байесово правило. Для простоты примем $c_{11} = c_{22} = 0$, т. е. что при правильном

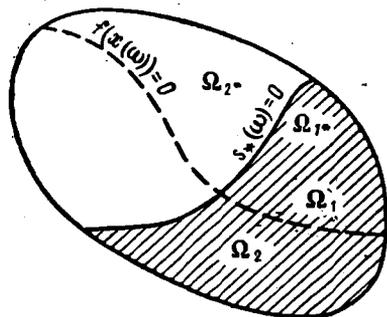


Рис. 6.1.1. Иллюстрация к построению функционала среднего риска

распознавании система не штрафует. Тогда величина (6.1.1) принимает вид

$$W = c_{12} \mathbf{P}(\Omega_{1*} \cap \Omega_2) + c_{21} \mathbf{P}(\Omega_{2*} \cap \Omega_1), \quad (6.1.2)$$

и c_{12} , c_{21} называются соответственно *весами ошибок* первого и второго родов. Вводя индикаторы $I_{\Omega_{1*}}$, $I_{\Omega_{2*}}$, I_{Ω_1} , I_{Ω_2} событий Ω_{1*} , Ω_{2*} , Ω_1 , Ω_2 и обозначая через $D_\epsilon(x)$ шар достаточно малого радиуса ϵ с центром в точке x , перепишем величину W в виде $W = M\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — сл. вел., зависящая от x , как от параметра:

$$\varphi(x) = M(c_{12} I_{\Omega_{1*}} I_{\Omega_2} + c_{21} I_{\Omega_{2*}} I_{\Omega_1} | x(\omega) \in D_\epsilon(x)).$$

Вводя индикатор $I_{\{x(\omega) \in D_\epsilon(x)\}}$ события $\{x(\omega) \in D_\epsilon(x)\}$ и используя определение условного м. о., перепишем $\varphi(x)$ на множестве $\{x(\omega) \in D_\epsilon(x)\}$ в виде

$$\varphi(x(\omega)) I_{\{x(\omega) \in D_\epsilon(x)\}} = [M I_{\{x(\omega) \in D_\epsilon(x)\}}]^{-1} \times M[(c_{12} I_{\Omega_{1*}} I_{\Omega_2} + c_{21} I_{\Omega_{2*}} I_{\Omega_1}) I_{\{x(\omega) \in D_\epsilon(x)\}}]. \quad (6.1.3)$$

Так как радиус ϵ шара $D_\epsilon(x)$ предполагается достаточно малым, то событие $\{x(\omega) \in D_\epsilon(x)\}$ принадлежит либо подмножеству Ω_1 , либо подмножеству Ω_2 (если предполагать, например, что $f(x)$ — непрерывная функция своего аргумента). Поскольку функция $\varphi(x)$ для оптимального решающего правила $f_{\text{опт}}(x)$ должна принимать наименьшее значение, то из (6.1.3) следует, что в точке x функция $f_{\text{опт}}(x)$ должна определяться условиями

$$f_{\text{опт}}(x) \geq 0, \quad \text{если } c_{12} M(I_{\Omega_{1*}} I_{\{x(\omega) \in D_\epsilon(x)\}}) \geq c_{21} M(I_{\Omega_{2*}} I_{\{x(\omega) \in D_\epsilon(x)\}}), \quad (6.1.4)$$

т. е. знак функции $f_{\text{опт}}(x)$ определяется в зависимости от выполнения знака неравенства:

$$\frac{P(\{s_* > 0\} \cap \{x(\omega) \in D_\varepsilon(x)\})}{P(\{s_* < 0\} \cap \{x(\omega) \in D_\varepsilon(x)\})} > \frac{c_{21}}{c_{12}} \triangleq \theta, \quad c_{12} > 0, \quad c_{21} > 0. \quad (6.1.5)$$

Величина θ называется *коэффициентом подобия*. Формулу (6.1.5) можно переписать в более привычных обозначениях, если ввести условные плотности вероятности. Для этого обозначим через $p(x|\Omega_{1*})$ *условную плотность распределения изображений первого класса*, а через $p(x|\Omega_{2*})$ — *условную плотность распределения изображений второго класса*:

$$\begin{aligned} p(x|\Omega_{1*}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(\{x(\omega) \in D_\varepsilon(x)\} \cap \Omega_{1*})}{p_1 V_\varepsilon(x)}, \\ p(x|\Omega_{2*}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(\{x(\omega) \in D_\varepsilon(x)\} \cap \Omega_{2*})}{(1 - p_1) V_\varepsilon(x)}, \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

где $V_\varepsilon(x)$ — (лебегов) объем шара $D_\varepsilon(x)$ и $p_1 = P(\Omega_{1*})$ — априорная вероятность появления изображений первого класса. Предполагается, что написанные в (6.1.6) пределы существуют в каждой точке x . Теперь правило определения $f_{\text{опт}}(x)$ может быть записано в виде (см. (6.1.5)).

$$\frac{p(x|\Omega_{1*})}{p(x|\Omega_{2*})} > \frac{1 - p_1}{p_1} \theta \iff f_{\text{опт}}(x) = \pm 1. \quad (6.1.7)$$

Таким образом, решающее правило, минимизирующее средний риск, сравнивает отношение условных плотностей с некоторым порогом θ , который является постоянным для определенных значений c_{12} и c_{21} . Указанное отношение плотностей иногда называют *отношением правдоподобия*.

Область применения теории статистических решений теории обучаемых систем ограничена тем, что ее методы обычно предполагают известными условные плотности распределений $p(x|\Omega_{1*})$, $p(x|\Omega_{2*})$. При решении практических задач точное значение этих плотностей получить очень трудно. Однако принципиально всегда можно найти оценки этих плотностей, определив относительные частоты, с которыми появляется данное изображение. На практике ограничиваются конечным и сравнительно небольшим числом изображений, по которым можно оценить известные распределения. Дело обстоит значительно лучше, если есть основания предполагать, что условные распределения принадлежат к некоторым известным законам. Тогда нет необходимости восстанавливать условные плотности в каждой точке пространства R^q , а достаточно по обучающей выборке оценить параметры предполагаемых законов (параметрическое оценивание). Согласно теории статистических решений обучение опознающих систем можно рассматривать как нахождение или оценку условных плотностей распределения вероятностей в пространстве описаний (пространстве признаков).

§ 6.2. ПРИМЕР НА ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Рассмотрим задачу о построении устройства, способного классифицировать два класса объектов — монеты и жетоны.

Измеряемым признаком объекта является его вес и предполагается, что веса x_1 и x_2 обоих объектов колеблются в определенных пределах и распределены по нормальному закону (рис. 6.2.1):

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}. \quad (6.2.1)$$

Из прошлого опыта известно, что монеты предъясняются чаще, чем жетоны. Частота предъяснения монет отождествляется с так называемой *априорной (допытной) вероятностью* предъяснения монеты $p = p(\mu_2)$. Тогда априорная вероятность предъяснения жетона будет равна $p_1 = 1 - p(\mu_2)$.

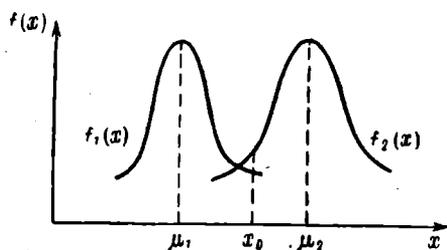


Рис. 6.2.1. Плотности распределений жетона $f_1(x)$ и монеты $f_2(x)$

Соображения экономические (или иного рода) позволяют задать *потери (стоимости, риск)* правильных и неправильных решений. Пусть стоимость такого решения, когда жетон принимается

за монету (ошибка первого рода), будет c_{12} ; стоимость ошибки второго рода, т. е. такой, когда монета принимается за жетон, будет c_{21} . Стоимость правильных решений (правильного распознавания) монеты и жетона обозначим через c_{11} и c_{22} соответственно. Условные стоимости можно записать в виде матрицы цен

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Имея перечисленные данные, можно подсчитать, какую среднюю цену придется заплатить (каков средний риск) при многократном распознавании устройством монет и жетонов.

Средняя цена (стоимость) будет равна сумме всех стоимостей, умноженных на вероятности их получения с учетом априорной вероятности

$$W = (1-p) \left[c_{11} \int_{-\infty}^{x_0} f_1(x) dx + c_{12} \int_{x_0}^{\infty} f_1(x) dx \right] + p \left[c_{22} \int_{x_0}^{\infty} f_2(x) dx + c_{21} \int_{-\infty}^{x_0} f_2(x) dx \right]. \quad (6.2.2)$$

Здесь искомым параметром является x_0 . Параметр x_0 определяет решающее правило: если для предъясненного объекта x

окажется $x > x_0$, то x объявляется монетой, в противном случае — жетоном. Чтобы найти *оптимальное решение* x_0 , минимизирующее средний риск, вычислим производную $\frac{dW}{dx_0}$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{dW}{dx_0} = (1-p)(c_{11} - c_{12})f_1(x_0) + p(c_{22} - c_{21})f_2(x_0),$$

откуда получаем, что отношение правдоподобия принимает вид

$$\frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)} = \frac{(1-p)(c_{12} - c_{11})}{p(c_{21} - c_{22})} = \Lambda_0.$$

Учитывая законы распределения (6.2.1), находим

$$\Lambda_0 = \exp\left\{-\frac{(x_0 - \mu_2)^2 - (x_0 - \mu_1)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (6.2.3)$$

$$x_0 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_2} \ln \frac{(1-p)(c_{12} - c_{11})}{p(c_{21} - c_{22})}.$$

Подставив полученное выражение для x_0 в выражение для W , получим W_{\min} — *минимальный средний риск*, или *минимальную стоимость* применения такой стратегии, при которой, как только вес объекта будет больше x_0 , принимается решение «монета», меньше x_0 — «жетон». Правило, по которому порог выбирается так, чтобы минимизировать среднюю стоимость, известно как *критерий Байеса*.

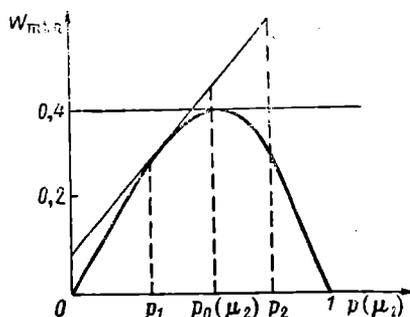


Рис. 6.2.2. Минимаксный критерий

Критерий Байеса не является единственным, применяемым при решении поставленной задачи. Рассмотрим кратко суть так называемого *минимаксного критерия*, используемого в случае, когда нет предыдущего опыта, т. е. неизвестны априорные вероятности $p = p(\mu_2)$, $p_1 = 1 - p(\mu_2)$.

Если перебрать все возможные положительные значения $p(\mu_2)$, то при этом значение W_{\min} будет меняться по определенному закону, достигая максимума при некотором значении $p_0(\mu_2)$ (при заданной фиксированной матрице стоимостей), как это показано на рис. 6.2.2. Следовательно, если исходить из предположения самых неблагоприятных значений априорных вероятностей и выбрать такую границу x_0 , при которой средняя стоимость окажется минимальной, то она при любой $p(\mu_2)$ не будет превосходить это значение. Если же выбрать любую другую границу x_0 , соответствующую какой-то предполагаемой априорной вероятности p_x , и в действительности окажется, что $p(\mu_2) > p_x$, то потери (стоимость) могут значительно превысить

тах W_{\min} , рассчитанной для данного p_0 , хотя могут оказаться и меньше такого. Поэтому минимаксная стратегия является «осторожной». Она гарантирует, что даже в худшем случае минимум среднего риска W_{\min} не превысит некоторой величины.

Подсчитаем, чему равен средний риск, если в действительности априорная вероятность $p(\mu_2) = p_2$, а мы искали оптимальное решение x_0 в предположении, что $p(\mu_2) = p_1$.

При фиксированном x_0 средний риск W является согласно формуле (6.2.2) линейной функцией априорной вероятности p . Нетрудно убедиться, что функция $W(p)$ (при фиксированном x_0) является прямой, касательной к кривой W_{\min} в точке $p = p_1$. Действительно, дифференцируя $W_{\min}(p)$ в точке $p = p_1$, получим

$$\left. \frac{dW_{\min}}{dp} \right|_{p=p_1} = \left. \frac{\partial W_{\min}}{\partial p} \right|_{p=p_1} + \left. \frac{\partial W_{\min}}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dp} \right|_{p=p_1}.$$

Но согласно определению точки x_0 (см. соотношение (6.2.3))

$$\left. \frac{\partial W_{\min}}{\partial x_0} \right|_{p=p_1} = 0. \text{ Таким образом } \left. \frac{dW_{\min}}{dp} \right|_{p=p_1} = \left. \frac{\partial W_{\min}}{\partial p} \right|_{p=p_1}, \text{ что}$$

и требовалось доказать. Следовательно, средний риск, найденный с помощью точки x_0 — оптимального решения для $p(\mu_2) = p_1$, будет равен $W(p_2)$ (см. рис. 6.2.2). Приведенная интерпретация рис. 6.2.2 показывает природу минимаксного критерия: его применение гарантирует, что каково бы ни было действительное значение $p(\mu_2)$, средний риск будет равен $\max W_{\min}$.

Во многих случаях трудно определить не только априорные вероятности, но и задать матрицу стоимостей. Однако при этом можно высказать некоторые требования к самим уровням вероятностей. Здесь может быть использован критерий Неймана—Пирсона.

Пусть требуется, чтобы условная вероятность ложной тревоги

$$F_{л. т.} = \int_{x_0}^{\infty} f_1(x) dx \quad (6.2.4)$$

была равна заданной величине: $F_{л. т.} = F^0$, и нужно найти условную вероятность пропуска сигнала $F_{пр} = \int_{-\infty}^{x_0} f_2(x) dx$.*)

Вероятность ошибки первого рода — условная вероятность ложной тревоги — называется в теории проверки гипотез *размером испытания*, условная вероятность $D = 1 - F_{пр}$ правильного распознавания называется *мощностью испытаний*.

*) Использование термина «условный» здесь связано с введением величин, характеризующих относительно частоту элементарного события внутри класса и не связанную с величинами априорных вероятностей появления классов.

Например, в случае нормального распределения

$$F_{л.т.} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 - F\left(\frac{x_0 - \mu_1}{\sigma}\right), \quad (6.2.5)$$

$$D = 1 - F\left(\frac{x_0 - \mu_2}{\sigma}\right), \quad (6.2.6)$$

где

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (6.2.7)$$

— функция Лапласа, таблицы которой хорошо известны.

Можно построить так называемую *рабочую характеристику* в координатах D и $F_{л.т.}$. Построение рабочей характеристики производится следующим образом. По заданному значению $F_{л.т.}$ с помощью формул (6.2.5), (6.2.7) и таблиц для функции Лапласа $F(z)$ определяем значение x_0 , а по найденному значению x_0 с помощью формулы (6.2.6) и таблиц для функции $F(z)$ можем вычислить значение величины D . Таким образом, каждому значению величины $F_{л.т.}$ сопоставляется единственное значение величины $D = D(F_{л.т.})$. Геометрическое место точек $\{F_{л.т.}, D(F_{л.т.})\}$ в плоскости $\{F_{л.т.}, D\}$ и представляет собой рабочую характеристику.

Можно показать, что описываемый критерий эквивалентен заданию определенных стоимостей, зависящих от $F_{л.т.}$, т. е. критерий Неймана — Пирсона сводится к некоторому отношению правдоподобия.

Поскольку указанные три критерия дают возможность оценить правильность классификации объектов по величине отношения правдоподобия Λ_0 , то на рабочей характеристике можно найти значение порога x_0 при исходных данных, соответствующих любому из трех рассмотренных критериев.

§ 6.3. ПОНЯТИЕ О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КРИТЕРИИ ОТНОШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВАЛЬДА

В приведенном выше примере различение монет от жетонов «изображение» определялось единственным признаком (знаком) — весом жетона или монеты. В более сложных задачах каждое изображение x может характеризоваться набором x^N из N параметров $(x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$ (т. е. пространство признаков имеет размерность N). В случае полного набора x^N признаков ранее было сформулировано оптимальное (байесово) правило отнесения изображения, характеризуемого набором x^N , к одному из двух классов изображений. Это правило было основано на вычислении отношения условных плотностей вероятностей

$$\frac{p(x^N | \Omega_{1*})}{p(x^N | \Omega_{2*})}$$

и сравнении этого отношения с отношением подобия λ_N , определяемого величинами априорных вероятностей и стоимостей ошибок (см. § 6.1).

Предположим теперь, что замеры $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ производятся последовательно и перед нами стоит задача построить такую дискриминантную функцию, которая давала бы удовлетворительное разделение классов при возможно меньшем числе признаков (замеров). Такой подход уместен в тех случаях, когда признаки упорядочены в порядке возрастания сложности и их замеры связаны со значительными материальными затратами, либо когда замеры упорядочены во времени и важным является скорейшее принятие решения. Для решения поставленной задачи можно использовать последовательный критерий отношения вероятностей Вальда.

Эта процедура позволяет в среднем сократить время измерения (число замеров) и, следовательно, ускорить и удешевить процедуру принятия решения. Остановимся кратко на этом вопросе.

Набор, состоящий из первых n признаков $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}$ изображения x , будем обозначать через x^n , $n \leq N$. Соответствующие условные плотности распределения внутри классов Ω_{1*} и Ω_{2*} обозначим через $p(x^n | \Omega_{1*})$ и $p(x^n | \Omega_{2*})$. На n -м шаге последовательного измерения признаков подсчитывается отношение вероятностей

$$\lambda_n = \frac{p(x^n | \Omega_{1*})}{p(x^n | \Omega_{2*})}. \quad (6.3.1)$$

При $n = N$ это отношение приводит к байесовой дискриминантной функции. После вычисления величины λ_n применяется следующая процедура отнесения изображения $x(\omega) = x$ к одному из двух классов. Задаемся двумя произвольными положительными числами A и B , $A < B$, называемыми *останавливающими границами (порогами)*, и принимаем решение

- а) $\omega \in \Omega_{1*}$, если $\lambda_n \geq B$;
- б) $\omega \in \Omega_{2*}$, если $\lambda_n \leq A$;
- в) следует произвести вычисление λ_{n+1} , если $A < \lambda_n < B$.

В случае принятия решения в) производится дополнительный замер x^{n+1} и после вычисления величины λ_{n+1} процедура принятия решения (с теми же порогами A и B) повторяется.

Допустим, что если гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ истинна, мы хотим получить решение в пользу этой гипотезы с относительной вероятностью, не меньшей $1 - e_{21}$ (т. е. если нами принято решение отнести x к первому классу изображений, то относительное число ошибок при такой классификации не должно превышать величины e_{21}), а если истинна гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$, то решение в пользу этой гипотезы должно иметь относительную вероятность, не меньшую $(1 - e_{12})$ (т. е. при принятии гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$ относительная вероятность события $\{\omega \in \Omega_{1*}\} \cap$

$\cap \{x(\omega) = x\}$ не превосходила бы e_{12}). Покажем, как следует для удовлетворения сформулированным условиям выбирать останавливающие границы A и B .

Для заданного изображения x обозначим через $D_\varepsilon^n(x^n)$ шар малого радиуса ε с центром в точке x^n (шар берется в n -мерном пространстве признаков). Обозначим через $e_n(x)$ величину

$$\begin{aligned} e_n(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [V_\varepsilon^n(x^n)]^{-1} \mathbf{P}(\{x^n(\omega) \in D_\varepsilon^n(x^n)\} \cap \Omega_{1*}) = \\ &= p_1 P(x^n | \Omega_{1*}), \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

$p_1 = \mathbf{P}(\Omega_{1*})$, $V_\varepsilon^n(x^n)$ — объем шара (предполагается, что соответствующие плотности существуют). Величина $p_n^{-1}(x)e_n(x)$ характеризует собой относительную частоту ошибок, если принята гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$,

$$p_n(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [V_\varepsilon^n(x^n)]^{-1} \mathbf{P}\{x^n(\omega) \in D_\varepsilon^n(x^n)\}.$$

Аналогично, величина $p_n^{-1}(x)[p_n(x) - e_n(x)]$ характеризует собой относительную частоту ошибок, если принята гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$.

Пусть n — наименьшее число, для которого для изображения x впервые оказалось выполненным неравенство $\lambda_n \geq B$ либо $\lambda_n \leq A$. Для определенности пусть оказалось, что $\lambda_n \geq B$. В силу (6.3.2) имеем

$$B \leq \frac{p(x^n | \Omega_{1*})}{p(x^n | \Omega_{2*})} = \frac{(1 - p_1)e_n(x)}{p_1[p_n(x) - e_n(x)]}, \quad (6.3.3)$$

или

$$p_n^{-1}(x)e_n(x) \geq \left(1 + \frac{1 - p_1}{p_1 B}\right)^{-1},$$

т. е. относительное число правильных решений $p_n^{-1}(x)e_n(x)$ при принятии гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ удовлетворяет оценке (6.3.3). Если требуется, чтобы решение в пользу истинности гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ принималось с относительной вероятностью, не меньшей $1 - e_{21}$, то число B следует определить из неравенства

$$\left(1 + \frac{1 - p_1}{p_1 B}\right)^{-1} \geq 1 - e_{21}, \quad (6.3.4)$$

или

$$B \geq \frac{1 - p_1}{p_1} \cdot \frac{1 - e_{21}}{e_{21}}. \quad (6.3.5)$$

Аналогично, если оказалось выполненным неравенство $\lambda_n \leq A$ (т. е. принимается истинной гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$), то приходим к оценке

$$A \geq \frac{(1 - p_1)e_n(x)}{p_1[p_n(x) - e_n(x)]},$$

или

$$1 - p_n^{-1}(x) e_n(x) \geq \left(1 + \frac{p_1 A}{1 - p_1}\right)^{-1}.$$

Здесь $1 - p_n^{-1}(x) e_n(x)$ — относительное число правильных решений, получаемое при принятии гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$. Если наложено требование

$$1 - p_n^{-1}(x) e_n(x) \geq 1 - e_{12},$$

то число A следует выбирать из условия

$$A \leq \frac{e_{12}}{1 - e_{12}} \cdot \frac{1 - p_1^2}{p_1}. \quad (6.3.6)$$

Резюмируем сказанное. Если останавливающие границы A и B выбраны удовлетворяющими неравенствам (6.3.5), (6.3.6), то при принятии гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$ гарантируется, что относительная вероятность ошибки не превосходит величины e_{21} , а при принятии гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$ относительная вероятность ошибки не превосходит e_{12} (напомним, что относительная вероятность здесь характеризует отношение числа ошибочных решений к числу всех принимаемых решений). Величины e_{12} и e_{21} могут задаваться произвольно из интервала $[0, 1]$. Из неравенств (6.3.5), (6.3.6) следует неравенство $A \leq B$, если $e_{12} + e_{21} \leq 1$. Если же $e_{12} + e_{21} > 1$, то возможно $A > B$, и некоторые изображения, для которых $B < \lambda_n < A$, будут классифицироваться как принадлежащие одновременно двум классам. Обычно величины e_{12} и e_{21} малы, так что каждое изображение может быть отнесено лишь к одному из классов.

Заметим, что при выводе формул (6.3.5), (6.3.6) не предполагалась независимость признаков $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ и не делалось никаких особых предположений о характере распределений.

В приведенных рассуждениях речь шла об относительных вероятностях ошибок в результате принятия той или иной из гипотез. Если заданы стоимости ошибок разного рода, то нетрудно тем же путем получить обобщение на случай, когда ограничения задаются в виде относительных потерь.

Из самого вывода формул (6.3.5), (6.3.6) следует, что при заданных e_{12} и e_{21} не существует другой процедуры, которая обладала бы меньшими значениями относительных вероятностей ошибок или давала бы выигрыш в среднем числе измерений признаков по сравнению с приведенной последовательной процедурой классификации.

Приведенная процедура классификации разбивает все множество изображений X на три подмножества $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(0)}$. В множество $X^{(1)}$ попадают все те изображения, для которых величина λ_n впервые при замерах $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ выходит за интервал (A, B) вправо, элементы множества $X^{(1)}$ принимаются отвечающими первому классу изображений. Соответственно $X^{(2)}$

состоит из изображений, для которых величина λ_n осуществляет первый выход за интервал (A, B) влево, и это множество соответствует второму классу изображений. Наконец, множество $X^{(0)}$ состоит из изображений, для которых все величины λ_n , $n = 1, \dots, N$, оказались в интервале (A, B) . Множество $X^{(0)}$ называется *множеством неопределенности (отказа)* и соответствует условиям, когда не может быть принято решение. При увеличении числа замеров множества $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ могут лишь только расширяться, а множество $X^{(0)}$ — лишь сжиматься.

Разбиение пространства изображений X на подмножества $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(0)}$ вызывает разбиение пространства элементарных событий Ω на непересекающиеся подмножества Ω_1 , Ω_2 , Ω_0 . Если, используя принятую в радиолокации терминологию, отождествить множество Ω_{1*} с классом сигналов, а множество Ω_{2*} с классом шумов, то вероятности событий

$$[P(\Omega_2)]^{-1}P(\Omega_1 \cap \Omega_{2*}) \quad \text{и} \quad [P(\Omega_{1*})]^{-1}P(\Omega_2 \cap \Omega_{1*})$$

носят соответственно название *относительных вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала*. В ряде задач, связанных с различением сигнала на фоне шумов, ставится задача о нахождении останавливающих порогов A и B , обеспечивающих уровни вероятностей ложной тревоги и пропуска сигналов, т. е. требуется так выбрать A и B , чтобы процедура последовательной классификации привела к множествам Ω_1 , Ω_2 таким, что

$$\begin{aligned} [P(\Omega_{2*})]^{-1}P(\Omega_1 \cap \Omega_{2*}) &= \alpha, \\ [P(\Omega_{1*})]^{-1}P(\Omega_2 \cap \Omega_{1*}) &= \beta. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Обозначим через $p(x|\Omega_{1*})$, $p(x|\Omega_{2*})$ соответствующие условные плотности распределений внутри классов изображений. Тогда

$$[P(\Omega_{2*})]^{-1}P(\Omega_1 \cap \Omega_{2*}) = \int_{X^{(1)}} p(x|\Omega_{2*}) dx, \quad (6.3.8)$$

$$[P(\Omega_{1*})]^{-1}P(\Omega_2 \cap \Omega_{1*}) = \int_{X^{(2)}} p(x|\Omega_{1*}) dx. \quad (6.3.9)$$

Согласно построению множеств $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ каждой точке $x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}$ однозначно соответствует такое n , $n = n(x)$, что

$$\begin{aligned} p(x^n|\Omega_{1*}) &\geq Bp(x^n|\Omega_{2*}), \quad \text{если } x \in X^{(1)}, \\ \text{и } p(x^n|\Omega_{1*}) &\leq Ap(x^n|\Omega_{2*}), \quad \text{если } x \in X^{(2)}. \end{aligned}$$

Обозначая через $I_{\{n(x)=n\}}$ индикатор множества $\{n(x)=n\}$, имеем

$$\begin{aligned} & [P(\Omega_{1*})]^{-1}P(\Omega_1 \cap \Omega_{1*}) = \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{X^{(1)}} p(x^n|\Omega_{1*}) I_{\{n(x)=n\}} dx^n \geq \\ &\geq B \sum_{n=1}^N \int_{X^{(1)}} p(x^n|\Omega_{2*}) I_{\{n(x)=n\}} dx^n = B \int_{X^{(1)}} p(x|\Omega_{2*}) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Но} \quad \int_{X^{(1)}} p(x|\Omega_{2*}) dx = [P(\Omega_{2*})]^{-1} P(\Omega_1 \cap \Omega_{2*}) = \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad & [P(\Omega_{1*})]^{-1} P(\Omega_1 \cap \Omega_{1*}) = \int_{X^{(1)}} p(x|\Omega_{1*}) dx = \\ & = 1 - \int_{\{X^{(0)} \cup X^{(2)}\}} p(x|\Omega_{1*}) dx \leq 1 - \int_{X^{(2)}} p(x|\Omega_{1*}) dx = \\ & = 1 - [P(\Omega_{1*})]^{-1} P(\Omega_2 \cap \Omega_{1*}) = 1 - \beta. \end{aligned}$$

Таким образом, $1 - \beta \geq B\alpha$, или

$$B \leq \alpha^{-1} (1 - \beta). \quad (6.3.10)$$

Аналогично соотношения

$$\begin{aligned} \int_{X^{(2)}} p(x|\Omega_{2*}) dx &= \sum_{n=1}^N \int_{X^{(2)}} p(x^n|\Omega_{2*}) I_{\{n(x) - n\}} dx^n \geq \\ &\geq A^{-1} \sum_{n=1}^N \int_{X^{(2)}} p(x^n|\Omega_{1*}) I_{\{n(x) - n\}} dx^n = \\ &= A^{-1} \int_{X^{(2)}} p(x|\Omega_{1*}) dx = [AP(\Omega_{1*})]^{-1} P(\Omega_2 \cap \Omega_{1*}) = \beta A^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad \int_{X^{(2)}} p(x|\Omega_{2*}) dx &= 1 - \int_{\{X^{(0)} \cup X^{(1)}\}} p(x|\Omega_{2*}) dx \leq \\ &\leq 1 - \int_{X^{(1)}} p(x|\Omega_{2*}) dx = 1 - \alpha \end{aligned}$$

приводят к оценке

$$A \geq \beta (1 - \alpha)^{-1}. \quad (6.3.11)$$

Соотношения (6.3.10)–(6.3.11) определяют значения верхней и нижней останавливающих границ при заданных условных вероятностях ложной тревоги α и пропуска сигнала β . Однако следует иметь в виду, что хотя с раздвижением границ A и B величины α и β становятся малыми, этим злоупотреблять не следует: чем больше разность $B - A$, тем шире множество $X^{(0)}$, когда система отказывается принимать решение.

Пример. Пусть $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ — независимые замеры признаков с одномерной гауссовой функцией плотности $p(x|\Omega_{i*})$ со средним значением m_i и дисперсией σ^2 , $i = 1, 2$. Для простоты будем вычислять $\ln \lambda_n$ вместо λ_n . После того, как выполнено первое измерение, получим

$$\begin{aligned} \ln \lambda_1 &= \ln \frac{p(x^{(1)}|\Omega_{1*})}{p(x^{(1)}|\Omega_{2*})} = \ln \frac{\exp[-(2\sigma^2)^{-1}(x^{(1)} - m_1)^2]}{\exp[-(2\sigma^2)^{-1}(x^{(1)} - m_2)^2]} = \\ &= \sigma^{-2} [(m_1 - m_2)x^{(1)} - 0,5(m_1^2 - m_2^2)]. \end{aligned}$$

Сравним $\ln \lambda_1$ с $\ln A$ и $\ln B$. Возможны следующие ситуации:

$$\text{а) } x^{(1)} \geq (m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 \ln B + 0,5(m_1 + m_2).$$

Тогда заключаем, что $\omega \in \Omega_{1*}$, т. е. изображение x относим к первому классу.

$$\text{б) } x^{(1)} < (m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 \ln A + 0,5(m_1 + m_2).$$

Тогда, заключаем, что $\omega \in \Omega_{2*}$.

$$\text{в) } (m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 \ln A < x^{(1)} - 0,5(m_1 + m_2) < (m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 \ln B.$$

Тогда следует перейти ко второму шагу процесса: произвести замер $x^{(2)}$.

После второго замера имеем $x^2 = \{x^{(1)}, x^{(2)}\}$ и $\ln \lambda_2 = \ln \frac{p(x^{(1)} | \Omega_{1*})}{p(x^{(1)} | \Omega_{2*})} +$
 $+ \ln \frac{p(x^{(2)} | \Omega_{1*})}{p(x^{(2)} | \Omega_{2*})} = (m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 [x^{(1)} + x^{(2)} - (m_1 + m_2)]$. По-прежнему,
 если $x^{(1)} + x^{(2)} \geq (m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 \ln B + (m_1 + m_2)$, то принимаем гипотезу
 $\Gamma(x \sim \Omega_{1*})$, если $x^{(1)} + x^{(2)} < (m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 \ln A + (m_1 + m_2)$, то $\Gamma(x \sim \Omega_{2*})$,
 и если $(m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 \ln A < x^{(1)} + x^{(2)} - (m_1 + m_2) < (m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 \ln B$, то
 следует произвести замер $x^{(3)}$ и перейти к третьему шагу. На n -м шаге
 процесса

$$\ln \lambda_n = \sum_{i=1}^n \ln \frac{p(x^{(i)} | \Omega_{1*})}{p(x^{(i)} | \Omega_{2*})} = \frac{m_1 - m_2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n [x^{(i)} - 0,5(m_1 + m_2)].$$

Теперь процедура классификации будет следующей:

если

$$\sum_{i=1}^n x^{(i)} \geq (m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 \ln B + \frac{n}{2} (m_1 + m_2), \text{ то } \Gamma(x \sim \Omega_{1*}), \quad (6.3.12)$$

если

$$\sum_{i=1}^n x^{(i)} < (m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 \ln A + \frac{n}{2} (m_1 + m_2), \text{ то } \Gamma(x \sim \Omega_{2*}), \quad (6.3.13)$$

и если

$$(m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 \ln A + \frac{n}{2} (m_1 + m_2) < \sum_{i=1}^n x^{(i)} < \\ < (m_1 - m_2)^{-1} \sigma^2 \ln B + \frac{n}{2} (m_1 + m_2), \quad (6.3.14)$$

то производится замер $x^{(n+1)}$ и процедура повторяется. Следует заметить, что решающие границы, определяемые формулами (6.3.12), (6.3.13) при знаках равенства, представляют собой две параллельные гиперплоскости в соответствующих пространствах признаков. Расстояние между границами (ширина области неопределенности) равна

$$[\sqrt{n} (m_1 - m_2)]^{-1} \sigma^2 (\ln A - \ln B) \approx -[\sqrt{n} (m_1 - m_2)]^{-1} \sigma^2 \ln e_{12} e_{21}$$

и с ростом n убывает. При заданных вероятностях ошибок e_{12} и e_{21} среднее число измерений, необходимых для завершения процесса, пропорционально σ^2 и обратно пропорционально $(m_1 - m_2)$.

Приведенная выше процедура последовательной классификацией может быть распространена на случай, когда число классов изображений больше двух. Здесь используется обобщенный последовательный критерий отношения вероятностей, устанавливаемый с помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше.

§ 6.4. ОПТИМАЛЬНЫЕ (БАЙЕСОВЫ) КРИТЕРИИ В МНОГОАЛЬТЕРНАТИВНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ

Пусть в общем случае имеет место l гипотез о принадлежности наблюдаемого объекта к определенному классу $\Omega_{1*}, \dots, \Omega_{l*}$, $\bigcup_{i=1}^l \Omega_{i*} = \Omega$. Необходимо найти решающую (дискриминантную) функцию, т. е. правило, руководствуясь которым можно

было бы провести классификацию — распознавание. Такая постановка задачи соответствует многоальтернативной задаче распознавания. При решении многоальтернативной задачи также воспользуемся понятием среднего риска. Соответствующая матрица $C = \{c_{ij}\}$ будет $l \times l$ матрицей. При этом c_{ij} — стоимость (потеря, риск) принятия решения о наличии объекта класса Ω_{j*} , тогда как в действительности имеет место объект класса Ω_{i*} (стоимость неправильного решения), c_{ii} — стоимость принятия правильного решения. Предполагается, что стоимость ошибочного решения выше стоимости правильного решения, т. е. $c_{ij} > c_{ii}$. Найдем, какую стоимость (в среднем по всем гипотезам) придется «оплатить» при многократном принятии решений. Введем так называемый условный риск

$$w_i = \sum_{j=1}^l c_{ij} p_{ij}$$

где

$$p_{ij} = \int_X p(x | \Omega_{i*}) I_{\{x \in X^{(j)}\}} dx;$$

$I_{\{x \in X^{(i)}\}}$ — характеристическая функция гипотезы $\Gamma(x \sim \Omega_{i*})$;

$p(x | \Omega_{i*})$ — условная плотность распределения изображений в классе Ω_{i*} ; $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$ — разбиение пространства признаков X , отвечающее выбранной гипотезе. Если $p_i = P(\Omega_{i*})$ — априорные вероятности, то *среднее значение потерь (средний риск принятия решения)* определяется формулой

$$W = \sum_{i=1}^l w_i p_i.$$

Задачей теории статистических решений является нахождение условий, при которых средний риск принятия решения минимален. W можно переписать в виде

$$W = \int_X \sum_{j=1}^l \left[\sum_{i=1}^l p_i c_{ij} p(x | \Omega_{i*}) \right] I_{\{x \in X^{(j)}\}} dx. \quad (6.4.1)$$

Так как $I_{\{x \in X^{(j)}\}} = 1$ лишь при $x \in X^{(j)}$, то минимум среднего риска находится сравнением при измеренных значениях составляющих вектора всех сумм типа $A_j = \sum_{i=1}^l p_i c_{ij} p(x | \Omega_{i*})$, стоящих в выражении (6.4.1) в квадратных скобках, и выбором такого A_k , которое для данного x меньше всех остальных. Номер k , при котором выполняется указанное условие, и является номером гипотезы, которую можно принять с наименьшим риском.

Таким образом, если в результате измерений получен случайный вектор x , то принимается гипотеза $\Gamma(x \sim \Omega_{k*})$ (считается, что присутствует изображение k -го класса) при выполнении неравенства

$$\sum_{i=1}^l p_i c_{ik} p(x | \Omega_{i*}) \leq \sum_{i=1}^l p_i c_{ij} p(x | \Omega_{i*}) \quad (6.4.2)$$

для всех $j \neq k$. Это наиболее общее выражение может быть использовано для составления алгоритма работы ЦВМ, вырабатывающей сигнал принятия решения.

Для выяснения основных закономерностей и определения роли различных параметров в задаче принятия решений рассмотрим некоторые частные случаи.

Будем считать, что потери (стоимости) правильного решения равны нулю, т. е. $c_{ii} = 0$, и что стоимость неверного решения во всех случаях одинакова, $c_{ij} = c$ при всех i и j , $i \neq j$. Тогда неравенства (6.4.2) примут вид

$$p_j p(x | \Omega_{j*}) \leq p_k p(x | \Omega_{k*}). \quad (6.4.3)$$

Так как величина $p_j p(x | \Omega_{j*})$ всегда положительна и не равна нулю, то

$$\Lambda_{kj} = \frac{p_k p(x | \Omega_{k*})}{p_j p(x | \Omega_{j*})} \geq 1 \quad (\text{при всех } j \neq k \text{ и } x \in X^{(k)}). \quad (6.4.4)$$

Это отношение вероятностей также называют отношением правдоподобия.

Удобно при вычислениях перейти к логарифмам

$$\ln \Lambda_{kj} = \ln p_k / p_j + \ln p(x | \Omega_{k*}) / p(x | \Omega_{j*}) \geq 0. \quad (6.4.5)$$

Проанализируем неравенство (6.4.5) более подробно.

Будем рассматривать изображения в спрямляющем q -мерном пространстве и предполагать, что параметры изображения в каждом из классов распределения по *нормальному (гауссову)* закону, т. е. условные плотности распределений $p(x | \Omega_{j*})$ имеют вид

$$p(x | \Omega_{j*}) = ((2\pi)^q \det K_j)^{-1/2} e^{-0,5(x - \mu_j)^* K_j^{-1}(x - \mu_j)} \quad (6.4.6)$$

($\det K_j$ — определитель матрицы K_j). Кроме того, предположим, что параметры всех рассматриваемых изображений имеют статистические свойства, характеризующиеся одинаковыми корреляционными матрицами K_j и одинаковыми априорными вероятностями p_j появления классов изображений, т. е. $K_j = K$ и $p_j = p$.

Подставив (6.4.6) в (6.4.5), получим неравенство

$$\ln \Lambda_{kj} = -0,5 [(x - \mu_k)^* K^{-1}(x - \mu_k) - (x - \mu_j)^* K^{-1}(x - \mu_j)] \geq 0. \quad (6.4.7)$$

Выражение (6.4.7) дает правило, по которому можно принять решение, измерив все составляющие q -мерного вектора x . Нетрудно заметить, что (6.4.7) определяет линейную дискриминантную функцию

$f_{kj}(x) = (x, K^{-1}(\mu_j - \mu_k)) - 0,5 [(\mu_j, K^{-1} \mu_j) - (\mu_k, K^{-1} \mu_k)]$, определяющую неравенство (6.4.7). Итак, если для всех $j \neq k$ выполнены неравенства

$$(x, K^{-1}[\mu_j - \mu_k]) \leq 0,5 [(\mu_j, K^{-1} \mu_j) - (\mu_k, K^{-1} \mu_k)], \quad (6.4.8)$$

то изображение x относится к классу Ω_{k*} . Неравенство (6.4.8)

допускает простую геометрическую интерпретацию. Для этого введем новое скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ в q -мерном пространстве по формуле $\langle x, y \rangle = (K^{-1}x, y)$. Неравенство (6.4.8) принимает вид

$$\langle \mu_j - \mu_k, x \rangle \leq 0,5 \langle \mu_j - \mu_k, \mu_j + \mu_k \rangle, \quad (6.4.9)$$

$$k = 1, \dots, l, j \neq k.$$

Неравенство (6.4.9) определяет плоскость, проходящую через

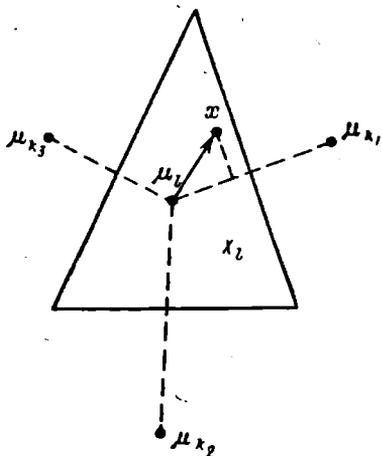


Рис. 6.4.1. Классификация по минимуму расстояния

середину отрезка, соединяющего точки μ_j и μ_k , перпендикулярно этому отрезку. Таким образом, все пространство оказывается разбитым на многогранники (рис. 6.4.1), образуемые плоскостями, проходящими через середины отрезков, соединяющих «средние» векторы μ_k . Другими словами, это разделение по минимуму расстояния.

Линейные дискриминантные функции (6.4.7) получились в результате сделанного допущения о равных корреляционных матрицах $K_j = K$. Если отказаться от этого допущения, то дискриминантные функции будут более сложными. Ограничиваясь для простоты случаем

двух классов изображений, получим решающее правило в виде

$$([K_1^{-1} - K_2^{-2}]x, x) + 2(x, K_2^{-1}\mu_2 - K_1^{-1}\mu_1) \leq$$

$$\leq (K_2^{-1}\mu_2, \mu_2) - (K_1^{-1}\mu_1, \mu_1).$$

Дискриминантная функция, определяющая это неравенство, квадратичная, и разбиение пространства изображений на области более сложное. Поскольку анализ таких функций и построение с их помощью распознающей системы усложнен, в литературе рассматриваются различные способы приближенного или точного приведения этого случая к линейной дискриминантной функции. Один из этих способов — переход к спрямляющему пространству более высокой размерности, в котором квадратичная функция становится линейной; другие пути используют дополнительные предположения о свойствах K_1, K_2, μ_1 и μ_2 , и ищется «эквивалентная» корреляционная матрица K , использование которой позволяет получить линейную дискриминантную функцию.

Напомним, что основу параметрических методов составляет получение оценок для средних векторов и корреляционных матриц по тренировочной выборке, что можно рассматривать как процесс обучения опознающей системы. Использование достаточно хороших оценок позволяет получить близкие к оптимальным байесовы критерии разделения пространства на области.

Упражнения к гл. 6

1. Пусть сл. вел. $x(\omega)$ принимает два значения, которые для наглядности будем обозначать «треугольниками» и «кружочками». Пусть Ω состоит из 15 точек $\omega_1, \dots, \omega_{15}$, каждая из которых относится к одному из множеств Ω_{1*}, Ω_{2*} в соответствии со знаком функции $s_*(\omega)$, как это определено в табл. 6.1.

Таблица 6.1

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}	ω_{15}
$x(\omega)$	○	△	△	○	△	○	△	△	△	○	△	○	○	○	○
$s_*(\omega)$	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1

Считая, что все элементарные события ω_i равновероятны, определить критерий Байеса.

Выяснить, к какому из классов относятся «кружочки» и «треугольники» в соответствии с критерием Байеса.

2. Найти по рабочей характеристике значение порога, соответствующего: а) критерию Байеса; б) минимаксному критерию.

3. Найти отношение правдоподобия, к которому может быть сведен критерий Неймана Пирсона.

ГЛАВА 7. МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА МИНИМИЗАЦИИ ЭМПИРИЧЕСКОГО РИСКА

Выше обсуждались различные постановки задачи о построении обучаемых опознающих систем. Предполагалось, что обучение производится с помощью обучающей последовательности (в принципе, бесконечной). Сам процесс обучения обычно заканчивается после показа некоторого конечного числа изображений; в гл. 5 было сформулировано правило останова процесса обучения, гарантирующее нужное качество работы «обученной» системы.

При решении ряда практических задач удобно (а иногда и единственно разумно) поступать следующим образом. Выбирается тренировочная последовательность определенной длины, скажем длины l , которая затем циклически многократно предъявляется системе до ее полного «обучения» на этой последова-

тельности. При этом «обученность» системы может пониматься в самых различных смыслах: либо по минимуму ошибок на тренировочной последовательности изображений, либо, более общо, в смысле минимума некоторого функционала качества, определенного на тренировочной последовательности.

По окончании процесса обучения система фиксирует свою структуру и затем действует в режиме «экзамена» как обычный классификатор, осуществляющий разбиение пространства изображений на классы. Представляется важным выяснить, какова должна быть длина тренировочной последовательности, чтобы при таком способе обучения можно было бы гарантировать, что характеристики качества обучения, вычисленные с помощью тренировочного множества, отличались от истинных характеристик не более чем на заданную величину. Например, если с помощью тренировочного множества вычислена частота ошибок обученной системы, то можно ли гарантировать, что эта частота будет находиться в заданной окрестности вероятности ошибки распознавания? Поскольку число ошибок — величина случайная, то можно говорить лишь о степени надежности оценки вероятности с помощью частоты ошибок. Иначе говоря, желательно ввести количественное определение представительности тренировочной последовательности с тем, чтобы достигнутое каким-либо способом качество работы опознающей системы на тренировочной последовательности с большой (наперед заданной) надежностью гарантировало близкое качество (эта близость задается заранее) работы системы на всем материале (на всем пространстве изображений). Из общих соображений ясно, что с увеличением размерности пространства признаков (спрямляющего пространства) длина тренировочной последовательности должна увеличиваться с тем, чтобы обеспечить достаточную «заселенность» пространства признаков; в противном случае качество работы обученной системы в режиме экзамена может значительно ухудшиться (иногда в этом случае говорят, что при увеличении размерности пространства признаков и при сохранении объема выборки для обучения теряется свойство хорошей экстраполяции, или свойство системы «обобщать»). Опыт практической работы с подобного рода системой подсказывает, что удовлетворительная надежность будет обеспечена, если длина тренировочной последовательности в 7—10 раз превышает размерность пространства признаков. Хотелось бы понять, чем обусловлена эта цифра и как она связана с количественными характеристиками надежности работы системы в режиме «экзамена». На первый взгляд эта задача кажется неразрешимой, так как ответ зависит и от информативности признаков, и от геометрической формы классов изображений, и от статистики выбора тренировочной последовательности, а также от огромного числа других трудно учитываемых факторов. Тем более удивительной оказывается возможность найти количест-

венную характеристику представительности тренировочной последовательности, причем эта характеристика оказывается достаточно общей и потому мало зависит от специфических особенностей той или иной задачи. Перейдем к изложению результатов, полученных при решении указанной проблемы Н. В. Вапником и А. Я. Червоненкисом.

§ 7.1. РЕШАЮЩЕЕ ПРАВИЛО И ЭМПИРИЧЕСКИЙ РИСК

Пусть $x(\omega)$ — случайный вектор, отображающий пространство элементарных событий Ω в пространство признаков. Множество Ω разложено в совокупность двух непересекающихся классов Ω_{1*} , Ω_{2*} , и пусть

$$s_*(\omega) = \begin{cases} +1, & \omega \in \Omega_{1*}, \\ -1, & \omega \in \Omega_{2*}. \end{cases} \quad (7.1.1)$$

Предположим, что на множестве изображений X определена система функций $\{f(x, \tau)\}$, определяемая векторным параметром τ . Для каждого τ рассмотрим функционал среднего риска

$$W(\tau) = \int_{\Omega} (s_*(\omega) - f(x(\omega), \tau))^2 dP, \quad (7.1.2)$$

характеризующий собой качество функции $f(x, \tau)$. Требуется найти параметр τ , доставляющий минимум функционалу (7.1.2). К такой постановке сводится задача о построении оптимальной дискриминантной функции, разделяющей пространство на два класса изображений (см. § 6.1). Дискриминантные функции $f(x, \tau)$ берутся обычно в виде

$$f(x, \tau) = f\left(\sum_{j=1}^N \tau^{(j)} a_j(x)\right), \quad (7.1.3)$$

где $a_j(x)$ — определенные на множестве изображений известные функции („признаки“ изображений, или A -элементы), $\tau^* = (\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(N)})$ — вектор весов, параметризующий семейство дискриминантных функций, и $f(z)$ — известная функция на числовой оси. Часто $f(z)$ имеет вид функции $\text{sign } z$ или пороговой функции

$$\theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \geq 0, \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Процесс определения оптимальной дискриминантной функции может оказаться простым или сложным в зависимости от способа задания класса дискриминантных функций $f(x, \tau)$. Так, в гл. 6 была построена байесова функция, являющаяся оптимальной в классе всех дискриминантных функций. Если байесова функция не входит в класс $\{f(x, \tau)\}$, то нахождение оптимальной функции может оказаться сложной задачей. Однако в любом случае нахождение оптимальных дискриминантных функций требует знания распределения вероятностей F случай-

ного вектора x , а это распределение обычно неизвестно. Поэтому вместо функционала $W(\tau)$ рассматривают эмпирический функционал $w_l(\tau)$, построенный с помощью выборки длины l .

Поясним, что имеется в виду под эмпирическим функционалом, отвечающим функционалу (7.1.2).

Пусть $\omega_1(\omega), \dots, \omega_l(\omega)$ — последовательность отображений Ω в себя таких, что сл. вел.

$$x_j \triangleq x(\omega_j) \quad (7.1.4)$$

независимы и имеют одинаковое распределение.

Эмпирический функционал среднего риска $w_l(\tau)$ определяется формулой

$$w_l(\tau) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l [s_*(\omega_j) - f(x_j, \tau)]^2. \quad (7.1.5)$$

Предположим, что имеется некоторый алгоритм минимизации функционала $w_l(\tau)$. Согласно классическим теоремам теории вероятностей частота появления любого события сходится к вероятности этого события при неограниченном увеличении числа испытаний и поэтому естественно ожидать, что минимумы функционалов $W(\tau)$ и $w_l(\tau)$ будут сколь угодно близки при $l \rightarrow \infty$. Оказывается, что это ожидание не всегда оправдано, ибо решающее правило $f_l(x, \tau_*)$, которое минимизирует $w_l(\tau)$, может иметь вероятность ошибки, значительно превосходящую минимальную вероятность ошибки. Это связано с тем обстоятельством, что метод минимизации эмпирического риска предлагает по минимуму функции $w_l(\tau)$ судить и о минимуме функции $W(\tau)$. Но для возможности такого суждения нужно, чтобы функция $w_l(\tau)$ была равномерно по τ близка к функции $W(\tau)$, ибо выброс хотя бы в одной точке τ у функции $w_l(\tau)$ может привести к тому, что в качестве минимального значения $w_l(\tau)$ будет выбрана точка выброса. В этом случае минимум $w_l(\tau)$ никак не характеризует минимум функции $W(\tau)$. Поскольку сходимость $w_l(\tau)$ к $W(\tau)$ гарантируется лишь по вероятности, то подобные выбросы всегда возможны и минимизация функции $w_l(\tau)$ не будет отвечать существу дела. Если же сходимость $w_l(\tau)$ к $W(\tau)$ равномерна по τ , то такая возможность исключена. Формально это означает, что при обсуждении сходимости $w_l(\tau)$ к $W(\tau)$ представляют интерес не классические условия, когда

$$P \{ |w_l(\tau) - W(\tau)| > \varepsilon \} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0, \quad (7.1.6)$$

а более сильные условия, обеспечивающие для любого $\varepsilon > 0$ сходимость

$$P \{ \sup_{\tau} |w_l(\tau) - W(\tau)| > \varepsilon \} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0. \quad (7.1.7)$$

В случае, когда выполняется (7.1.7), говорят, что имеет место равномерная относительно τ сходимость по вероятности.

Итак, эффективность решения задачи обучения распознаванию изображений методом минимизации эмпирического риска оказалась связанной с существованием равномерной сходимости по вероятности.

§ 7.2. КОНЕЧНЫЙ КЛАСС РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ

Рассмотрим случай, когда множество параметров $\{\tau\}$ конечно и состоит из r элементов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$. Для каждого фиксированного τ_i справедлив закон больших чисел. Одним из выражений этого закона является выполнение оценки

$$\mathbf{P} \left\{ \left| w_i(\tau_i) - W(\tau_i) \right| > \varepsilon \right\} < \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 l}{4} \right), \quad (7.2.1)$$

$$i = 1, \dots, r,$$

где, напомним, l — длина выборки, по которой конструировался функционал $w_i(\tau)$. Нас, однако, интересует вероятность одновременного выполнения всех неравенств $\left| w_i(\tau_i) - W(\tau_i) \right| > \varepsilon, \dots, \left| w_r(\tau_r) - W(\tau_r) \right| > \varepsilon$. Такая вероятность может быть оценена, если справедливы оценки (7.2.1):

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_i \left| w_i(\tau_i) - W(\tau_i) \right| > \varepsilon \right\} < r \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 l}{4} \right). \quad (7.2.2)$$

Неравенство (7.2.2) означает, что имеет место равномерная сходимость величин

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_i \left| w_i(\tau_i) - W(\tau_i) \right| > \varepsilon \right\} \quad (7.2.3)$$

к нулю при $l \rightarrow \infty$. Если потребовать, чтобы величина (7.2.3) принимала заданное значение η , то можно установить связь трех величин: длины обучающей последовательности l , точности ε и надежности $1 - \eta$:

$$r \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 l}{4} \right) = \eta. \quad (7.2.4)$$

Разрешая соотношение (7.2.4) относительно l , найдем, какова должна быть длина обучающей последовательности, чтобы с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, можно было утверждать, что минимум функционала $W(\tau)$ отличался от минимума эмпирического функционала $w_i(\tau)$ на величину, не превосходящую 2ε . Итак,

$$l = 4\varepsilon^{-2} (\ln r - \ln \eta). \quad (7.2.5)$$

Таким образом, для того частного случая, когда класс разделяющих правил (дискриминантных функций) состоит из конечного числа r элементов, имеет место равномерная сходимость и может быть оценена длина «представительной» тренировочной последовательности.

Число решающих правил является весьма грубой характе-

ристической разнообразия множества решающих правил (такая характеристика, например, никак не учитывает, состоит ли класс из одних и тех же или «близких» элементов, или же он состоит из существенно «различных» функций). Однако качественные выводы, которые можно сделать из этой оценки, довольно хорошо отражают существо дела — чем меньше емкостная характеристика класса, тем меньше должна быть длина обучающей последовательности. Наоборот, чем универсальнее обучающееся устройство, тем большая информация необходима ему для обучения.

Используя формулу (7.2.4), можно получить достаточные оценки длин обучающихся последовательностей для различных алгоритмов, реализующих метод минимизации эмпирического риска. Так может быть получена оценка длины обучающей последовательности персептрона, в котором используется метод обучения с циклическим повторением обучающей последовательности. Для этого достаточно оценить число r различных решающих правил персептрона. В случае, когда спрямляющее пространство бинарно, число различных в нем векторов не превосходит 2^m (m — размерность пространства). Существует 2^{2^m} способов разделения 2^m векторов на два класса. Однако персептрон делит множество векторов не всеми способами, а только с помощью линейных дискриминантных функций. Число r таких способов не превосходит 2^{m^2} . Подставляя эту оценку числа r в (7.2.4), получим

$$l = 4\varepsilon^{-2} (m^2 - \ln \eta), \quad (7.2.6)$$

т. е. длина обучающей последовательности должна быть пропорциональна m^2 (оценка, как будет далее видно, завышена; справедлива оценка $l \sim m \ln m$).

Как уже отмечалось, число различных решающих правил является слишком грубой характеристикой класса. Уже простейшие классы решающих правил содержат бесконечное число элементов. Например, если в персептроне спрямляющее пространство не бинарно, то число различных гиперплоскостей, разделяющих точки этого пространства, бесконечно. Для такого класса решающих правил проблема возможности замены минимизации среднего риска его эмпирической оценкой остается открытой, и доказательство возможности такой замены требует привлечения более тонких характеристик емкости класса решающих правил.

§ 7.3. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИИ РОСТА

В. Н. Вапник и А. Я. Червоненкисом [22] получены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям. Ниже будут воспроизведены некоторые более простые достаточные условия. Именно

эти условия находят применение в теории обучаемых опознающих систем. Основным понятием при получении достаточных условий равномерной сходимости является понятие о функции роста, характеризующей емкость множества дискриминантных функций. Перейдем к описанию связанных с ней понятий.

Пусть $X^{(l)} = (x_1, \dots, x_l)$ — произвольный набор из l точек множества X и \mathbf{B} — некоторая система подмножеств множества X , измеримых относительно распределения F , определенного на подмножествах множества X . Каждое множество $V \in \mathbf{B}$ на выборке $X^{(l)}$ определяет подвыборку $X_V^{(l)} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ точек, входящих в V . Говорят, что множество V индуцирует подвыборку $X_V^{(l)}$ на выборке $x^{(l)}$. Число всех различных подвыборок, индуцированных множествами из \mathbf{B} на выборке $X^{(l)}$, обозначается через $\Delta^{\mathbf{B}}(x_1, \dots, x_l)$ и называется индексом системы \mathbf{B} относительно выборки $X^{(l)} = (x_1, \dots, x_l)$. Очевидно, всегда

$$\Delta^{\mathbf{B}}(x_1, \dots, x_l) \leq 2^l. \quad (7.3.1)$$

Функция

$$m^{\mathbf{B}}(l) = \max_{X^{(l)}} \Delta^{\mathbf{B}}(x_1, \dots, x_l), \quad (7.3.2)$$

где максимум берется по всем выборкам длины l , называется функцией роста.

Теорема 7.3.1. *Функция роста $m^{\mathbf{B}}(l)$ либо тождественно равна 2^l , либо мажорируется функцией l^{n+1} , где n — константа, равная тому значению l , при котором впервые нарушилось равенство*

$$m^{\mathbf{B}}(l) = 2^l.$$

Таким образом, функции роста, отличные от 2^l , растут не быстрее некоторой степени l . Для доказательства теоремы понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 7.3.1. *Если для некоторой выборки $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ длины i и числа n , $1 \leq n \leq i$, выполнено неравенство $\Delta^{\mathbf{B}}(x_1, \dots, x_i) \geq \Phi(n, i)$, то существует такая подвыборка $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\}$ этой выборки, что $\Delta^{\mathbf{B}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = 2^n$. Здесь*

$$\Phi(n, i) = \sum_{k=0}^n c_i^k, \quad (7.3.3)$$

где c_i^k — число сочетаний из i по k , $c_i^k = i! [k!(i-k)!]^{-1}$, причем при $k > i$ полагается $c_i^k = 0$.

Доказательство проведем, используя метод индукции. Для $n=1$, а также при $n=i$ утверждения леммы непосредственно следуют из определения индекса $\Delta^{\mathbf{B}}(x_1, \dots, x_l)$ и из

того, что при $i \geq 1$ очевидны неравенства $\Phi(1, i) \geq 2$, $\Phi(i, i) = 2^i$. Предположим, далее, что лемма справедлива для $i < l$ и $n \leq i$, но не верна при $i = l$. Это значит, что существуют такая выборка $X^{(l)} = (x_1, \dots, x_l)$ и такое число $n < l$, что

$$\Delta^B(x_1, \dots, x_l) \geq \Phi(n, l), \quad (7.3.4)$$

и тем не менее ни для одной подвыборки длины n не выполняется равенство $\Delta^B(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = 2^n$.

Тогда и подавно это равенство не выполняется ни для какой подвыборки длины n выборки $X^{(l-1)} = (x_1, \dots, x_{l-1})$. Но для выборки $X^{(l-1)}$ по индуктивному допущению лемма справедлива и, следовательно,

$$\Delta^B(x_1, \dots, x_{l-1}) < \Phi(n, l-1). \quad (7.3.5)$$

Все выборки, индуцируемые множествами из B на выборке $X^{(l-1)}$, разобьем на два типа по следующему принципу. Пусть $X_B^{(l-1)}$ — некоторая подвыборка выборки $X^{(l-1)}$, индуцируемая множеством B . Вообще, может оказаться, что та же подвыборка $X_B^{(l-1)}$ индуцируется и другими множествами из B . Обозначим через B' подкласс всех множеств из B , которые на выборке $X^{(l-1)}$ индуцируют одну и ту же подвыборку, которую обозначим через $X_{B'}^{(l-1)}$. Тогда к первому типу подвыборок $X_{B'}^{(l)}$ отнесем те, для которых для любого $B \in B'$ справедливо либо равенство $X_B^{(l-1)} = X_{B'}^{(l)}$, либо $X_B^{(l)} = (X_{B'}^{(l-1)}, x_l)$. Другими словами, подвыборки первого типа таковы, что они либо отделимы от точки x_l сразу всеми множествами $B \in B'$, индуцирующими подвыборку, либо, напротив, ни одно из множеств $B \in B'$ не может отделить точку x_l от соответствующей подвыборки. Ко второму типу относятся все остальные подвыборки. Следовательно, ко второму типу относятся также индуцированные на выборке $X^{(l-1)}$ подвыборки, для которых в множестве B' индуцирующих одну и ту же подвыборку $X_{B'}^{(l-1)}$, найдутся по крайней мере два множества B_1, B_2 такие, что $X_{B_1}^{(l)} = X_{B_1}^{(l-1)}$, $X_{B_2}^{(l)} \neq X_{B_2}^{(l-1)}$. Соответственно множество B распадается на два подмножества: подмножество B_1 , которое индуцирует подвыборки первого типа, и подмножество B_2 , которое индуцирует подвыборки второго типа.

Обозначим через a число элементов в множестве подвыборок первого типа, а через b — число элементов в множестве подвыборок второго типа. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\Delta^B(x_1, \dots, x_{l-1}) = a + b, \quad (7.3.6)$$

$$\Delta^B(x_1, \dots, x_l) = a + 2b. \quad (7.3.7)$$

Учитывая (7.3.5), (7.3.6), (7.3.7), имеем

$$\Delta^B(x_1, \dots, x_l) < \Phi(n, l-1) + b. \quad (7.3.8)$$

Оценим теперь величину $\Delta^{B_1}(x_1, \dots, x_{l-1}) = b$. Для этого заметим, что не существует такой подвыборки $(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}})$ выборки (x_1, \dots, x_{l-1}) , что

$$\Delta^{B_1}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}) = 2^{n-1}. \quad (7.3.9)$$

Равенство (7.3.9) невозможно, так как из него следует справедливость равенства

$$\Delta^{B_1}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}, x_l) = 2^n,$$

которое невозможно в силу допущения, сделанного в начале доказательства леммы. Поэтому $\Delta^{B_1}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}) < 2^{n-1}$ для любой подвыборки длины $n-1$ выборки $X^{(l-1)}$. Но для выборки $X^{(l-1)}$ лемма справедлива и, следовательно,

$$b = \Delta^{B_1}(x_1, \dots, x_{l-1}) < \Phi(n-1, l-1). \quad (7.3.10)$$

Подставляя (7.3.10) в (7.3.8), получаем

$$\Delta^B(x_1, \dots, x_l) < \Phi(n, l-1) + \Phi(n-1, l-1).$$

Учитывая формулу (7.3.3), нетрудно убедиться, что $\Phi(n, l-1) + \Phi(n-1, l-1) = \Phi(n, l)$, это приводит к неравенству $\Delta^B(x_1, \dots, x_l) < \Phi(n, l)$, противоречащему допущению (7.3.4). Полученное противоречие и доказывает лемму.

Доказательство теоремы 7.3.1. Ранее уже отмечалось, $m^B(l) \leq 2^l$. Пусть $m^B(l)$ не равно тождественно 2^l и пусть n — первое значение l , при котором $m^B(l) \neq 2^l$. Тогда для любой выборки длины $l > n$ $\Delta^B(x_1, \dots, x_l) < \Phi(n, l)$. В противном случае на основании леммы нашлась бы такая подвыборка x_{i_1}, \dots, x_{i_n} , что

$$\Delta^B(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = 2^n. \quad (7.3.11)$$

Равенство же (7.3.11) невозможно, так как по допущению $m^B(n) \neq 2^n$. Таким образом, функция роста $m^B(l)$ либо тождественно равна 2^l , либо мажорируется функцией $\Phi(n, l)$. В свою очередь при $l \geq n > 0$ справедливо неравенство $\Phi(n, l) \leq l^n + 1$. Теорема 7.3.1 доказана.

§ 7.4. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

Пусть x_1, x_2, \dots, x_l — последовательность случайных векторов, отображающих пространство Ω в множество $X \subset \mathbb{R}^q$ и имеющих одинаковое распределение F , $F(X) = 1$. Пусть задан некоторый класс \mathbf{B} подмножеств множества X . Для каж-

дой выборки x_1, \dots, x_l и события $V \in \mathbf{B}$ определена частота появления события V , равная отношению числа n_V тех элементов этой выборки, которые принадлежат V , к общей длине l выборки $X^{(l)} = (x_1, \dots, x_l) : \nu_B^{(l)}(x_1, \dots, x_l) = l^{-1} n_V$.

Теорема Бернулли утверждает, что $|\nu_B^{(l)} - F(V)| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$ ($F(V)$ — вероятность события V). Нас же будет интересовать максимальное по классу \mathbf{B} отклонение частоты от вероятности

$$\pi^{(l)} = \sup_{V \in \mathbf{B}} |\nu_B^{(l)} - F(V)|.$$

Величина $\pi^{(l)}$ является согласно ее определению случайной величиной. Данный пункт посвящен оценкам вероятности события $\{\pi^{(l)} > \epsilon\}$ и выяснению условий, при которых для любого $\epsilon > 0$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{\pi^{(l)} > \epsilon\} = 0.$$

Теорема 7.4.1. *Вероятность того, что частота хотя бы для одного события класса \mathbf{B} уклонится от соответствующей вероятности в эксперименте длины l более чем на ϵ , при $l \geq 2\epsilon^{-2}$ удовлетворяет неравенству*

$$\mathbf{P} \{\pi^{(l)} > \epsilon\} \leq 6m^{\mathbf{B}}(2l) \exp\left(-\frac{\epsilon^2(l-1)}{4}\right).$$

Теорема 7.4.1 указывает на важность функции роста $m^{\mathbf{B}}(l)$, позволяющей дать оценку вероятности больших отклонений случайной величины $\pi^{(l)}$. Учитывая теорему 7.3.1, из теоремы 7.4.1, получаем

Следствие. Для того чтобы частоты событий класса \mathbf{B} сошлись (по вероятности) к соответствующим вероятностям равномерно по классу \mathbf{B} , достаточно, чтобы существовало такое конечное n , что $m^{\mathbf{B}}(l) \leq l^n + 1$ при всех достаточно больших l .

В действительности имеет место более сильное утверждение.

Теорема 7.4.2. *Если $m^{\mathbf{B}}(l) \leq l^n + 1$, то $\mathbf{P} \{\lim_{l \rightarrow \infty} \pi^{(l)} = 0\} = 1$.*

Доказательство этой теоремы легко следует из теоремы 7.4.1.

Отметим, что полученное в теореме 7.4.1 достаточное условие не зависит от свойств распределения F , характеризующего статистику показов. Учет этого распределения приводит к более тонким условиям равномерной сходимости. Эти условия основаны на введении величины

$$H^{\mathbf{B}}(l) = M \log_2 \Delta^{\mathbf{B}}(x_1, \dots, x_l),$$

называемой *энтропией* системы \mathbf{B} на выборках длины l .

Теорема 7.4.3.

$$\left\{ \lim_{l \rightarrow \infty} l^{-1} H^{\mathbf{B}}(l) = 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \lim_{l \rightarrow \infty} \pi^{(l)} = 0 \right\}$$

На доказательстве теорем 7.4.1 и 7.4.3 останавливаться не будем. Их можно найти в работах В. Н. Вапника и А. Я. Червоненкиса. Очевидно, $H^B(l) \leq (\ln 2)^{-1} \ln m^B(l)$, и из $l^{-1} m^B(l) \rightarrow 0$ следует $l^{-1} H^B(l) \rightarrow 0$. Однако в приложениях обычно распределение F неизвестно и поэтому удобнее пользоваться условиями сходимости, даваемыми теоремой 7.4.1. Эти условия, как отмечалось выше, не зависят от вида распределения F .

Доказательство теоремы 7.4.2 совсем просто при использовании оценок теоремы 7.4.1 и основано на лемме Бореля — Кантелли, которую в интересующем нас случае можно переформулировать так: если для любого положительного числа ϵ сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ |\xi_i - \xi| > \epsilon \}, \text{ то } \mathbf{P} \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = \xi \right\} = 1.$$

В условиях теоремы 7.4.1 при $l > 2\epsilon^{-2}$ справедлива оценка (7.4.5), а потому ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ \pi^{(l)} > \epsilon \}$ сходится при любом $\epsilon > 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ \pi^{(l)} > \epsilon \} &\leq \sum_{l=1}^{\lfloor 2\epsilon^{-2} \rfloor} \mathbf{P} \{ \pi^{(l)} > \epsilon \} + \\ &+ 6 \sum_{l=\lfloor 2\epsilon^{-2} \rfloor + 1}^{\infty} [(2l^n + 1) \exp\left(-\frac{\epsilon^2(l-1)}{4}\right)] < \infty, \end{aligned}$$

откуда и следует $\mathbf{P} \left\{ \lim_{l \rightarrow \infty} \pi^{(l)} = 0 \right\} = 1$.

Для многих приложений важно знать, каков должен быть объем выборки, чтобы с вероятностью, не меньшей $(1-\eta)$, можно было бы утверждать, что одновременно по всему классу событий \mathbf{B} частоты отклоняются от соответствующих вероятностей на величину, меньшую ϵ .

Иначе говоря, начиная с какого l выполняется неравенство

$$6m^B(2l) \exp\left(-\frac{\epsilon^2(l-1)}{4}\right) \leq \eta, \quad (7.4.1)$$

если

$$m^B(l) \leq l^n + 1 \lesssim l^n. \quad (7.4.2)$$

Учитывая (7.4.2) и логарифмируя (7.4.1), получим

$$x - \ln x > \ln 8n\epsilon^{-2} + \epsilon^2/4n - 1/n \ln \eta/6,$$

где $x = \epsilon^2 l/4n$. Учитывая, что $\ln x < 0,5x$, получим

$$l \geq 8n\epsilon^{-2} [\ln 8n\epsilon^{-2} + \epsilon^2/4n - 1/n \ln \eta/6]. \quad (7.4.3)$$

Неравенства (7.4.1) — (7.4.2) можно аналогичным способом решать и относительно других параметров.

§ 7.5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ (ПО ВЕРОЯТНОСТИ) В ТЕОРИИ ОБУЧАЕМЫХ ОПОЗНАЮЩИХ СИСТЕМ

Покажем, как оценки теоремы 7.4.1 могут быть использованы в задачах теории обучения распознаванию образов.

Для этого в каждой конкретной задаче следует увязать эмпирические частоты и их предельные вероятности, а также класс событий \mathbf{B} , по отношению к которому изучается равномерная сходимость, с понятиями, используемыми в теории опознающих систем. Класс событий \mathbf{B} должен вводиться так, чтобы для него функция роста $m^{\mathbf{B}}(l)$ удовлетворяла условию $l^{-1}m^{\mathbf{B}}(l) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

С другой стороны, сами события семейства \mathbf{B} должны иметь определенный с точки зрения теории обучаемых систем смысл и естественно увязываться с множеством параметров τ , определяющих дискриминантные функции.

Перселтрон: случай непересекающихся классов изображений

Пусть, как и прежде, $x = x(\omega)$ — отображение пространства Ω в пространство изображений X . Пусть на множестве X определены N вещественных функций $a_1(x), \dots, a_N(x)$, называемых A -элементами. Обозначим через y случайный вектор

$$y^* = (a_1(x), \dots, a_N(x)), \quad (7.5.1)$$

отображающий Ω в N -мерное евклидово пространство (пространство признаков, или спрямляющее пространство). Предположим, что образы $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ множеств Ω_{1*}, Ω_{2*} при отображении y не пересекаются (в этом случае множества $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ естественно назвать классами изображений в спрямляющем пространстве). Если дискриминантная функция $f(x, \tau)$ имеет вид

$$f(x, \tau) \triangleq \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^N \tau^{(i)} a_i(x) \equiv \operatorname{sgn}(y, \tau), \quad (7.5.2)$$

то функционал $W(\tau)$ (см. формулу (7.1.5)) можно переписать в виде

$$W(\tau) = \int_{R^N} [f(y) - \operatorname{sgn}(y, \tau)]^2 F(dy), \quad (7.5.3)$$

где $f(y)$ — дискриминантная функция множеств $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$,

$$f(y) = \begin{cases} +1, & \text{если } y \in Y^{(1)} \\ -1, & \text{если } y \in Y^{(2)}, \end{cases} \quad (7.5.4)$$

и F — распределение случайного вектора y . Учитывая вид (7.5.4) функции $f(y)$, функционал (7.5.3) может быть переписан в виде

$$W(\tau) = 4F\{f(y)(y, \tau) \leq 0\} = 4p(\tau), \quad (7.5.5)$$

т. е. с точностью до постоянного множителя $W(\tau)$ совпадает с вероятностью ошибки $p(\tau)$. Соответствующий эмпирический функционал $w_l(\tau)$ имеет вид

$$\begin{aligned} w_l(\tau) &= l^{-1} \sum_{i=1}^l [f(y_i) - \text{sign}(y_i, \tau)]^2 = \\ &= 4l^{-1} \sum_{i=1}^l \{1 - \text{sign}[f(y_i)(y_i, \tau)]\}, \quad (7.5.6) \\ y_i^* &= (a_1(x_i), \dots, a_N(x_i)), \end{aligned}$$

и совпадает с точностью до умножения на четыре с частотой ошибок на тренировочной выборке длины l . С каждым вектором τ свяжем событие

$$B_\tau = \{f(y)(y, \tau) \leq 0\}, \quad (7.5.7)$$

т. е. полупространство в пространстве точек

$$z = f(y)y. \quad (7.5.8)$$

Совокупность всех событий B_τ и образует семейство \mathbf{B} , равномерная сходимость по отношению к которому будет обсуждаться. Функцию роста семейства \mathbf{B} для рассматриваемого случая нетрудно оценить и эта оценка имеет вид $m^{\mathbf{B}}(l) \lesssim l^N$. Теорема 7.4.1 дает оценку при $l > 2e^{-2}$:

$$P\left\{\sup_{\tau} |w_l(\tau)/4 - p(\tau)| > \varepsilon\right\} \leq 6(2l)^N \exp\left(-\frac{\varepsilon^2(l-1)}{4}\right). \quad (7.5.9)$$

Оценка (7.5.9) показывает, что для большинства выборок длины l (большинство определяется величиной $1 - \eta$, $\eta \geq 6(2l)^N \times \exp(-\varepsilon^2(l-1)/4)$) вероятность ошибки распознавания удовлетворяет для произвольного вектора τ неравенству

$$p(\tau) \leq w_l(\tau)/4 + \varepsilon, \quad (7.5.10)$$

где $w_l(\tau)/4$ — эмпирическая частота ошибки для того же самого вектора τ . Используя формулу (7.4.3), для длины l получаем оценку

$$l \geq 8N\varepsilon^{-2} [\ln 8N\varepsilon^{-2} + \varepsilon^2/4N - 1/N \ln \eta/6]. \quad (7.5.11)$$

Таким образом, для персептрона „достаточная“ длина l обучающей последовательности (при фиксированных точности ε и надежности η) имеет порядок

$$l \sim N \ln N. \quad (7.5.12)$$

Если неравенство $\eta \geq 6(2l)^N \exp\left(-\frac{\varepsilon^2(l-1)}{4}\right)$ разрешить относительно ε , то получим, что для выборок фиксированной длины l с надежностью $1 - \eta$ можно утверждать, что вероятность ошибки распознавания отличается от найденной эмпирической частоты ошибки не больше, чем на величину

$$\varepsilon \leq \sqrt{4(l-1)^{-1} [N \ln 2l - \ln \eta/6]}. \quad (7.5.13)$$

Формула (7.5.13) справедлива равномерно по τ . Если τ_0 и τ'_0 — векторы, определяемые условиями $\min W(\tau) = W(\tau_0)$, $\min w_i(\tau) = w_i(\tau'_0)$, то из неравенств $W(\tau_0) \leq \tilde{W}(\tau'_0) \leq w_i(\tau'_0) + 4\varepsilon$ и $w_i(\tau'_0) \leq w_i(\tau_0) \leq W(\tau_0) + 4\varepsilon$, справедливых с вероятностью, большей $1 - \eta$, следует, что $|W(\tau_0) - w_i(\tau'_0)| < 4\varepsilon$, или

$$|W(\tau_0) - w_i(\tau'_0)| < 8\sqrt{(l-1)^{-1} [N \ln 2l - \ln \eta/6]}, \quad (7.5.14)$$

т. е. с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, получена оценка отклонений минимума эмпирического риска от минимума риска.

Перселтрон: случай пересекающихся классов изображений

Рассмотрим теперь ситуацию, когда при отображении $y: \Omega \rightarrow R^N$, даваемом формулой (7.5.1), образы $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ множеств Ω_{1*} и Ω_{2*} пересекаются. Дискриминантная функция $f(x, \tau)$ имеет по-прежнему вид (7.5.2). Каждый вектор τ порождает разбиение пространства Ω на непересекающиеся части Ω_1 и Ω_2 ,

$$\Omega_i = \{\text{sign}(y, \tau) = \pm 1\}, \quad i = 1, 2,$$

и функционал (7.1.5) может быть переписан в виде

$$\begin{aligned} W(\tau) &= \int_{\Omega} [s_*(\omega) - \text{sign}(y, \tau)]^2 d\mathbf{P} = \\ &= 4[\mathbf{P}\{\Omega_1 \cap \Omega_{2*}\} + \mathbf{P}\{\Omega_2 \cap \Omega_{1*}\}]. \end{aligned} \quad (7.5.15)$$

Если ввести функцию

$$d_1(y) = \mathbf{P}\{\Omega_{1*} | y\}, \quad (7.5.16)$$

называемую функцией (степенью достоверности принадлежности вектора y к классу Ω_{1*} , то соотношение (7.5.15) можно переписать в виде

$$W(\tau) = 4 \left\{ \int_{\{(y, \tau) > 0\}} d_2(y) F(dy) + \int_{\{(y, \tau) < 0\}} d_1(y) F(dy) \right\},$$

где F — распределение вероятностей случайного вектора y и $d_2(y) = 1 - d_1(y)$ — функция достоверности принадлежности y второму классу.

Эмпирический функционал $w_i(\tau)$, отвечающий $W(\tau)$, имеет вид

$$\begin{aligned} w_i(\tau) &= l^{-1} \sum_{i=1}^l [s_*(\omega_i) - \text{sign}(y_i, \tau)]^2 = \\ &= 4l^{-1} n_i(\tau) = 4 \left[\sum_{(y_i, \tau) > 0} \tilde{d}_2(y_i) + \sum_{(y_i, \tau) < 0} \tilde{d}_1(y_i) \right], \end{aligned} \quad (7.5.17)$$

где $n_i(\tau)$ — число точек ω_i в последовательности $\omega_1, \dots, \omega_l$, для которых $s_*(\omega_i) \text{sign}(y_i, \tau) \leq 0$, и $\tilde{d}_1(y_i)$, $\tilde{d}_2(y_i)$ — эмпири-

ческие функции достоверности принадлежности классам Ω_{1*} и Ω_{2*} :

$$\tilde{d}_1(y) = l^{-1} \sum_{\{y_i=y\} \cap \{s_*(\omega_i)=-+1\}} s_*(\omega_i),$$

$$\tilde{d}_2(y) = 1 - d_1(y), \quad y_i^* = (a_1(x(\omega_i)), \dots, a_N(x(\omega_i))).$$

Свяжем с каждым вектором τ событие

$$B_\tau = \{s_*(\omega) \text{ sign}(y, \tau) \leq 0\}$$

и совокупность таких событий обозначим через B . Как и в предыдущем случае, $m^B(l) \leq l^N + 1 \leq \tilde{l}^N$ и потому можно воспользоваться оценками теоремы 7.4.1. Поскольку $W(\tau)/4$ имеет смысл вероятности ошибки, а $\omega_l(\tau)/4$ — эмпирической оценки этой величины, то все сказанное в предыдущем подразделе переносится и на рассматриваемый случай с соответствующими изменениями.

В частности, в данном случае справедливы формулы (7.5.12), (7.5.13) и (7.5.14).

§ 7.6. ОБ УПОРЯДОЧЕНИИ КЛАССА РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ

Формулы предыдущего пункта показывают, что с ростом размерности N спрямляющего пространства оценки, гарантирующие заданную близость эмпирических функционалов и их пределов, ухудшаются (см., например, формулу (7.5.13)). Возникает идея минимизации величины ϵ за счет упорядочения семейства дискриминантных функций $f(x, \tau)$. Например, если $f(x, \tau)$ имеет вид (7.1.3), то естественно ввести упорядоченную последовательность семейств (упорядочение по размерности)

$$B^1 \subset B^2 \subset B^3 \subset \dots,$$

где B^i — семейство дискриминантных функций, у которых лишь i коэффициентов $\tau^{(i)}$ отличны от нуля. Очевидно, функции роста $m^{B^i}(l)$ будут теперь также упорядочены, и величина (7.5.13) может быть уменьшена. При этом, однако, минимум эмпирического функционала $\omega_l(\tau)$ будет изменяться и с уменьшением размерности пространства признаков будет возрастать. Если уровень ошибок (оценка степени риска) задан заранее, то указанные рассуждения могут позволить обеспечить ее с большей надежностью за счет упорядоченного поиска (т. е. с использованием последовательно семейства B^1, B^2, \dots и т. д.).

Семейство B может упорядочиваться и другими способами. Каждый способ упорядочивания позволяет гарантировать ту или иную надежность при достижении заданного уровня ошибок. Вообще говоря, эти уровни надежности будут различны. Последнее обстоятельство позволяет классифицировать алгоритмы упорядоченного поиска по степени их эффективности; опти-

мальным из них является тот, который гарантирует уровень ошибки в заданных пределах с наибольшей надежностью. Подробнее эти вопросы обсуждаются в работах В. Н. Вапника и А. Я. Червоненкиса.

Упражнения к гл. 7

1. Вычислить функцию роста $m^B(l)$ в случае, если:

а) множество X — прямая, B — множество лучей вида $x < a$,

б) X — сегмент $[0, 1]$, B состоит из всех открытых множеств,

в) $X = R^N$ и B — множество всех полупространств вида $(x, a) \geq C$, где a — произвольный вектор, а C — произвольная скалярная величина.

2. Показать, что наибольшее число $\Phi(n, l)$ областей, на которое n -мерное евклидово пространство может быть разбито с помощью l плоскостей, определяется формулой (7.3.3).

3. Показать, что при $n \geq 1$, $l \geq n$ для функции $\Phi(n, l)$ (см. (7.3.3)) справедлива оценка

$$\Phi(n, l) < l^n + 1.$$

4. Для функции $\Phi(n, l)$ при $l \geq n > 1$ справедлива оценка $\Phi(n, l) < 1,5 (l/n)^n e^n$. Используя эту оценку, получить вместо неравенства (7.5.11) неравенство

$$l \geq 32N\epsilon^{-2} [1 - N^{-1} (\ln \eta/6 - \epsilon^2/16) - \ln \epsilon^2/32].$$

МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В гл. 6 обсуждалась вероятностная постановка задачи о построении обучаемой системы. В этой постановке решающее правило (дискриминантная функция) определяется из условия минимума среднего риска. В гл. 7 приведен один из возможных подходов к отысканию оптимального решающего правила, основанный на минимизации эмпирического риска. Другие подходы, которые будут приведены в этой главе, основаны на рекуррентных процедурах, позволяющих по реализациям функции риска найти решающее правило, минимизирующее средний риск. Соответствующие методы получили название методов стохастической аппроксимации. Эта интересная и многообещающая область математической статистики находит все новые сферы приложения.

Сравнительно недавно Я. З. Цыпкин обратил внимание на то, что некоторые известные процедуры обучения опознающих систем являются итеративными процедурами, минимизирующими некоторые функционалы типа средних значений от функций качества и, следовательно, могут быть интерпретированы как некоторые процедуры стохастической аппроксимации.

Сейчас указанный раздел математической статистики стал составной частью математического аппарата теории обучаемых систем.

ГЛАВА 8. ПРОЦЕДУРА РОББИНСА — МОНРО

В самом начале 60-х годов Роббинс и Монро предложили итеративный метод, позволяющий по реализации найти корень уравнения регрессии. Год спустя Кифер и Вольфовиц предложили аналогичную процедуру для нахождения минимума условного математического ожидания. Эти работы привлекли внимание не только специалистов по математической статистике, но и многочисленных специалистов в различных областях науки, использующих методы математической статистики. Предложен-

ные процедуры оказались удобными в эпоху стремительного развития быстродействующих вычислительных машин, когда теория последовательных операций становится все более мощным и удобным инструментом в теоретических и прикладных исследованиях. Статьи Роббинса — Монро и Кифера — Вольфовица вызвали целый поток работ, развивающих идею последовательной минимизации функционалов качества; соответствующее направление в математической статистике получило название метода стохастической аппроксимации.

§ 8.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть ξ — сл. вел., $\xi: \Omega \rightarrow R^q$ и $Q(\xi, \tau)$ — функция качества, зависящая от сл. вел. ξ и некоторого векторного параметра τ . Требуется найти наименьшее значение функционала среднего риска:

$$\begin{aligned} W(\tau) &\triangleq \mathbf{M}Q(\xi, \tau) = \int_{\Omega} Q(\xi, \tau) dP = \\ &= \int_{R^q} Q(x, \tau) F(dx) \triangleq \mathbf{M}_x Q(x, \tau), \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

где F — распределение сл. вел. ξ , и последовательные равенства определяют общепринятые обозначения для одного и того же функционала.

Напомним, что к такой задаче сводилась рассмотренная в § 1.1 задача C_2 . Именно, функция $Q(x, \tau)$ в задаче C_2 имела вид

$$Q(x, \tau) = |f(x) - (a(x), \tau)|^2, \quad (8.1.2)$$

и функционал (8.1.1) записывается теперь в виде

$$W(\tau) = \int_{R^q} |f(x) - (a(x), \tau)|^2 F(dx). \quad (8.1.3)$$

Если функция качества $Q(x, \tau)$ дифференцируема по параметру τ , то задача нахождения минимума функционала (8.1.1) сводится к задаче нахождения корней уравнения

$$\int_{R^q} \nabla_{\tau} Q(x, \tau) F(dx) = 0, \quad (8.1.4)$$

называемого уравнением регрессии. Здесь ∇_{τ} обозначает градиент по τ , так что (8.1.4) в случае векторного τ — система уравнений для определения τ .

Если распределение F сл. вел. ξ известно, то уравнение (8.1.4) представляет собой систему в общем случае нелинейных относительно τ уравнений. В случае функции качества $Q(x, \tau)$ вида (8.1.2) система (8.1.4) линейная и существуют различные методы нахождения ее решений.

В задачах обучения распределение F обычно неизвестно, но имеется обучающая последовательность x_1, x_2, \dots , для

которой предполагается, что функция $\nabla_{\tau} Q(x, \tau)$ может быть измерена в точках $x = x_1, x_2, \dots$. Эти предположения позволяют построить процедуру последовательного перебора параметра τ_n :

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n \nabla_{\tau} Q(x_n, \tau_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.1.5)$$

где γ_n — некоторые неотрицательные числа и τ_1 — начальный вектор, выбираемый произвольно (либо из некоторого множества, если есть к тому основание). Процедура (8.1.5) носит название *процедуры Роббинса — Монро*. Смысл процедуры (8.1.5) очевиден: вектор τ изменяется таким образом, чтобы функция $Q(x, \tau)$ в данной точке $x = x_n$ уменьшилась бы. При этом, однако, функция $Q(x, \tau)$ может увеличиться в других точках x . Поэтому доказательство сходимости процедуры (8.1.5) к вектору τ , минимизирующему функционал $W(\tau)$, требует дополнительных ограничений на функцию $Q(x, \tau)$ и числовую последовательность $\{\gamma_n\}$. Процедура (8.1.5) является основной в методе *стохастической аппроксимации*.

Выбирая различные функции $Q(x, \tau)$, получим различные алгоритмы обучения опознающих систем. Рассмотрим некоторые из них.

$$1. \quad \begin{aligned} Q(x, \tau) &= |\text{sign } f(x) - \text{sign}(a(x), \tau)| (a(x), \tau), \\ \nabla_{\tau} Q(x, \tau) &= [\text{sign } f(x) - \text{sign}(a(x), \tau)] a(x). \end{aligned}$$

Процедура

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n [\text{sign } f(x_n) - \text{sign}(a(x_n), \tau_n)] a(x_n) \quad (8.1.6)$$

является алгоритмом с поощрением (см. определение (1.2.1)). Если существует вектор τ_* такой, что $f(x)(a(x), \tau_*) > \epsilon_* > 0$, то алгоритм (1.6) дает решение системы неравенств

$$f(x)(a(x), \tau) > 0. \quad (8.1.7)$$

Вопросы сходимости рекуррентных алгоритмов, дающих решение системы неравенств вида (8.1.7), подробно обсуждались в гл. 2.

$$2. \quad \begin{aligned} Q(x, \tau) &= |f(x) - (a(x), \tau)|, \\ \nabla_{\tau} Q(x, \tau) &= -\text{sign}[f(x) - (a(x), \tau)] a(x), \end{aligned}$$

приходим к алгоритму

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \gamma_n [\text{sign}[f(x_n) - (a(x_n), \tau_n)]] a(x_n). \quad (8.1.8)$$

Рассматриваемая здесь функция качества $Q(x, \tau)$ не имеет производную при некоторых значениях аргументов. В алгоритме (8.1.8) выписан обобщенный градиент этой функции.

Если существует вектор τ_* такой, что $|f(x) - (a(x), \tau_*)| < \epsilon$, $\epsilon > 0$, то $M_x Q(x, \tau_*) < \epsilon$ и, следовательно, $\min_{\tau} M_x Q(x, \tau)$ реализуется на векторе τ , для которого заведомо выполнено

неравенство $|f(x) - (a(x), \tau)| < \varepsilon$. Алгоритмы решения этих неравенств обсуждались в гл. 2 (см. § 2.2, алгоритм «Полбска»).

$$3. \quad Q(x, \tau) = |f(x) - (a(x), \tau)|^2,$$

$$\nabla_{\tau} Q(x, \tau) = -2 [f(x) - (a(x), \tau)] a(x),$$

и приходим к алгоритму

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \gamma_n [f(x_n) - (a(x_n), \tau_n)] a(x_n), \quad (8.1.9)$$

предназначенному для решения задачи C_2 (см. § 1.1). Доказательство сходимости алгоритма (8.1.9) явилось исходным пунктом различных обобщений методов стохастической аппроксимации. Иногда алгоритм (8.1.9) называют итеративной процедурой метода наименьших квадратов.

Если вместо функционала (8.1.1) рассмотрим функционал

$$W(\tau, \alpha) = M_x R(z), \quad z \triangleq f(x) [(a(x), \tau) - \alpha], \quad (8.1.10)$$

где α — некоторый неотрицательный параметр, то получим рекуррентный алгоритм вида

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \tau_n - \gamma_n^{(1)} R'(z_n) f(x_n) a(x_n), \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \gamma_n^{(2)} \{R'(z_n) + |R'(z_n)|\}, \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

где $z_n = f(x_n) (a(x_n), \tau_n) - \alpha_n$, $\alpha_1 > 0$ и $R'(z) = \frac{dR(z)}{dz}$.

Выбирая различные числовые последовательности $\{\gamma_n^{(1)}\}$, $\{\gamma_n^{(2)}\}$ и функции $R(z)$, получим новую серию алгоритмов обучения, многие из которых предложены различными авторами. Функционал (8.1.10) минимизируется по параметрам τ и α при условии $\alpha \geq 0$. Вводя обозначения

$$v = \begin{pmatrix} \tau \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} f(x) a(x) \\ -f(x) \end{pmatrix},$$

перепишем его в виде

$$W(v) = M_y R(y, v). \quad (8.1.12)$$

Таким образом, приходим к задаче минимизации функционала (8.1.12) в области

$$(v, e) > 0, \quad (8.1.13)$$

где e — вектор, у которого последняя компонента равна единице, а остальные суть нули. Такого рода задачи возникают при нахождении решения системы неравенств

$$R(y, v) > 0, \quad y \in Y, \quad (8.1.14)$$

$$(v, e_i) > 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (8.1.15)$$

где (8.1.14) называются «условными», а (8.1.15) — «безусловными» неравенствами. Эти названия объясняются тем, что при поиске параметра v в силу условий задачи не следует выходить из области, определяемой неравенствами (8.1.15). Поскольку

векторы $\{e_i\}$ обычно известны, то отыскание решения системы (8.1.14) при ограничениях (8.1.15) в принципиальном плане несущественно отличается от отыскания решения системы (8.1.14) без ограничений.

Существуют различные рекуррентные процедуры нахождения решений систем неравенств (8.1.14)—(8.1.15). Некоторые из них были приведены в гл. 2.

Следует отметить, что различные алгоритмы обучения получались независимо многими авторами. Однако из того, что многие из них имеют вид процедуры Роббинса—Монро (8.1.5), не следует, что их можно получить «автоматически» применением известных результатов. Дело в том, что найденные пока условия сходимости процедуры (8.1.5) довольно ограничены, и многие алгоритмы, по форме имеющие вид (8.1.5), не укладываются в рамки условий общих теорем метода стохастической аппроксимации. Поэтому доказательство сходимости процедур обучения часто приходится проводить каждый раз заново, и не только проводить, но и находить само доказательство.

§ 8.2. УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕДУРЫ РОББИНСА—МОНРО

Известные условия сходимости процедуры Роббинса—Монро приведены в следующем утверждении.

Теорема 8.2.1. Пусть выполнены условия:

1) x_1, x_2, \dots — последовательность независимых сл. вел., имеющих одинаковое распределение F ;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty$, $\gamma_n \geq 0$;

3) $M_x \|\nabla_{\tau} Q(x, \tau)\|^2 \leq C(1 + \|\tau\|^2)$, где C — некоторая постоянная;

4) существует вектор τ_* такой, что

$$M_x Q(x, \tau_*) = \min_{\tau} M_x Q(x, \tau) \text{ и для любого } \varepsilon > 0:$$

$$\inf_{\varepsilon < \|\tau - \tau_*\| < \varepsilon^{-1}} M_x (\nabla_{\tau} Q(x, \tau), \tau_* - \tau) > 0.$$

Тогда процедура (8.1.5) сходится к τ_* п. н. и в среднеквадратичном смысле при произвольном выборе начального вектора τ_1 .

В случае функции $Q(x, \tau) = R[j(x) - (a(x), \tau)]$ условия 3)—4) выполнены для функций $R(z)$, класс которых охватывает все виды выпуклых кусочно-непрерывных функций, растущих не быстрее параболы.

Условие 1) теоремы типично для методов стохастической аппроксимации, отказ от независимости сл. вел. x_n резко усложняет доказательство сходимости процедуры (8.1.5). Условие 2) также весьма типично и существенно его изменить не удастся: двигаясь вдоль случайного направления, определяемого быстрым убыванием функции $Q(x_n, \tau)$ (что обеспечивается выбо-

ром неотрицательных γ_n), мы должны иметь возможность двигаться как угодно далеко, так как если приращения векторов τ_n быстро убывают, то может оказаться, что мы не сможем сколь угодно близко «подобраться» к вектору τ_* . Эта возможность неограниченного приближения к τ_* обеспечивается условием $\sum \gamma_n = \infty$. Если выбрать γ_n неубывающими, то за счет появления «плохих» изображений x_n вектор τ_{n+1} может далеко «отбрасываться» от τ_* и обеспечить сходимость не удастся. Поэтому следующие приращения вектора τ_n должны убывать с тем, чтобы редкие «большие» отбросы все меньше влияли на сходимость. Условие $\sum \gamma_n^2 < \infty$ гарантирует, что полный ряд возмущений будет ограничен в среднеквадратичном (при условии ограниченности вектор-функции $\|\nabla_{\tau} Q(x, \tau)\|$).

Условие 3) теоремы также довольно типично для стохастических процедур: несколько неточно говоря, оно означает, что «в среднем» подинтегральная функция не должна расти по τ быстрее, чем парабола. В противном случае градиент функции, несмотря на убывающие множители γ_n , будет достаточно велик и возможно постоянное «проскакивание» точки τ_* (т. е. будет происходить «перерегулирование»).

Последнее условие теоремы выражает собой условие единственности минимума функционала $W(\tau)$. Если имеется целое многообразие «минимумов» функционала $W(\tau)$, то в ряде случаев удастся доказать сходимость векторов τ_n к этому многообразию. Доказательство при этом становится несколько более изощренным, в ряде случаев приходится налагать дополнительные предположения.

Таков вкратце смысл условий теоремы 8.2.1.

Перейдем к формулировке вспомогательного утверждения, полезного при доказательстве сходимости стохастических процедур.

Лемма 8.2.1. Пусть последовательности $\{\gamma_n\}$ и $\{\delta_n\}$ неотрицательных чисел таковы, что

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty.$$

Пусть, далее, последовательность β_n неотрицательных чисел удовлетворяет условиям

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \gamma_n < \infty, \quad 2) \beta_{n+1} \leq (1 + \alpha \gamma_n) \beta_n + \gamma_n + \delta_n,$$

где α — положительное число.

Тогда предел последовательности β_n существует и равен нулю.

Доказательство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \gamma_n \beta_n + \delta_n)$ в силу условия в) леммы и условия 1) сходится. Поэтому, переопределяя соответствующим образом последовательность β_n , можно без ограничения общности заменить условие 2) условием

$$\beta_{n+1} \leq \beta_n + \gamma_n + \delta_n. \quad (8.2.1)$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , $N = N(\varepsilon)$, что $\beta_n < \varepsilon$ при всех $n > N$.

Рассмотрим множество $\Gamma(\varepsilon)$ номеров $n_1 < n_2 < \dots$ таких, что $\beta_{n_i} \geq 0,5\varepsilon$, и соответствующую последовательность $\gamma_{n_1}, \gamma_{n_2}, \dots$. Если множество $\Gamma(\varepsilon)$ конечно и максимальный номер, входящий в это множество, есть n_{\max} , то можно положить $N = n_{\max}$. Поэтому в дальнейшем обсуждается лишь возможность бесконечной последовательности n_1, n_2, \dots . В соответствии с условием 1) леммы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{n_i}$ сходится. Поэтому найдется такой номер l , что

$$\sum_{n_i > l} \gamma_{n_i} < 0,25\varepsilon. \quad (8.2.2)$$

Рассмотрим также такой номер m , что

$$\gamma_n < \varepsilon/8, \quad \sum_{j=n}^{\infty} \delta_j < \varepsilon/8, \quad n \geq m. \quad (8.2.3)$$

Такое m существует в силу условий а) и б) леммы. Заметим, что в силу условия б) леммы множество номеров, не входящих в множество $\Gamma(\varepsilon)$, бесконечно. Поэтому всегда найдется номер N , не входящий в $\Gamma(\varepsilon)$ и такой, что

$$N > \max(l; m). \quad (8.2.4)$$

Покажем, что при любых $n \geq N$ справедлива оценка $\beta_n < \varepsilon$. Прежде всего это очевидно (по определению множества $\Gamma(\varepsilon)$) для тех номеров n , которые не принадлежат $\Gamma(\varepsilon)$, так как для этих номеров $\beta_n < \varepsilon/2 < \varepsilon$. Пусть теперь $n_k, n_k > N$, — некоторый номер из $\Gamma(\varepsilon)$. Рассмотрим максимальный номер n_* , меньший n_k , не принадлежащий $\Gamma(\varepsilon)$, так что

$$\beta_{n_*} < \varepsilon/2. \quad (8.2.5)$$

Поскольку N не принадлежит $\Gamma(\varepsilon)$, номер $n_* \geq N$, и поэтому в силу (8.2.4)

$$n_* > \max(l; m). \quad (8.2.6)$$

Используя формулу (8.2.1), получаем

$$\beta_{n_k} \leq \beta_{n_*} + \gamma_{n_*} + \sum_{j=n_*+1}^{n_k-1} \gamma_j + \sum_{j=n_k}^{n_k-1} \delta_j. \quad (8.2.7)$$

В силу соотношений (8.2.6) и (8.2.3)

$$\gamma_n < \varepsilon/8, \quad \sum_{j=n_*}^{n_k-1} \delta_j \leq \sum_{j=n_*}^{\infty} \delta_j < \varepsilon/8.$$

Поэтому, учитывая (8.2.5) из (8.2.7), заключаем, что $\beta_{n_k} < \varepsilon$. Тем самым завершено доказательство того, что $\beta_n < \varepsilon$ при любом $n > N$. Лемма доказана.

Ниже приводится полное доказательство теоремы 8.2.1 в частном, но наиболее интересном случае квадратичного по τ

функционала (8.1.3). В общем случае доказательство следует тем же рассуждениям, но несколько более громоздко. Кроме того, в указанном частном случае удается получить более полные результаты.

Условие 3) теоремы 8.2.1 для функционала (8.1.3) выполняется, если функция $f(x)$ и вектор-функция $a(x)$ ограничены. Условие 4) означает, что матрица

$$A = \int_{R^q} a(x) a^*(x) F(dx) \quad (8.2.8)$$

неособая. Если же $\det A = 0$, то имеется линейное многообразие «минимумов» функционала (8.1.3). Позже рассмотрим и этот случай. Если ввести вектор

$$\psi = \int_{R^q} f(x) a(x) F(dx), \quad (8.2.9)$$

то задача сводится к нахождению с помощью рекуррентной процедуры вектора τ_* , удовлетворяющего линейной системе уравнений

$$A\tau_* = \psi. \quad (8.2.10)$$

Сама процедура принимает вид

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \gamma_n \psi_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.2.11)$$

$$\text{где} \quad \psi_n = [f(x_n) - (a(x_n), \tau_n)] a(x_n) \quad (8.2.12)$$

и τ_1 — произвольный начальный вектор.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 8.2.1 в рассматриваемом частном случае. Будем пока предполагать, что

$$\det A \neq 0, \quad (8.2.13)$$

т. е. что квадратная матрица A , определяемая формулой (8.2.8), положительно определенная.

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1}^2 &\triangleq \|\tau_{n+1} - \tau_n\|^2 = \|\tau_n - \tau_* + \gamma_n \psi_n\|^2 = \\ &= \Delta_n^2 + 2\gamma_n (\tau_n - \tau_*, \psi_n) + \gamma_n^2 \|\psi_n\|^2. \end{aligned}$$

Взяв условное м. о. от обеих частей последнего соотношения, получим

$$M(\Delta_{n+1}^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) = \Delta_n^2 + 2\gamma_n (\tau_n - \tau_*, M(\psi_n(x_1, \dots, x_{n-1})) + \gamma_n^2 M(\|\psi_n\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1})). \quad (8.2.14)$$

$$\text{Но} \quad M(\psi_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = Mf(x_n)a(x_n) - \\ - [Ma(x_n)a^*(x_n)]\tau_n = \psi - A\tau_n = A(\tau_* - \tau_n)$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad M(\|\psi_n\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) &= M_x \|a(x)\|^2 [f(x) - (a(x), \tau_n)]^2 \leq \\ &\leq 2C_1^2 M_x \{ [f(x) - (a(x), \tau_*)]^2 + (a(x), \tau_n - \tau_*)^2 \} \leq \\ &\leq 2C_1^2 (C_2^2 - (A\tau_*, \tau_*) + C_1^2 \Delta_n^2) \leq C(1 + \Delta_n^2), \end{aligned}$$

$$\text{где } C_1 \triangleq \max_{x \in \mathbb{R}^q} \|a(x)\| < \infty, \quad C_2 \triangleq \max_{x \in \mathbb{R}^q} |f(x)| < \infty, \quad (8.2.15)$$

$$C \triangleq 2C_1^2 \max(C_1^2; C_2^2). \quad (8.2.16)$$

Используя эти соотношения, из (8.2.14) получим

$$\begin{aligned} M(\Delta_{n+1}^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) &\leq \Delta_n^2 - 2\gamma_n (A[\tau_* - \tau_n], \tau_* - \tau_n) + \\ &+ \gamma_n^2 M_x \|\psi_n\|^2 \leq \Delta_n^2 - 2\gamma_n (A[\tau_* - \tau_n], \tau_* - \tau_n) + \\ &+ C\gamma_n^2 (1 + \Delta_n^2). \end{aligned} \quad (8.2.17)$$

Поскольку ковариационная матрица A неотрицательна, то, в частности,

$$M(\Delta_{n+1}^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) \leq (1 + C\gamma_n^2) \Delta_n^2 + C\gamma_n^2. \quad (8.2.18)$$

Введем случайную величину $\delta_n \triangleq \Delta_n^2 \prod_{k=n}^{\infty} (1 + C\gamma_k^2)$.

$$\begin{aligned} \text{В силу (8.2.18) } M(\delta_{n+1} | x_1, \dots, x_{n-1}) &= \\ &= \prod_{k=n+1}^{\infty} (1 + C\gamma_k^2) M(\Delta_{n+1}^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) \leq \delta_n + \gamma'_n, \end{aligned}$$

$$\text{где} \quad \gamma'_n = C \prod_{k=n+1}^{\infty} (1 + C\gamma_k^2) \gamma_n^2.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n$. Из следствия 4.6.1 получаем, что

$$\delta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \delta_*, \quad (8.2.19)$$

где δ_* — некоторая неотрицательная величина. Предельное соотношение (8.2.19) означает, что справедливо соотношение $\Delta_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \Delta_*^2$ (до сих пор не использовалась невырожденность матрицы A). Покажем, что $\Delta_*^2 = 0$. Для этого вернемся вновь к неравенству (8.2.17). Взяв безусловное м. о. от обеих его частей, получим $2\gamma_n M(A[\tau_* - \tau_n], \tau_* - \tau_n) \leq M\Delta_n^2 - M\Delta_{n+1}^2 - C\gamma_n^2 (1 + M\Delta_n^2)$, откуда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n M(A[\tau_* - \tau_n], \tau_* - \tau_n)$ сходится. Действительно,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^N \gamma_n M(A[\tau_* - \tau_n], \tau_* - \tau_n) &\leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^N \gamma_n^2 (1 + M\Delta_n^2) + M\Delta_{N+1}^2 - M\Delta_1^2. \end{aligned}$$

Но по условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$ сходится, а только что было доказано, что $M\Delta_{N+1}^2 < \infty$. Поскольку по предположению выполнено (8.2.13), то $(A[\tau_* - \tau_n], \tau_* - \tau_n) \geq \alpha \|\tau_* - \tau_n\|^2 = \alpha \Delta_n^2$, где α — некоторая положительная постоянная. Окончательно для чисел $\beta_n = M\Delta_n^2$ справедливы неравенства

$$0 \leq \beta_{n+1} \leq (1 + C\gamma_n^2) \beta_n + C\gamma_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \gamma_n < \infty$$

и $\sum_{n=1}^N \gamma_n \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

По лемме 8.2.1 $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т. е. $M\Delta_n^2 \rightarrow 0$. Так как ранее было показано, что $\Delta_n^2 \rightarrow \Delta_*^2$ (п. н.), то это означает, что $\Delta_*^2 = 0$. Таким образом, доказано, что

$$\tau_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \tau_*.$$

Кроме того, $\tau_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_2} \tau_*$, поскольку $M\Delta_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Теорема доказана.

Замечание 1. В ходе доказательства теоремы существенно использовалась положительная определенность матрицы A . Исследуем теперь, что изменится, если A имеет нулевые собственные значения. Обозначим через P_0 проектор в нуль-пространство матрицы A и P_1 — дополнение P_0 , $P_1 = I - P_0$ (I — единичная матрица). Тогда в пространстве P_1R^q (R^q — пространство значений случайного вектора x) матрица A будет, как известно, неособой. Пусть τ_* — решение уравнения $A\tau = \psi$, однозначно определяемое условием $P_1\tau_* = \tau_*$. Из соотношения (8.2.11) следует, в частности, что

$$P_1\tau_{n+1} = P_1\tau_n + \gamma_n P_1\psi_n. \quad (8.2.20)$$

Вычитая из обеих частей этого равенства вектор τ_* , возводя затем обе части полученного равенства в квадрат и усредняя, приходим к оценке (8.2.17), в которой $\Delta_n = \|P_1\tau_n - \tau_*\|$. Далее дословно повторяется доказательство теоремы. Окончательно приходим к следующему утверждению.

Пусть выполнены все прежние условия, за исключением условия (8.2.13). Тогда последовательность τ_n , определяемая соотношением (8.2.12), обладает свойством: последовательность $P_1\tau_n$ в среднеквадратичном и п. и. сходится к решению τ_* уравнения $A\tau = \psi$, однозначно определяемого условием $P_1\tau_* = \tau_*$. Здесь P_1 — проектор на ненулевые подпространства матрицы A .

Из соотношения (8.2.11) следует равенство $M\tau_{n+1} = M\tau_n + \gamma_n M\psi_n$. Но $M\psi_n = M_x [f(x) - (a(x), \tau_n)] \cdot a(x_n) = \psi - AM\tau_n$. Итак, $M\tau_{n+1} + \gamma_n (\psi_n - AM\psi_n) = M\tau_{n+1}$, или

$$M\tau_{n+1} = M\tau_1 + \sum_{k=1}^n \gamma_k (\psi - AM\tau_k).$$

Отметим, что $P_0(\psi - AM\tau_k) = 0$, так как при любом векторе $M\tau_k$ вектор $\psi_n - AM\tau_n$ принадлежит множеству значений матрицы A . Следовательно, $M P_0 \tau_n = M P_0 \tau_1$, т. е. м. о. вектора $P_0 \tau_n$ остается постоянным. В частности, если $M P_0 \tau_1 = 0$, то $M P_0 \tau_n = 0$ при любом n . Поскольку

$$P_1\tau_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \tau_*, \quad \text{то} \quad M P_1\tau_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \tau_*.$$

Итак, $M\tau_n \rightarrow \tau_*$, если $P_0 M\tau_1 = 0$. Для величины $M \|P_0 \tau_n\|^2$ нетрудно получить оценку

$$M \|P_0 \tau_n\|^2 \leq \sup_n M \|P_0 \psi_n\|^2 \sum_{k=1}^n \gamma_k^2. \quad (8.2.21)$$

При выполнении условий (8.2.16) можно убедиться, что

$$M \|P_0 \tau_{n+1}\|^2 = M \|P_0 \tau_n\|^2 = \dots = M \|P_0 \tau_1\|^2. \quad (8.2.22)$$

Замечание 2. В ряде случаев удается доказать сходимость стохастической процедуры при более слабых предположениях о последова-

тельности $\{\gamma_n\}$. Это ослабление связано с отказом от условия сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$ (расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$, как нетрудно показать, является необходимым условием сходимости процедуры уже в детерминированном случае, если требовать сходимости к точке τ_* для произвольных начальных τ_1). Покажем, что при дополнительных предположениях о функции $f(x)$ возможна сходимость процедуры (8.2.12) и при $\gamma_n = \text{const}$. Предположим, что функция $f(x)$ обладает свойством

$$f(x) = (a(x), \tau_*) \quad (8.2.23)$$

(условие представимости дискриминантной функции в виде линейной комбинации A -элементов). Тогда оценка (8.2.15) может быть записана в виде

$$M(\|\psi_n\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) \leq C_3 \Delta_n^2 \quad (8.2.24)$$

где $C_3 = 2C_1^4$, а вместо неравенства (8.2.17) при условии невырожденности матрицы A получим неравенство

$$M(\Delta_{n+1}^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) \leq (1 + C_3 \gamma_n^2 - 2\gamma_n C_1) \Delta_n^2 \quad (8.2.25)$$

Поэтому

$$\beta_{n+1} \leq (1 + C_3 \gamma_n^2 - 2\gamma_n C_1) \beta_n, \quad (8.2.26)$$

$$\beta_n \triangleq M \Delta_n^2.$$

Выберем γ_n не зависящими от n , но достаточно малыми с тем, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho \triangleq (1 + C_3 \gamma_n^2 - 2\gamma_n C_1) < 1. \quad (8.2.27)$$

Тогда, очевидно, $\beta_n < \rho^n$, т. е. $\tau_n \xrightarrow{L_2} \tau_*$. Условие (8.2.27) обеспечивает также супермартингальность последовательности Δ_{n+1}^2 : $M(\Delta_{n+1}^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) \leq \Delta_n^2$. По теореме 4.6.1 п. и. существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^2$, который в силу

$\tau_n \xrightarrow{L_2} \tau_*$ равен нулю, так что имеет место и предельное соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau_*$ (п. и.).

Таким образом, при выполнении условия разложимости (8.2.23) функции $f(x)$ по функциям $a_n(x)$ сходимость стохастической процедуры имеет место при достаточно малых (см. условие (8.2.27)) γ_n , которые могут и не зависеть от n .

Если провести оценки более тщательно, то для постоянных $\gamma_n = \gamma$, обеспечивающих сходимость стохастической процедуры, можно получить эффективные оценки через известные величины. Имению: введем в рассмотрение величину

$$C_4 \triangleq \max_{x \in R^q} \|a(x)\|^2. \quad (8.2.28)$$

Вместо неравенства (8.2.17) тогда можно получить неравенство

$$M(\Delta_{n+1} | x_1, \dots, x_{n-1}) \leq \Delta_n^2 - \gamma_n (A[\tau_* - \tau_n], \tau_* - \tau_n) (2 - C_4 \gamma_n) + C_4 \gamma_n^2 M_x [f^2(x) - (a(x), \tau_*)^2]. \quad (8.2.29)$$

Предполагая, что выполнено условие (8.2.23) и что

$$\gamma_n < 2C_4^{-1}, \quad (8.2.30)$$

получим оценки

$$M(\Delta_{n+1}^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) \leq [1 - (2 - C_4 \gamma_n) \alpha \gamma_n] \Delta_n^2, \quad (8.2.31)$$

где α — наименьшее собственное значение матрицы $A : \alpha = \min_{\tau} (\tau, \tau)^{-1} (A\tau, \tau)$.

Из оценки (8.2.31) в силу (8.2.30) следует, что последовательность Δ_n^2 — супермартингал. Отсюда и следует сходимость величины Δ_n^2 п. н. к нулю. Из (8.2.31) нетрудно получить оценку

$$M\Delta_n^2 \leq \prod_{k=1}^n [1 - \alpha \gamma_k (2 - C_4 \gamma_k)] M\Delta_1^2, \quad (8.2.32)$$

характеризующую собой убывание дисперсии вектора $\tau_n - \tau_*$ с ростом n . Максимируя по γ_n величину $\gamma_n (2 - C_4 \gamma_n)$, нетрудно получить оптимальное с точки зрения оценки (8.2.32) значение γ_n . Это значение γ_n равно

$$\gamma = C_4^{-1} = \left[\max_x \|a(x)\|^2 \right]^{-1}.$$

При таком выборе $\gamma_n = \gamma$ для векторов $\tau_n - \tau_*$ гарантируется убывание среднего квадрата нормы со скоростью геометрической прогрессии

$$M\Delta_n^2 \leq (1 - \alpha C_4^{-1})^n M\Delta_1^2.$$

Заметим, что всегда $\alpha \leq C_4$. Действительно, для любого вектора τ имеем

$$\begin{aligned} \alpha \|\tau\|^2 &\leq (A\tau, \tau) = M(a(x_n) a^*(x_n) \tau, \tau) = \\ &= M(a(x_n), \tau)^2 \leq \|\tau\|^2 M\|a(x)\|^2 \leq C_4 \|\tau\|^2, \end{aligned}$$

откуда $\alpha \leq C_4$.

§ 8.3. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕДУРЫ РОББИНСА — МОНРО

При доказательстве процедуры Роббинса — Монро использовались по существу лишь супермартингальные свойства отклонения τ_n от нужного решения. Можно дать и оценку для такого отклонения, не зависящую от случая. Покажем, как это делается на примере минимизации квадратичного функционала качества (8.1.3) при выполнении условий теоремы 8.2.1.

При доказательстве теоремы 8.2.1 была получена оценка (8.2.17), из которой, в частности, следует неравенство

$$M\Delta_{n+1}^2 \leq (1 - 2\alpha\gamma_n + C_3\gamma_n^2) M\Delta_n^2 + C_3\gamma_n^2,$$

или

$$M\Delta_{n+1}^2 \leq \alpha_n M\Delta_n^2 + \kappa_n, \quad (8.3.1)$$

где

$\alpha_n \triangleq 1 - 2\alpha\gamma_n + C_3\gamma_n^2$, $\kappa_n \triangleq C_3\gamma_n^2$ и α — наименьшее собственное значение ковариационной матрицы A . Поскольку $\alpha_n < 1$ при достаточно больших n , то удастся установить способ выбора числовых последовательностей β_n , мажорирующих величины $M\Delta_n^2$.

Теорема 8.3.1. Пусть существует последовательность положительных чисел β_n таких, что начиная с некоторого $n = n_*$ выполнено хотя бы одно из следующих двух условий (8.3.2) и (8.3.3):

$$\beta_{n+1}^{-1} \alpha_n \beta_n \leq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n+1}^{-1} x_n < \infty, \quad (8.3.2)$$

$$\beta_{n+1}^{-1} (\alpha_n \beta_n + x_n) \leq 1. \quad (8.3.3)$$

Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что справедлива оценка

$$M \Delta_n^2 \leq C \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.3.4)$$

Доказательство для (8.3.2), очевидно, достаточно провести при $n > n_*$. Пусть выполнено (8.3.2). Введем величину

$$z_n \triangleq \beta_n^{-1} M \Delta_n^2. \quad (8.3.5)$$

Подставляя в (8.3.1), получим

$$z_{n+1} \leq \beta_{n+1}^{-1} \alpha_n \beta_n z_n + \beta_{n+1}^{-1} x_n.$$

В соответствии с (8.3.2) это неравенство может быть усилено:

$$z_{n+1} \leq z_n + \beta_{n+1}^{-1} x_n, \quad n \geq n_*.$$

Суммируя полученные неравенства от n_* до $n > n_*$, получим

$$z_{n+1} \leq z_{n_*} + \sum_{k=n_*}^{n-1} \beta_{k+1}^{-1} x_k, \quad n > n_*,$$

или

$$z_{n+1} \leq z_{n_*} + \sum_{k=n_*}^{\infty} \beta_{k+1}^{-1} x_k.$$

Учитывая (8.3.5), приходим к (8.3.4).

Пусть теперь выполнено условие (8.3.3). Докажем (8.3.4) по индукции. Пусть при некотором $n \geq n_*$ неравенство (8.3.4) выполнено, т. е. пусть $M \Delta_n^2 \leq C_1 \beta_n$, $C_1 \geq 1$. Тогда

$$M \Delta_{n+1}^2 \leq \alpha_n M \Delta_n^2 + x_n \leq C_1 \alpha_n \beta_n + x_n = C_1 \beta_{n+1}^{-1} (\alpha_n \beta_n + C_1^{-1} x_n) \beta_{n+1}.$$

Но так как $C_1 \geq 1$, то $\beta_{n+1}^{-1} (\alpha_n \beta_n + C_1^{-1} x_n) \leq \beta_{n+1}^{-1} (\alpha_n \beta_n + x_n)$, т. е. $M \Delta_{n+1}^2 \leq C_1 \beta_{n+1} + 1$, что оправдывает индукционный переход. Оправдание базы индукции очевидно, если принять

$$M \Delta_{n_*}^2 \leq \max(1; \beta_{n_*}^{-1} M \Delta_{n_*}^2) \beta_{n_*}.$$

Аналогично могут быть получены оценки снизу, если воспользоваться неравенством $M \Delta_{n+1}^2 \geq \tilde{\alpha}_n M \Delta_n^2$, которое справедливо для величин Δ_n^2 , рассмотренных выше ($\tilde{\alpha}_n = 1 - \beta \gamma_n$, β — максимальное собственное значение матрицы A). Именно, если существует при $n > n_*$ последовательность $\tilde{\beta}_n$ таких, что

$\tilde{\beta}_{n+1}^{-1} \tilde{\alpha}_n \tilde{\beta}_n \geq 1$, то существует постоянная $\tilde{C} > 0$ такая, что для всех $n > n_*$ выполнено неравенство $M \Delta_n^2 \geq \tilde{C} \tilde{\beta}_n$. Доказательство аналогично.

Полученные оценки характеризуют скорость сходимости в «интегральном» смысле. Возможно получение оценок скорости для почти всех реализаций, но эти оценки более сложны и здесь рассматриваться не будут.

З а м е ч а н и е. Неравенство (8.3.3) указывает на возможность получения оценок для величины $M \Delta_n^2$, когда сходимости $M \Delta_n^2 \rightarrow 0$ может и не быть. Действительно, предположим, что $\gamma_n = \gamma$ и величина γ достаточно мала, так что выполнены неравенства (8.2.27). Если при этом условие (8.2.21) не выполнено, то сходимости $\Delta_n \rightarrow 0$ может и не быть. Однако условие (8.3.3) будет выполнено при

$$\beta_n \Delta_n \beta \geq \sup_n (1 - \alpha_n)^{-1} x_n,$$

и, следовательно, оценка (8.3.4) принимает вид $M \Delta_n^2 < C \beta$, $n = 1, 2, \dots$. Нетрудно убедиться, что величины x_n , а потому и величина β зависят от величины $\delta \Delta M_x |f(x) - (a(x), \tau_*)^2|$, причем $\beta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Таким образом, если в стохастической процедуре выбраны достаточно малые числа $\gamma_n = \gamma$, то хотя сходимости процедуры может и не быть, дисперсия величины Δ_n будет мала, если мала величина δ .

§ 8.4. ПСЕВДОГРАДИЕНТНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Метод доказательства сходимости стохастических процедур, основанный на свойстве сходимости супермартингалов, может быть применен к значительно более широкому классу процедур, чем рассмотренные в § 8.2. Действительно, при доказательстве теоремы 8.2.1 важно было лишь, чтобы на каждом шаге итерация (коррекция) вектора τ происходила в направлении, которое только в среднем близко к направлению градиента $\nabla_x Q(x, \tau)$ функции $Q(x, \tau)$. Это замечание указывает на возможность построения новых процедур, называемых псевдоградиентными, которые в ряде случаев могут оказаться более удобными, чем градиентные процедуры в § 8.2. Рассмотрим вопрос о псевдоградиентных процедурах подробнее.

Итак, пусть имеется функционал среднего риска

$$W(\tau) = M_x Q(x, \tau) = \int_{R^q} Q(x, \tau) F(dx) \quad (8.4.1)$$

и требуется найти оптимальное значение параметра τ_* :

$$W(\tau_*) = \min W(\tau). \quad (8.4.2)$$

Предположим, что имеется последовательность независимых сл. вел. x_1, x_2, \dots , имеющих одинаковое распределение F , и функция $\psi(x, \tau)$, значения которой известны на последовательности $\{x_n\}$ при любом n . По этим данным и произвольному

вектору τ_1 может быть организована рекуррентная процедура

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n \psi(x_n, \tau_n), \quad (8.4.3)$$

где γ_n — последовательность неотрицательных величин. При $\psi(x, \tau) = \nabla_x Q(x, \tau)$ процедура (8.4.2) совпадает с процедурой Роббинса—Монро, рассмотренной в § 8.1—8.2. Возникает вопрос о сходимости последовательности τ_n к оптимальному вектору τ_* .

Предположим выполненными следующие условия:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty.$$

2) Множество T точек τ_* , удовлетворяющих условию (8.4.2), непусто и $W(\tau_*) > -\infty$.

$$3) \|W(\tau' + \tau'') - W(\tau') - (\nabla W(\tau'), \tau'')\| \leq \\ \leq C_1 \|\tau''\|^2, \quad \forall \tau', \forall \tau'', \quad C_1 > 0.$$

$$4) M_x \|\psi(x, \tau)\|^2 \leq C_2 + C_3 W(\tau) + \\ + C_4 (\nabla W(\tau), M_x \psi(x, \tau)), \\ \forall \tau, \quad C_2 \geq 0, \quad C_3 \geq 0, \quad C_4 \geq 0.$$

Обозначим через $\rho(\tau, T)$ расстояние от произвольной точки τ до множества T : $\rho(\tau, T) = \inf_{\tau' \in T} \|\tau' - \tau\|$.

$$5) \inf_{\tau: \rho(\tau, T) \geq \varepsilon} W(\tau) > \inf_{\tau} W(\tau) \quad \text{при } \varepsilon > 0.$$

6) $(\nabla W(\tau), M_x \psi(x, \tau)) \geq \delta(\varepsilon) > 0$ при $\rho(\tau, T) > \varepsilon$ (для всех $\varepsilon > 0$).

Условие 6) определяет усиленное свойство псевдоградиентности вектор-функции $\psi(x, \tau)$.

Теорема 8.4.1. При выполнении условий 1) — 6) для последовательности $\{\tau_n\}$, построенной согласно алгоритму (8.4.3) с помощью независимых сл. вел. $\{x_n\}$, при любом начальном τ_1 справедливы предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\tau_n, T) = 0 \quad (n. н.), \quad (8.4.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(\tau_n) = \inf_{\tau} W(\tau) \quad (n. н.). \quad (8.4.5)$$

В частности, если множество T состоит из единственной точки τ_* , то $\tau_n \xrightarrow{n. н.} \tau_*$.

Доказательство весьма просто. Выбирая в условии 3) $\tau' = \tau_n$ и $\tau' + \tau'' = \tau_{n+1}$, в силу алгоритма (8.4.3) получим

$$W(\tau_{n+1}) \leq W(\tau_n) - \gamma_n (\nabla W(\tau_n), \psi(x_n, \tau_n)) + C_1 \gamma_n^2 \|\psi(x_n, \tau_n)\|^2,$$

откуда в силу условий 4) и 6) при достаточно больших n) (таких, что $C_1 C_4 \gamma_n \leq 1$) следует

$$\begin{aligned} M(W(\tau_{n+1}) | (x_1, \dots, x_{n-1})) &\leq (1 + C_1 C_3 \gamma_n^2) W(\tau_n) - \\ &- \gamma_n (1 - C_1 C_4 \gamma_n) (\nabla W(\tau_n), M_x \psi(x, \tau_n)) + C_1 C_2 \gamma_n^2 \leq \\ &\leq (1 + C_1 C_3 \gamma_n^2) W(\tau_n) + C_1 C_2 \gamma_n^2. \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

Неравенство (8.4.6) показывает, что последовательность $W(\tau_n)$ несущественно отличается от супермартингала. Поэтому, учитывая условие 2) и поступая как в лемме 4.6.1, можно убедиться, что существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(\tau_n) = W_* \quad (\text{п. н.}) \quad (8.4.7)$$

Теперь усредняя и складывая (8.4.6), убеждаемся в справедливости неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n (\nabla W(\tau_n), M_x \psi(x, \tau_n)) < \infty,$$

что в силу условия 1) означает существование подпоследовательности n_k , для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\nabla W(\tau_{n_k}), M_x \psi(x, \tau_{n_k})) = 0 \quad (\text{п. н.}).$$

В силу условия 6) теперь заключаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\tau_{n_k}, T) = 0$, а это в силу условия 5) означает

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W(\tau_{n_k}) = W(\tau_*), \quad \tau_* \in T. \quad (8.4.8)$$

Сравнивая (8.4.7) и (8.4.8) и вновь учитывая 5), приходим к выводу, что справедливы соотношения (8.4.4), (8.4.5). Теорема доказана.

В ряде случаев градиентная стохастическая процедура, построенная для одного функционала, скажем $W_1(\tau)$, является псевдоградиентной для другого, например $W_2(\tau)$. Иногда это позволяет лучше понять смысл соответствующей процедуры. Поясним сказанное на примере.

В § 8.2 был рассмотрен квадратичный функционал (8.1.3), для которого градиентная стохастическая процедура имеет вид

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n [f(x_n) - (a(x_n), \tau_n)] a(x_n). \quad (8.4.9)$$

Рассмотрим теперь функционал

$$W_2(\tau) = \|\tau - \tau_*\|^2, \quad (8.4.10)$$

где τ_* — оптимальное значение функционала (8.1.3). Градиентная процедура для $W_2(\tau)$ имеет вид $\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n (\tau_n - \tau_*)$, но воспользоваться ею нельзя, поскольку вектор τ_* неизвестен. Оказывается, что для минимизации функционала $W_2(\tau)$ можно построить псевдоградиентную процедуру и эта процедура имеет как раз вид (8.4.9). Для этого достаточно убедиться в том,

что вектор-функция $\psi(x, \tau) = -[f(x) - (a(x), \tau)]a(x)$ является псевдоградиентом вектор-функции $\nabla W_2(\tau) = 2(\tau - \tau_*)$.

В обозначениях § 8.2 имеем $-\mathbf{M}_x(a(x), \tau - \tau_*) \cdot [f(x) - (a(x), \tau)] = -(\tau - \tau_*, \psi) - (A\tau, \tau - \tau_*) = -(\tau - \tau_*, A\tau_*) - (A\tau, \tau - \tau_*) = (A[\tau - \tau_*], \tau - \tau_*) \geq 0$, что и определяет свойство псевдоградиентности вектор-функции $\psi(x, \tau)$. Предполагая матрицу A невырожденной, функцию $f(x)$ и вектор-функцию $a(x)$ — ограниченными, легко убеждаемся в выполнении всех условий теоремы 8.4.1. Заключение (8.4.5) теоремы 8.4.1 означает теперь среднеквадратичную сходимость τ_n к τ_* . Итак, с помощью теоремы 8.4.1 вновь показана справедливость теоремы 8.2.1 для квадратичного функционала (в случае невырожденности матрицы A).

подавляющее большинство рекуррентных алгоритмов обучения опознающих систем могут трактоваться как псевдоградиентные процедуры для некоторых функционалов среднего риска.

Для этого, разумеется, в качестве чисел γ_n должно быть дозволено выбирать функции $\gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$, т. е. γ_n может быть сл. вел., независимой от x_n .

В конце § 8.3 упоминалось о возможности оценки снизу скорости сходимости процедур стохастической аппроксимации. Остановимся на этом вопросе подробнее для случая псевдоградиентных алгоритмов.

Будем предполагать, что в рекуррентной процедуре (8.4.3) τ_1 — сл. вел., для которой

$$V_1 \triangleq \mathbf{M} \|\tau_1 - \tau_*\|^2 < \infty. \quad (8.4.11)$$

Введем сл. вел.

$$\xi_n \triangleq \psi(x_n, \tau_n) - \mathbf{M}_x \psi(x_n, \tau_n), \quad (8.4.12)$$

для которой, очевидно, выполнено равенство

$$\mathbf{M}(\xi_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = 0. \quad (8.4.13)$$

Кроме того, предположим, что дисперсии сл. вел. ξ_n положительны:

$$\mathbf{M}(\|\xi_n\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) \geq \sigma_n^2 > 0 \quad (8.4.14)$$

$$\text{и } \|\mathbf{M}_x \psi(x, \tau)\| \leq L \|\tau - \tau_*\|. \quad (8.4.15)$$

Обозначим через V_n среднеквадратичное отклонение τ_n от τ_*

$$V_n \triangleq \mathbf{M} \|\tau_n - \tau_*\|^2 \quad (8.4.16)$$

и воспользуемся алгоритмом (8.4.3) для оценки скорости и изменения V_n . Учитывая (8.4.12), (8.4.13), (8.4.14) и (8.4.15), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\|\tau_{n+1} - \tau_*\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) &= \|\tau_n - \tau_* - \gamma_n \mathbf{M}_x \psi(x, \tau_n)\|^2 + \\ &+ \gamma_n^2 \mathbf{M}(\|\xi_n\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) \geq (\|\tau_n - \tau_*\| - \\ &- \gamma_n \|\mathbf{M}_x \psi(x, \tau_n)\|)^2 + \gamma_n^2 \sigma_n^2 \geq \gamma_n^2 \sigma_n^2 + \theta_n (1 - \gamma_n L)^2 \|\tau_n - \tau_*\|^2, \end{aligned}$$

$$\theta_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma_n L < 1, \\ 0, & \text{если } \gamma_n L > 1. \end{cases}$$

Усредняя обе части этого неравенства, получим

$$V_{n+1} \geq \theta_n (1 - \gamma_n L)^2 V_n + \gamma_n^2 M \sigma_n^2.$$

Минимизируя правую часть неравенства по γ_n (предполагая, что $1 - \gamma_n L \neq 0$) и учитывая, что $\gamma_n > L^{-1}$ при $\theta_n = 0$, получим

$$V_{n+1} \geq (L^2 V_n + M \sigma_n^2)^{-1} \theta_n V_n M \sigma_n^2 + L^{-2} M \sigma_n^2 (1 - \theta_n), \quad (8.4.17)$$

откуда при $\theta_n = 1$ следует

$$V_{n+1}^{-1} \leq (M \sigma_n^2)^{-1} L^2 + V_n^{-1}. \quad (8.4.18)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 8.4.2. При выполнении условий (8.4.11), (8.4.13), (8.4.14) для величин V_n , определяемых по формулам (8.4.16), (8.4.3) для независимых сл. вел. x_1, x_2, \dots , справедлива оценка

$$V_{n+1}^{-1} \leq \sum_{k=n_0+1}^n (M \sigma_k^2)^{-1} L^2 + V_{n_0+1}^{-1}, \quad (8.4.19)$$

где n_0 — наибольшее натуральное число, для которого $\gamma_n L \geq 1$.

Заметим, что из (8.4.17) сразу следует оценка $V_{n+1} \geq L^{-2} M \sigma_n^2$, так что из (8.4.19) следует неравенство

$$V_{n+1}^{-1} \leq L^2 \sum_{k=n_0+1}^n (M \sigma_k^2)^{-1} + L^2 (M \sigma_{n_0}^2)^{-1}.$$

Рассмотрим частный случай, когда $n_0 = 1$. Неравенство (8.4.19) принимает вид

$$n V_n \geq A_n, \quad (8.4.20)$$

где

$$A_n = \left(L^2 n^{-1} \sum_{k=2}^n (M \sigma_k^2)^{-1} + (n V_1)^{-1} \right)^{-1}. \quad (8.4.21)$$

Положительная величина A_n играет роль средней меры неопределенности, вносимой помехами. Соотношение (8.4.20) представляет собой своеобразный «принцип неопределенности» для стохастических алгоритмов. Этот принцип утверждает, что в сделанных предположениях сходимость стохастической процедуры не может быть слишком быстрой и количественно скорость сходимости определяется неравенством (8.4.20).

Посмотрим, что означают условия и утверждения теоремы 8.4.2 для частного случая — алгоритма (8.4.9), в котором предполагаются выполненными условия

$$\inf_x \|a(x)\|^2 = a^2 > 0, \quad (8.4.22)$$

$$W_* \Delta \inf_{\tau} \int_{R^q} |f(x) - (a(x), \tau)|^2 F(dx) > 0. \quad (8.4.23)$$

Заметим, что предположение (8.4.23) означает невыполнение «условия представимости», т. е. функция $f(x)$ не представима в виде линейной комбинации функций $a_i(x)$ — компонент векторной функции $a(x)$. С помощью простых вычислений приходим к соотношениям

$$M_x [f(x) - (a(x), \tau)] a(x) = A(\tau_* - \tau), \quad (8.4.24)$$

где τ_* — решение уравнения $A\tau = \psi$ (см. § 8.2),

$$M_x [f(x) - (a(x), \tau)]^2 \|a(x)\| \geq a^2 W_*. \quad (8.4.25)$$

Из равенства (8.4.24) следует выполнение неравенства (8.4.15), где $L = \|A\|$, а оценка (8.4.25) показывает, что в неравенствах (8.4.14) величины σ_n^2 могут быть выбраны в виде

$$\delta_n^2 = a^2 W_*. \quad (8.4.26)$$

Предполагая для простоты, что при всех n выполнено $\gamma_n \|A\| < 1$, можем воспользоваться неравенством (8.4.20), которое в данном случае принимает вид

$$n V_n \geq [(a^2 W_*)^{-1} \|A\|^2 + (n V_1)^{-1}]^{-1}. \quad (8.4.27)$$

Из (8.4.27) следует, что при достаточно больших n имеет место оценка $V_n \geq n^{-1} a^2 W_* \|A\|^2$. Отсюда можно сделать вывод, что при сделанных предположениях никаким выбором коэффициентов γ_n в алгоритме (8.4.9) нельзя получить погрешность меньшую, чем даваемую формулой (8.4.27).

С другой стороны, известно, что при выборе коэффициентов $\gamma_n = n^{-1} a_0$ в рассматриваемом случае можно гарантировать оценку $V_n = O(n^{-1})$. Это означает, что в рамках стохастической процедуры выбор простейших коэффициентов $\gamma_n = n^{-1} a_0$ дает точность аппроксимации, которая не более чем в конечное число раз отличается от предельно возможной. Отметим, что при выполнении «условия предстативности» $W_* = 0$ сходимость стохастической процедуры может быть улучшена (напомним, что в § 8.2 для этого случая была при постоянных γ_n доказана сходимость V_n к нулю со скоростью геометрической прогрессии).

Упражнения к гл. 8

1. Получить рекуррентные процедуры стохастической аппроксимации для функций качества $Q(x, \tau) = F(z)$, $z \triangleq f(x)$ ($a(x), \tau) = a$, следующего вида:

а) $F(z) = |z| - z$ (В. А. Якубович),

б) $F(z) = (|z| - z)^2$ (А. Новиков, С. Агмон, У. Мейс),

в) $F(z) = \begin{cases} z^2 & \text{при } |z| \geq \varepsilon, \\ 0 & \text{при } |z| < \varepsilon \end{cases}$ (В. А. Якубович),

г) $F(z) = \begin{cases} z^2 & \text{при } z \leq a, \\ 2az & \text{при } a < z < 0, \\ 0 & \text{при } z \geq a \end{cases}$ (Т. Моцкин, И. Шенберг),

д) $F(z) = \begin{cases} z^2 & \text{при } z < 0 \\ 0 & \text{при } z \geq 0 \end{cases}$ (Ю. Хо, Р. Кашиап).

2. В условиях теоремы 8.2.1 для квадратичного функционала (8.1.3) рассмотреть процедуру

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \gamma_n (\psi_n + \pi_n).$$

где π_n — «шумы», $M(\pi_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$,

$$M(\|\pi_n\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) \leq C(1 + \|\tau_n\|)^2 \left(\text{либо } \sum_{n=1}^{\infty} M\|\pi_n\|^2 < \infty \right).$$

Анализируя приведенное доказательство теоремы 8.2.1, показать, что по-прежнему

$$\tau_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \tau_*, \quad \tau_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_2} \tau_*.$$

3. Получить оценку (8.2.21) и соотношение (8.2.22).

Указание. Оценить матрицу $\Pi_0 \tau_{n+1} \tau_{n+1}^* \Pi_0$ и убедиться, что член при γ_n^2 обращается в нуль.

4. Показать, что требование расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ является необходимым условием сходимости для любых начальных данных τ_1 стохастической процедуры (8.1.5) к минимуму функционала $W(\tau)$.

5. Показать, что множество решений уравнения (8.2.10) совпадает с множеством векторов τ , минимизирующих функционал (8.1.3).

6. Доказать, что линейная система (8.2.10), где матрица A и вектор ψ определяются соответственно формулами (8.2.8), (8.2.9), всегда разрешима.

7. Доказать, что для алгоритма (8.2.11) — (8.2.12) при $\gamma_n = \|a(x_n)\|^2$ (алгоритм Качмажа) справедлива оценка

$$M \|\tau_n - \tau_*\|^2 < C\alpha^{-1} + (1-\alpha)^n (M \|\tau_1 - \tau_*\|^2 + C\alpha^{-1}), \quad (1)$$

где $C = \int_{R^q} [f(x) - (a(x), \tau_*)]^2 \|a(x)\|^2 F(dx)$ и α — наименьшее собственное значение матрицы

$$\tilde{A} = \int_{R^q} a(x) a^*(x) \|a(x)\|^2 F(dx).$$

8. Получить оценку, аналогичную (1), для алгоритма (8.2.11) — (8.2.12) при $\gamma_n = \theta(x_n, \tau_n) \|a(x_n)\|^2$:

$$\theta(x, \tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } |f(x) - (a(x), \tau)| \geq \epsilon, \\ 0, & \text{если } |f(x) - (a(x), \tau)| < \epsilon \end{cases}$$

(алгоритм „Полоска“, см. § 2.2).

9. Пусть τ_{n+1} — минимум эмпирического функционала

$$w_n(\tau) = n^{-1} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - (a(x_k), \tau)|^2.$$

Показать, что для τ_n справедлива рекуррентная процедура стохастической аппроксимации второго порядка

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \tau_n + \Gamma_n a(x_n) [f(x_n) - (a(x_n), \tau_n)], \\ \Gamma_{n+1} &= \Gamma_n - \Gamma_n a(x_n) [1 + (\Gamma_n a(x_n), a(x_n))]^{-1} a^*(x_n) \Gamma_n, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{где } \Gamma_n^{-1} = \sum_{k=1}^n a(x_k) a^*(x_k).$$

Исследовать сходимость процедуры (1) к минимуму функционала (8.1.3). Что можно сказать о скорости сходимости процедуры по сравнению со стохастической процедурой первого порядка (8.1.9)?

ГЛАВА 9. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ОБУЧАЕМЫХ СИСТЕМ

Методом потенциальных функций назван своеобразный подход к задачам обучения, развиваемый в последние 10—15 лет советскими учеными М. А. Айзерманом, Э. М. Браверманом, Л. И. Розоноэром и их последователями. Этот подход охватывает большой круг проблем, связанных с обучением и самообучением; в рамках метода рассматриваются детерминированные и стохастические постановки задач о построении обучаемых опознающих систем.

Основу метода потенциальных функций составляют специфические рекуррентные процедуры, приспособленные для решения достаточно широкого класса аппроксимационных задач.

Особенность процедур состоит в том, что при использовании их в конкретных случаях требуется каждый раз выбирать вид некоторой функции, содержащейся в процедурах (эта функция называется «потенциальной», что дало название самому методу). В своем большинстве алгоритмы метода потенциальных функций могут быть поняты как специальный класс процедур Роббинса — Монро, что позволяет изучить их более подробно, чем процедуры Роббинса—Монро общего вида.

Цель данной главы — первоначальное ознакомление с основными методами потенциальных функций. Будут рассмотрены лишь некоторые задачи теории обучения и методы их решения.

§ 9.1. ИДЕЯ МЕТОДА И ОБЩАЯ РЕКУРРЕНТНАЯ ПРОЦЕДУРА

Будем рассматривать изображения (объекты) как точки в конечномерном евклидовом пространстве R^q . Ограничиваясь для простоты двумя классами изображений, будем предполагать,

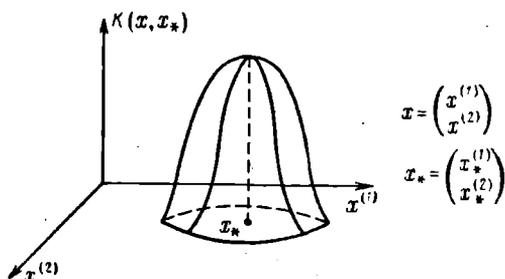


Рис. 9.1.1. Потенциал $K(x, x_*)$, создаваемый «зарядом» в точке x_*

что им отвечают непересекающиеся множества, т. е. существует дискриминантная функция, разделяющая в R^q классы изображений.

Введем положительную функцию $K(x, y)$, $x, y \in R^q$, убывающую при удалении точки x от точки $y = x_*$. Функция $K(x, y)$ играет при фиксированном $y = x_*$ роль потенциала заряда, расположенного в точке x_* (рис. 9.1.1). Типичные примеры *потенциальных функций*:

$$K(x, y) = \exp[-\alpha \|x - y\|], \quad \alpha > 0,$$

либо

$$K(x, y) = [1 + \alpha \|x - y\|]^{-1}, \quad \alpha > 0.$$

Каждый класс изображений характеризуется своим суммарным потенциалом, зная который негрудно построить дискриминантную функцию. В этой постановке обучение системы сводится к построению потенциалов классов изображений с помощью обучающей выборки.

Пример простейшей процедуры обучения: по обучающей выборке $\{x_n\}$ из объединения $X^{(1)} \cup X^{(2)}$ классов изображений определяются функции

$$K_{X^{(1)}}(x) = \sum_{\{x_n \in X^{(1)}\}} K(x, x_n); \quad K_{X^{(2)}} = \sum_{\{x_n \in X^{(2)}\}} K(x, x_n),$$

играющие роль потенциалов в точке x соответственно первого и второго классов изображений. По окончании процесса обучения дискриминантная функция определяется по правилу

$$f(x) = K_{X^{(1)}}(x) - K_{X^{(2)}}(x),$$

т. е. к первому (второму) классу изображений относятся все точки x , для которых $K_{X^{(1)}}(x) > K_{X^{(2)}}(x)$. Аналогичное рассуждение применимо и к большему числу непересекающихся классов.

В приведенной конструкции в процессе обучения использовалась информация о принадлежности элементов обучающей выборки к тому или иному классу изображений. По этой причине указанная процедура называется «обучением с учителем». Если нет информации о классификации элементов обучающей выборки, то можно построить функцию

$$\Phi(x) = \sum_{\{x_n \in X^{(1)} \cup X^{(2)}\}} K(x, x_n),$$

т. е. $\Phi(x)$ — потенциал в точке x , «создаваемый» всей обучающей выборкой. Иногда можно предполагать, что характер поверхности, определяемой функцией $\Phi(x)$, соответствует естественному разбиению R^q на классы изображений. Тогда, определяя линии равного уровня функции $\Phi(x)$, можно надеяться выделить области пространства R^q , относящиеся к «разным» классам. Такой подход к задаче обучения носит название «обучения без учителя», или *самообучения*.

Оправдание изложенных интуитивных представлений и составляет существо метода потенциальных функций.

Построение дискриминантной функции — задача аппроксимационная. Поэтому в разумной постановке задачи следует наложить существенные ограничения на разделяемые классы изображений; однако естественно стремиться к тому, чтобы эти ограничения были не слишком стеснительными.

Далее предполагается, что на множестве R^q существует (конечная или бесконечная) система функций $\{a_j(x)\}$ такая, что любая подлежащая восстановлению дискриминантная (разделяющая) функция могла быть представлена в виде разложения

$$f(x) = \sum_i \tilde{\tau}^{(i)} a_i(x) \Delta(\tilde{\tau}, a(x)), \quad (9.1.1)$$

где $\tilde{\tau}^{(i)}$ — числовые коэффициенты и сходимость понимается в каком-либо смысле. В случае бесконечной системы $\{a_j(x)\}$ на

коэффициенты $\tau^{(i)}$ накладываются некоторые условия убывания, характеризующие «гладкость» рассматриваемых дискриминантных функций, т. е. «регулярность» разделяющих классов объектов.

В методе потенциальных функций различают задачу о восстановлении функции $f(x)$ (т. е. об оценке ее коэффициентов в разложении (9.1.1)) и о приближении функции $f(x)$. (Последняя задача возникает в случае, когда разложения (9.1.1) может и не быть, а ставится задача о наилучшем приближении $f(x)$ с помощью линейных комбинаций функций $\{a_j(x)\}$. Приближение при этом понимается в каком-либо разумном смысле.)

В качестве потенциальной функции $K(x, y)$ рассматривается функция вида

$$K(x, y) = \sum_i \lambda_i^2 a_i(x) a_i(y), \quad (9.1.2)$$

где $\sum_i \lambda_i^2 < \infty$; $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots$; $K(x, x) < C$ (C не зависит от выбора $x \in R^q$).

Процедура метода потенциальных функций может быть описана следующим образом. Пусть $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, — тренировочная (обучающая) последовательность изображений. На n -м шаге обучения строится $(n+1)$ -е приближение $f_{n+1}(x)$ дискриминантной функции $f(x)$, подлежащей аппроксимации. Способ построения характеризуется рекуррентной процедурой

$$f_{n+1}(x) = q_n f_n(x) + r_n K(x_n, x), \quad (9.1.3)$$

где q_n и r_n — некоторые числовые последовательности. В качестве первого приближения можно принимать любую функцию

$$f_1(x) = \sum_i \tilde{\tau}_1^{(i)} a_i(x),$$

для которой сходится ряд $\sum_i (\lambda_i^{-1} \tilde{\tau}_1^{(i)})^2$ (в частности, может быть выбрана функция $f_1(x) \equiv 0$). Процедуре (9.1.3) может быть придана другая форма. Пусть

$$f_n(x) = \sum_i \tilde{\tau}_n^{(i)} a_i(x),$$

тогда

$$\tilde{\tau}_{n+1}^{(i)} = q_n \tilde{\tau}_n^{(i)} + r_n \psi^{(i)}(x_n), \quad (9.1.4)$$

где $\tilde{\tau}_n^{(i)} \triangleq \lambda_n^{-1}$; $\psi^{(i)}(x) \triangleq \lambda_i a_i(x)$.

Процедуры (9.1.3), (9.1.4) сходятся далеко не всегда. При проведении доказательств приходится накладывать дополнительные ограничения на характер последовательностей q_n и r_n и делать некоторые предположения об особенностях появления точек x_n при их показе.

О характере последовательностей q_n и r_n

За исключением одного алгоритма самообучения везде далее полагается $q_n \equiv 1$, а

$$r_n \equiv \gamma_n [r(f_n(x), f_*(x_n)) + \xi_n], \quad (9.1.5)$$

где $r(f_n, f_*)$ — некоторая функция двух переменных; γ_n — неотрицательная числовая последовательность, удовлетворяющая условию $\sum_n \gamma_n = \infty$ и какому-либо из условий

$$\gamma_n = \text{const}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0, \quad \sum_n \gamma_n^2 < \infty.$$

В (9.1.5) ξ_n — некоторая числовая последовательность, играющая роль „помехи“, возникающей при вычислении функции $r(f_n, f_*)$ за счет „ошибок измерения“ аппроксимируемой функции $f_*(x)$. В ряде случаев $\xi_n \equiv 0$.

Функция $r(f, f_*)$ — невозрастающая по f , причем $r(f_*, f_*) = 0$ так что

$$r(f, f_*) \begin{cases} \leq 0, & \text{если } f \geq f_*, \\ \geq 0, & \text{если } f \leq f_*. \end{cases} \quad (9.1.6)$$

В силу этого алгоритм метода потенциальных функций обладает следующей особенностью: если в показанной точке $f_n < f_*$, то $f_{n+1} > f_*$, т. е. аппроксимирующая функция изменится в сторону функции f_* . Аналогично обстоит дело и при $f_n > f_*$. Чтобы при таком процессе не возникало большого «перерегулирования», приводящего к «раскачке», приходится ограничивать рост функции $r(f, f_*)$ по f . Именно, предполагается, что для любых f_1 и f_2 выполнено $|r(f_1, f_*) - r(f_2, f_*)| \leq C(1 + |f_1 - f_2|)$, где C — некоторая постоянная, не зависящая от x .

При выполнении указанных условий алгоритм метода потенциальных функций на каждом шаге улучшает аппроксимацию в показанной на этом шаге точке.

Алгоритмы (9.1.3) и (9.1.4) принимают вид

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \gamma_n [r(f_n(x_n), f_*(x_n)) + \xi_n] K(x, x_n), \quad (9.1.7)$$

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \gamma_n [r(\psi(x_n), \tau_n), f_*(x_n)) + \xi_n] \psi(x_n). \quad (9.1.8)$$

§ 9.2. ФУНКЦИОНАЛЫ, ЭКСТРЕМИЗИРУЕМЫЕ ПРОЦЕДУРАМИ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть на множестве функций $f(x)$ задан функционал $W_{f_*}(f)$: $W_{f_*}(f) \geq 0$, $W_{f_*}(f_*) = 0$, где $f_* = f_*(x)$ — дискриминантная функция. Оказывается, существуют функционалы такого вида, что для них процедуры метода потенциальных функций являются в некотором смысле градиентными. Эти функционалы играют фундаментальную роль потому, что само определение сходимости процедуры метода потенциальных функций к восстановли-

ваемой функции использует этот функционал. Именно в процедурах метода потенциальных функций в качестве меры близости функций $f(x)$ и $f_*(x)$ принимается функционал $W_{f_*}(f)$.

Будем говорить, что процедура сходится к аппроксимируемой функции $f_*(x)$, если $W_{f_*}(f_n) \rightarrow 0$. Поскольку обычно f_n —

случайная величина, зависящая от статистики показа, то стремление $W_{f_*}(f)$ к нулю следует понимать в вероятностном смысле.

Обратимся к вопросу о виде $W_{f_*}(f)$. Для простоты изложения ограничимся конечномерным вариантом пространства коэффициентов

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}^{(i)} &= \tau_n^{(i)} + \gamma_n [r(f_n(x_n), f_*(x_n)) + \xi_n] \psi^{(i)}(x_n), \\ i &= 1, 2, \dots, N, f_n(x) = \sum_{i=1}^N \tau_n^{(i)} \psi^{(i)}(x). \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

Введем функцию

$$G(f(x), f_*(x)) = - \int_{f_*(x)}^{f(x)} r(s, f_*(x)) ds, \quad (9.2.2)$$

где $f(x)$ — некоторая функция x . Так как выполнено (9.1.6), то $G(f, f_*) \geq 0$. Принимая теперь в качестве $f(x)$ ряд

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \tau^{(i)} \psi^{(i)}(x),$$

получим функцию

$$Q(x, \tau) \triangleq G\left(\sum_{i=1}^N \tau^{(i)} \psi^{(i)}(x), f_*(x)\right). \quad (9.2.3)$$

С помощью функции $Q(x, \tau)$ процедура (9.2.1) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}^{(i)} &= \tau_n^{(i)} - \gamma_n \left[\frac{\partial Q(x_n, \tau_n)}{\partial \tau_n^{(i)}} - \xi_n \right] \psi^{(i)}(x_n), \\ i &= 1, \dots, N, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

Если бы величины x_n не изменялись с n , а $\xi_n \equiv 0$, то процедура (9.2.4) определяла бы процедуру градиентного спуска с переменным шагом γ_n . Поэтому введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned} W(\tau) &= M_x Q(x, \tau) = \\ &= M_x G\left(\sum_{i=1}^N \tau^{(i)} \psi^{(i)}(x), f_*(x)\right). \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

Если считать, что $M \xi_n \equiv 0$, то можно показать, что процедура (9.2.4) минимизирует функционал (9.2.5), т. е. $W(\tau_n) \rightarrow \min W(\tau)$ при $n \rightarrow \infty$, где предел понимается в некотором вероятностном смысле. Из (9.2.4) следует, что при $\xi_n \equiv 0$ процедура (9.2.4) является процедурой метода стохастической аппроксимации для системы *уравнений регрессии* $M_{x \nabla_\tau} Q(x, \tau) = 0$, или

$$M_x \left[r\left(\sum_{i=1}^N \tau^{(i)} \psi^{(i)}(x), f_*(x)\right) \psi^{(i)}(x) \right] = 0. \quad (9.2.6)$$

Искомые параметры $\tau^{(i)}$ входят в уравнение регрессии (9.2.6) весьма специальным образом; тем самым процедура (9.2.4) выделяет специфический подкласс процедур Роббинса — Монро. Благодаря этим свойствам процедуры метода потенциальных функций обладают рядом специальных свойств и могут быть изучены более подробно, нежели процедуры Роббинса — Монро общего вида.

З а м е ч а н и е. При использовании метода потенциальных функций следует из каких-то общих соображений выбирать систему функций $\{a_i(x)\}$, либо функционал $W_{f_*}(f)$. В последнем случае следует учитывать, что произвольный функционал может оказаться непригодным. Дело в том, что процедура построения $f_n(x)$ должна содержать лишь те величины, которые могут быть фактически измерены, т. е. величины, которые следует считать известными на соответствующем шаге процедуры.

§ 9.3. ОБУЧЕНИЕ РАСПОЗНАВАНИЮ ИЗОБРАЖЕНИЙ (ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ)

Предполагается, как и прежде, что в пространстве признаков R^q задана система функций $\{a_i(x)\}$ и что дискриминантная функция $f_*(x)$ представлена в виде

$$f_*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\tau}_*^{(i)} a_i(x), \quad (9.3.1)$$

где последовательность $\{\tau_*^{(i)}\}$ удовлетворяет условию: существует последовательность положительных λ_i таких, что конечны суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i^{-1} \tilde{\tau}_*^{(i)})^2. \quad (9.3.2)$$

Условия (9.3.2) характеризуют собой «гладкость» рассматриваемых дискриминантных функций и являются основной гипотезой метода потенциальных функций.

Если ввести пространство Z с координатами $z^{(i)} = \lambda_i a_i(x)$, то получим так называемое *спрямляющее пространство*. В пространстве Z точки z непересекающихся классов, отвечающих множествам $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, разделяются плоскостью

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau_*^{(i)} z^{(i)} \Delta(\tau_*, z) = 0, \quad \tau_*^{(i)} = \lambda_i^{-1} \tilde{\tau}_*^{(i)}.$$

Сам алгоритм имеет вид $f_1(x) \equiv 0$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + r_n K(x, x_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.3.3)$$

где $K(x, y)$ — потенциальная функция. Числовая последовательность r_n имеет вид $r_n = r_n(x_n)$, где

$$r_n(x) = 2^{-1} [\text{sign } f_*(x) - \text{sign } f_n(x)] \quad (9.3.4)$$

$$\text{и } f_*(x) \begin{cases} > 0, & x \in X^{(1)}, \\ < 0, & x \in X^{(2)}. \end{cases}$$

Если вспомнить (9.3.1), то $f_*(x)(\tau_*, \psi(x)) > 0$ при $x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}$.

Геометрическая интерпретация алгоритма

Алгоритм (9.3.3) может быть переписан в виде

$$\tau_{n+1}^{(i)} = \tau_n^{(i)} + r_n \psi^{(i)}(x_n), \quad (9.3.5)$$

или в векторной форме $\tau_{n+1} = \tau_n + r_n z_n$, где $z_n = \psi(x_n)$. Поскольку $r_n = 0$, если $f_*(x_n) f_n(x_n) > 0$, то $\tau_{n+1} \neq \tau_n$ лишь если $f_*(x_n) f_n(x_n) < 0$, и при этом точка τ_n перемещается в направлении, определяемом вектором z_n на расстояние $\|z_n\|$, т. е. (9.3.4) — алгоритм обучения с поощрением (см. § 1.2).

Функционал, минимизируемый процедурой (9.3.2), имеет вид (9.2.5), где

$$G(f(x), f_*(x)) = - \int_{f_*(x)}^{f(x)} [\text{sign } f_*(x) - \text{sign } s] ds = -f(x) [\text{sign } f_*(x) - \text{sign } f(x)]. \quad (9.3.6)$$

Следовательно, процедура (9.3.5) является стохастически градиентной по отношению к функционалу

$$W_{f_*}(f) = M_x [f(x) [\text{sign } f(x) - \text{sign } f_*(x)]]. \quad (9.3.7)$$

Функция (9.3.6) неотрицательна, но может обращаться в нуль не только тогда, когда $f(x)$ является одной из разделяющих функций (например, $f(x) \equiv 0$). Поэтому в данном случае экстремизация функционала может привести к «ложному» решению — к функции $f(x) \equiv 0$.

§ 9.4. О СХОДИМОСТИ ПРОЦЕДУР МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Ниже предполагается, что выполнена основная гипотеза (9.3.1) — (9.3.2) о потенциальной функции

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 a_i(x) a_i(y). \quad (9.4.1)$$

Теорема 9.4.1. Пусть множества $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ в пространстве R^q и система функций $\{a_j(x)\}$, $j = 1, 2, \dots$, таковы, что:

1. Выполнены условия (9.3.1) — (9.3.2) и $f_*(x)$ удовлетворяет условию

$$f_*(x) \begin{cases} \leq -\varepsilon, & \text{если } x \in X^{(1)}, \\ \geq \varepsilon, & \text{если } x \in X^{(2)}. \end{cases} \quad (9.4.2)$$

2. Появление точек обучающейся последовательности — независимые события, определяемые плотностью вероятности $p(x)$.

Тогда в силу алгоритма (9.3.3)

$$M_x(|\text{sign } f_*(x) - \text{sign } f_n(x)|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} 0. \quad (9.4.3)$$

Замечание. Если для произвольной $f(x)$ ввести величину

$$p_n = \int_{\{f_*(x) f_n(x) \leq 0\}} p(x) dx,$$

называемую вероятностью ошибки распознавания, то соотношение (9.4.3) означает, что

$$p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} 0.$$

Доказательство. Если существует хотя бы одна разделяющая функция, удовлетворяющая условию (9.4.2), то существует бесконечно много таких функций. Пусть $f_*(x)$ та из них, для которой

$$\begin{aligned} \inf_{x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}} |f_*(x)| &= \sup_{x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}} K(x, x) = \\ &= \sup_{x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 a_i^2(x) \right|. \end{aligned} \quad (9.4.4)$$

Введем обозначения

$$\Delta \tau_n^{(i)} = \tau_n^{(i)} - \tau_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

В силу выбора (9.3.4) последовательности r_n

$$r_n(x) [f_*(x) - f_n(x)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta \tau_n^{(i)} \psi^{(i)}(x), & \text{если } f_* f \leq 0, \\ 0, & \text{если } f_* f > 0, \end{cases}$$

$$\psi^{(i)}(x) \triangleq \lambda_i a_i(x).$$

С другой стороны, в силу (9.4.4), если только $r_n(x) \neq 0$, то

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \Delta \tau_n^{(i)} \psi^{(i)}(x) \right| = |f_*(x) - f_n(x)| \geq \sup_{x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}} K(x, x).$$

Таким образом, всегда

$$r_n(x) \sum_{i=1}^{\infty} \Delta \tau_n^{(i)} \psi_i(x) \geq |r_n(x)| \sup_{x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}} K(x, x). \quad (9.4.5)$$

Введем обозначения $\|\Delta \tau_n\|^2 \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} |\Delta \tau_n^{(i)}|^2$. Имеем

$$\|\Delta \tau_{n+1}\|^2 \leq \|\Delta \tau_n\|^2 - 2r_n \sup_{x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}} K(x, x) + |r_n| \sup_{x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}} K(x, x).$$

Здесь учтено, что $|r_n(x)| = 0$, либо 1, т. е. $|r_n| = |r_n|^2$. Итак, $\|\Delta \tau_{n+1}\|^2 \leq \|\Delta \tau_n\|^2 - a |r_n(x_n)|$,

$$a = \sup_{x \in X^{(1)} \cup X^{(2)}} K(x, x).$$

Отсюда $M(\|\Delta \tau_{n+1}\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) \leq \|\Delta \tau_n\|^2 - a M_x |r_n(x)|$ и, следовательно, $a M(M_x |r_n(x)|) \leq M \|\Delta \tau_n\|^2 - M \|\Delta \tau_{n+1}\|^2$, откуда следует сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} M(M_x |r_n(x)|)$, что в свою оче-

редь означает справедливость предельного соотношения $M_x |r_n(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p, n} 0$, что и требовалось доказать.

Нетрудно заметить, что процедура (9.3.5) является процедурой, которая ранее в § 1.2 определялась как процедура с поощрением. Для нее нетрудно вывести из общей теоремы 2.1.1 утверждение о конечной сходимости почти каждой реализации и получить равномерную оценку сверху для числа изменений вектора τ_n .

Поэтому описанный выше алгоритм может быть дополнен правилами останова (см. гл. 5).

Только что приведенный алгоритм метода потенциальных функций в терминах спрямляющего пространства совпадает с одним из алгоритмов обучения, предложенных Ф. Розенблаттом.

§ 9.5. ВЕРОЯТНОСТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБУЧЕНИЯ

Пусть, как и раньше, в пространство элементарных событий Ω выделены непересекающиеся события Ω_{1*} , Ω_{2*} : $\Omega = \Omega_{1*} \cup \Omega_{2*}$, которые мы условно будем называть первым и вторым классами.

Случай большего числа непересекающихся множеств ничего существенно нового не вносит, и его здесь рассматривать не будем. Пусть на Ω определен случайный вектор $x(\omega)$, значения которого будем интерпретировать как изображения в спрямляющем пространстве R^q . Пусть x — произвольная фиксированная точка R^q . Предполагая, что $P\{x(\omega) = x\} \neq 0$, введем в рассмотрение функцию

$$d(x) = [P\{x(\omega) = x\}]^{-1} P(\{x(\omega) = x\} \cap \Omega_{1*}),$$

которую можно интерпретировать как вероятность того, что точка x принадлежит первому классу изображений. Функция $d(x)$ называется *степенью достоверности принадлежности изображения x первому классу*, $([1-d(x)])$ — *степенью достоверности принадлежности x второму классу*. Если $P\{x(\omega) = x\} = 0$, то определим $d(x)$ по формуле

$$d(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [P\{x(\omega) \in D_\epsilon(x)\}]^{-1} P(\{x(\omega) \in D_\epsilon(x)\} \cap \Omega_{1*}),$$

где $D_\epsilon(x)$ — шар радиусом ϵ с центром в точке x .*)

Задача состоит в том, чтобы по появляющимся в процессе обучения изображениям и по информации об их принадлежности тому или иному классу восстановить или аппроксимировать функции $d(x)$, $1-d(x)$, заданные на всем пространстве R^q .

Детерминистская постановка о разделении классов изображений, рассмотренная в § 9.3, является частным случаем только

*) Предполагается, что написанный предел существует для любого $x \in R^q$.

что сформулированной вероятностной задачи об обучении. Действительно, при построении детерминистской теории предполагалось, что множества $x(\Omega_{1*})$ и $x(\Omega_{2*})$ не пересекаются, так что функция $d(x)$ в каждой точке равна либо нулю, либо единице. В связи с этим достаточной была грубая (по «знаку») аппроксимация этой функции, что достигалось построением дискриминантной функции, разделяющей классы изображений в спрямляющем пространстве. В общей постановке множества $x(\Omega_{1*})$ и $x(\Omega_{2*})$ могут пересекаться, и функция $d(x)$ должна быть построена по возможности точно.

Существуют два пути решения задачи о восстановлении степени достоверности $d(x)$. Первый состоит в непосредственном восстановлении $d(x)$, второй связан с использованием формулы Байеса и по существу обсуждался в § 6.1. На этом пути по предъявленным в процессе обучения изображениям первоначально восстанавливаются не функции $d(x)$ и $1-d(x)$, а плотности распределения точек внутри первого и второго классов, т. е. функции $p(x|\Omega_{1*})$ и $p(x|\Omega_{2*})$. Одновременно оцениваются априорные вероятности $P(\Omega_{1*})$ и $P(\Omega_{2*})$ появления изображений первого и второго классов.

По окончании процесса обучения при появлении нового изображения x степени достоверности $d(x)$ и $1-d(x)$, представляющие собой условные вероятности принадлежности классам Ω_{1*} и Ω_{2*} , подсчитываются по формулам Байеса

$$d(x) = p^{-1}(x) P(\Omega_{1*}) p(x|\Omega_{1*}), \quad (9.5.1)$$

$$1 - d(x) = p^{-1}(x) P(\Omega_{2*}) p(x|\Omega_{2*}),$$

где $p(x) = P(\Omega_{1*}) p(x|\Omega_{1*}) + P(\Omega_{2*}) p(x|\Omega_{2*})$

— плотность вероятности появления изображения x . Поскольку вероятности $P(\Omega_{1*})$ и $P(\Omega_{2*})$ легко оцениваются, то задача определения $d(x)$ фактически сводится к восстановлению плотностей вероятностей $p(x|\Omega_{1*})$ и $p(x|\Omega_{2*})$. При таком способе восстановления степеней достоверности необходимо сделать некоторые предположения о классе функций, к которому принадлежат восстанавливаемые плотности вероятности $p(x|\Omega_{1*})$ и $p(x|\Omega_{2*})$. Так, в параметрических методах предполагается, что эти плотности имеют известный вид (например, являются гауссовскими), и задача их восстановления сводится к статистической оценке неизвестных заранее параметров распределения.

Задача о восстановлении условных плотностей вероятности $p(x|\Omega_{1*})$ и $p(x|\Omega_{2*})$ является частным случаем общей задачи восстановления некоторой плотности вероятности $p(x)$ появления точек в некотором пространстве R^q .

Могут быть предложены рекуррентные алгоритмы восстановления $p(x)$ типа тех, что используются в методе стохастической аппроксимации. Некоторые из них будут рассмотрены в § 9.6.

Любой метод восстановления плотности вероятности связан

с введением предположений, обычных для экстраполяционных методов. Эти требования связаны с требованием «достаточной гладкости», не «чрезмерной вычурности» восстанавливаемой функции. Поэтому в тех случаях, когда можно предполагать, что функции $p(x)$, $p(x|\Omega_{1*})$, $p(x|\Omega_{2*})$ являются «достаточно гладкими» и, следовательно, использование формулы Байеса оправдано, различные методы восстановления отличаются тем, как формализуется интуитивное представление о «достаточной гладкости» и как такое предположение используется для построения алгоритма.

В ряде случаев плотности вероятностей $p(x|\Omega_{1*})$ и $p(x|\Omega_{2*})$ таковы, что их восстановление требует недопустимо большого числа показов, в то время как непосредственное восстановление $d(x)$ может быть произведено по небольшому числу показов. Это имеет место, например, когда $p(x|\Omega_{1*})$ и $p(x|\Omega_{2*})$ разрывны, а $d(x)$ непрерывна и достаточно гладкая. Поэтому способы непосредственного восстановления степени достоверности, не связанные с промежуточными восстановлениями $p(x|\Omega_{1*})$ и $p(x|\Omega_{2*})$ и с использованием формулы Байеса, вообще говоря, являются более предпочтительными.

§ 9.6. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Широко известны методы восстановления распределения вероятности (а значит, и плотности), основанные на построении гистограмм. Эти методы пригодны при весьма широких предположениях о восстанавливаемых функциях, но именно поэтому они требуют знания большего числа точек, которое быстро растет с увеличением размерности q пространства R^q . В задачах обучения приходится иметь дело с пространством высокой размерности, и методы построения гистограмм оказываются практически непригодными.

Рассмотрим иной метод восстановления плотности вероятности.

Пусть в пространстве R^q существует плотность вероятности $p(x)$, в соответствии с которой появляются точки x_1, x_2, \dots . Задача состоит в аппроксимации $p(x)$ по этой последовательности точек. Пусть имеется конечная система ортонормированных функций $a_i(x)$, $i = 1, \dots, N$,

$$\int_{R^q} a_i(x) a_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \quad (9.6.1)$$

$$\delta_{ii} = 1.$$

Потенциальная функция $K(x, y)$ выбирается в виде

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N a_i(x) a_i(y), \quad MK(x, x) < \infty. \quad (9.6.2)$$

Предполагается также, что

$$p(x) \equiv \sum_{i=1}^N \tau_*^{(i)} a_i(x) \quad (9.6.3)$$

и $\int_{R^q} p^2(x) dx$ существует и конечен. Последовательность $p_n(x)$ приближений к неизвестной плотности $p(x)$ строится по правилам

$$p_{n+1}(x) = (1 - \gamma_n) p_n(x) + \gamma_n K(x, x_n), \quad (9.6.4)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Предполагается, что в качестве последовательности γ_n , участвующей в процедуре, может быть выбрана любая последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условиям:

$$1) \quad \sum_n \gamma_n = \infty, \quad \sum_n \gamma_n^2 < \infty \quad (9.6.5)$$

либо

$$2) \quad \sum_n \gamma_n = \infty, \quad \gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (9.6.6)$$

Процедура (9.6.4) допускает также схемную реализацию. Эта реализация имеет вид

$$\tau_{n+1}^{(i)} = (1 - \gamma_n) \tau_n^{(i)} + \gamma_n a_i(x_n), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^N \tau_n^{(i)} a_i(x). \quad (9.6.7)$$

Процедура (9.6.7), как это обычно имеет место для процедур метода потенциальных функций, является градиентной по отношению к некоторому функционалу. Нетрудно убедиться, что этот функционал имеет вид

$$W(\tau) = M_x \left[p(x) - \sum_{i=1}^N \tau^{(i)} a_i(x) \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\tau^{(i)}]^2 -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{R^q} p^2(x) dx. \quad (9.6.8)$$

Принимая во внимание, что в силу ортонормированности системы функций $a_i(x)$ справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^N [\tau^{(i)}]^2 = \int_{R^q} \left[\sum_{i=1}^N \tau^{(i)} a_i(x) \right]^2 dx$$

и

$$M_x \left[p(x) - \sum_{i=1}^N \tau^{(i)} a_i(x) \right]^2 = \int_{R^q} \left[p(x) - \sum_{i=1}^N \tau^{(i)} a_i(x) \right]^2 p(x) dx,$$

получаем для функционала $W(\tau)$ выражение

$$W(\tau) = \frac{1}{2} \int_{R^q} \left| \sum_{i=1}^N \tau^{(i)} a_i(x) - p(x) \right|^2 dx. \quad (9.6.9)$$

Сходимость процедуры (9.6.4), (9.6.7) к минимуму функционала (9.6.9) устанавливает следующая теорема.

Теорема 9.6.1. Пусть существует интеграл $\int_{R^q} p^2(x) dx$. Тогда в силу процедуры (9.6.4), (9.6.7) при $n \rightarrow \infty$

$$W(\tau_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \min_{\tau} W(\tau),$$

если выполнено условие (9.6.5).

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, заметим, что если представлять $p(x)$ в виде

$$p(x) = \sum_{i=1}^N \tau_*^{(i)} a_i(x), \quad (9.6.10)$$

$$\tau_*^{(i)} = \int_{R^q} a_i(x) p(x) dx = M_x a_i(x), \quad (9.6.11)$$

то функционал (9.6.8) можно записать следующим образом:

$$W(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\tau^{(i)} - \tau_*^{(i)})^2. \quad (9.6.12)$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\sum_{i=1}^N (\tau_n^{(i)} - \tau_*^{(i)})^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

п. н. или по вероятности. Положим

$$\|\Delta\tau_n\|^2 \triangleq \sum_{i=1}^N (\tau_n^{(i)} - \tau_*^{(i)})^2$$

и установим, как обычно, связь между $\|\Delta\tau_{n+1}\|^2$ и $\|\Delta\tau_n\|^2$:

$$\begin{aligned} \|\Delta\tau_{n+1}\|^2 &= \sum_{i=1}^N (\tau_n^{(i)} - \tau_*^{(i)} + \gamma_n [a_i(x_n) - \tau_n^{(i)}])^2 = \\ &= \|\Delta\tau_n\|^2 - 2\gamma_n \sum_{i=1}^N (\tau_n^{(i)} - a_i(x_n)) (\tau_n^{(i)} - \tau_*^{(i)}) + \\ &\quad + \gamma_n^2 \sum_{i=1}^N (\tau_n^{(i)} - a_i(x_n))^2. \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} M(\|\Delta\tau_{n+1}\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) &= (1 - 2\gamma_n + \gamma_n^2) \|\Delta\tau_n\|^2 + \\ &\quad + \gamma_n^2 \sum_{i=1}^N M_x (a_i(x) - \tau_*^{(i)})^2. \end{aligned} \quad (9.6.13)$$

Сумма в равенстве (9.6.13) не зависит от n и может быть оценена сверху некоторой постоянной C , так как

$$\sum_{i=1}^N M_x a_i^2(x) \equiv MK(x, x) < \infty$$

в силу принятого ограничения на $K(x, x)$. Имея в виду, что $\gamma_n \rightarrow 0$ и что $\gamma_n < 1$ при больших n , из (9.6.13) получаем

$$M(\|\Delta\tau_{n+1}\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) \leq \|\Delta\tau_n\|^2 + C\gamma_n^2. \quad (9.6.14)$$

В силу следствия к теореме 4.6.1 получаем $\|\Delta\tau_n\|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} r$, где r — некоторая случайная величина. Из (9.6.13) также следует, что

$$2\gamma_n M \|\Delta\tau_n\|^2 \leq -M \|\Delta\tau_{n+1}\|^2 + M \|\Delta\tau_n\|^2 + C\gamma_n^2 + \gamma_n^2 M \|\Delta\tau_n\|^2,$$

откуда в силу (9.6.14) убеждаемся в сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \mathbf{M} \|\Delta \tau_n\|^2$. Теперь, как и при доказательстве теоремы о стохастической аппроксимации (с помощью леммы 8.2.1), получаем, что $\mathbf{M} \|\Delta \tau_n\|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. и.}} 0$, т. е. $r = 0$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Замечание. Условие ортонормированности функций $\{a_i(x)\}$ и разложимости по ним плотности $p(x)$ довольно ограничительны.

Из формул (9.6.11), в частности, следует другой способ оценки величины $\tau_n^{(i)}$. Действительно, построим с помощью выборки x_1, \dots, x_n величины

$$\tau_n^{(i)} = n^{-1} \sum_{i=1}^n a_i(x_n). \quad (9.6.15)$$

По теореме Бернулли $\tau_n^{(i)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{P}} \tau_*^{(i)}$, что позволяет получить формулу (9.6.10) с помощью оценок (9.6.15)

§ 9.7. НЕПОСРЕДСТВЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СТЕПЕНИ ДОСТОВЕРНОСТИ

Рассмотрим теперь алгоритмы, решающие задачу непосредственной аппроксимации степени достоверности без предварительного вычисления априорных вероятностей $p(x | \Omega_{1*})$, $p(x | \Omega_{2*})$ и последующего применения формулы Байеса. В этих алгоритмах используется потенциальная функция общего вида

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 a_i(x) a_i(y) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) \psi_i(y),$$

причем ортонормированность или даже линейная независимость функций $a_i(x)$ не предполагается.

Пусть $d(x)$ определяется формулой (9.5.1). Задача аппроксимации степени достоверности может быть понята как задача аппроксимации м. о. случайной функции по значениям в случайно выбранных точках. Действительно, приписывая каждой появившейся точке значение 1, если $\omega \in \Omega_{1*}$, или 0, если $\omega \in \Omega_{2*}$, можно ввести в рассмотрение случайную функцию, принимающую в точке x значение 1 с вероятностью $d(x)$ и 0 с вероятностью $1-d(x)$. Поэтому м. о. этой функции равно $d(x)$, а именно последняя функция и подлежит аппроксимации. В связи с этим сообщаемая системе информация о том, какому множеству принадлежит элементарное событие ω , может быть понята как информация о значении некоторой функции $d(x(\omega))$, сообщаемая с помехой $\xi(\omega)$, м. о. которой равно нулю. Таким образом, на каждом шаге известна величина

$$\begin{aligned} y_n &= d(x_n) + \xi_n, \\ x_n &= x(\omega_n), \quad \xi_n = \xi(\omega_n), \end{aligned} \quad (9.7.1)$$

а аппроксимируется функция $d(x)$, являющаяся условным м. о. сл. вел. y_n при условии $x_n = x$:

$$d(x) = \mathbf{M}(y_n | x_n = x). \quad (9.7.2)$$

Отсюда следует, что $M\xi_n = 0$. Действительно,

$$M\xi_n = M(y_n - d(x_n)) = M_x[M(y_n - d(x_n) | x_n = x)] = \\ = M_x[d(x) - d(x)] = 0.$$

Кроме того, если тренировочное множество x_1, \dots, x_n состоит из независимых сл. вел., то

$$M(\xi_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = M\xi_n = 0, \quad (9.7.3)$$

поскольку ξ_n стохастически независима с x_1, \dots, x_{n-1} . Пусть $\{a_i(x)\}_{i=1}^N$ — система линейно-независимых функций такая, что

$$d(x) = \sum_{i=1}^N \tau_*^{(i)} a_i(x) \triangleq (\tau_*, a(x)). \quad (9.7.4)$$

Рассмотрим рекуррентный алгоритм аппроксимации коэффициентов разложения (9.7.4)

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \gamma_n [y_n - (\tau_n, a(x_n))] a(x_n), \quad (9.7.5)$$

где $\tau_* = (\tau_*^{(1)}, \dots, \tau_*^{(N)})$, $a^*(x) = (a_1(x), \dots, a_N(x))$, $n = 1, 2, \dots$, τ_1 — произвольный вектор.

Теорема 9.7.1. Пусть последовательность неотрицательных величин γ_n удовлетворяет условиям (9.6.5),

$$\det M_x a(x) a^*(x) \neq 0 \text{ и } M \|a(x)\|^4 < \infty.$$

Тогда векторы τ_n , определяемые рекуррентными соотношениями (9.7.5), обладают свойствами $\tau_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n. н., l_1} \tau_*$.

Доказательство. Как обычно в методе стохастической аппроксимации, перепишем соотношение (9.7.5) в виде

$$\|\tau_{n+1} - \tau_*\|^2 \triangleq \|\Delta\tau_{n+1}\|^2 = \|\Delta\tau_n\|^2 + \gamma_n^2 \|a(x_n)\|^2 [y_n - (a(x_n), \tau_n)]^2 + \\ + 2\gamma_n (a(x_n), \tau_n - \tau_*) [y_n - (a(x_n), \tau_n)].$$

Возьмем условное м. о. при условии x_1, \dots, x_{n-1} от обеих частей полученного равенства. Учитывая независимость случайных векторов x_1, \dots, x_{n-1} и x_n , получим

$$M(\|\Delta\tau_{n+1}\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) = \|\Delta\tau_n\|^2 - 2\gamma_n M[(a(x_n), \tau_n - \tau_*)^2 | x_1, \dots, x_{n-1}] + \\ + 2\gamma_n M[(a(x_n), \tau_n - \tau_*) \xi_n | x_1, \dots, x_{n-1}] + \\ + \gamma_n^2 M[(y_n - (a(x_n), \tau_n))^2 \|a(x_n)\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1}].$$

Но $M[(a(x_n), \tau_n - \tau_*) \xi_n | x_1, \dots, x_{n-1}] = (M[\xi_n a(x_n) | x_1, \dots, x_{n-1}], \tau_n - \tau_*) = (M\xi_n a(x_n), \tau_n - \tau_*) = 0$, поскольку $M\xi_n a(x_n) = M_x[M(\xi_n a(x_n) | x_n = x)] = M_x[a(x) M(\xi_n | x_n = x)] = 0$ в силу $M(\xi_n | x_n = x) = 0$. Используя оценку $|\xi_n| \leq 1$, получаем окончательно

$$M(\|\Delta\tau_{n+1}\|^2 | x_1, \dots, x_{n-1}) \leq \|\Delta\tau_n\|^2 - 2\gamma_n (A[\tau_n - \tau_*], \tau_n - \tau_*) + \\ + 2\gamma_n^2 (M_x \|a(x)\|^2 + \|\Delta\tau_n\|^2 M_x \|a(x)\|^4),$$

где $A = M_x a(x) a^*(x)$ — ковариационная матрица векторов

$a(x)$. Если $\det A \neq 0$ и $M_x \|a(x)\|^4 < \infty$, то, как и при доказательстве теоремы 8.2.1, получим требуемое

$$\|\tau_{n+1} - \tau_*\|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\frac{p}{n} \frac{\kappa}{\alpha}} 0 \quad \text{и} \quad M \|\tau_{n+1} - \tau_*\|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Если $\det A = 0$, то, как и в замечании к теореме 8.2.1, удается лишь показать, что $\Pi_1 \tau_n \rightarrow \tau_*$, где Π_1 — проектор на область значений матрицы A .

З а м е ч а н и е. Приведенные доказательства сходимости процедур метода потенциальных функций указывают на тесную связь этого метода с методом стохастической аппроксимации. В рамках этих методов имеется большое количество других теорем о сходимости стохастических процедур. В частности, если в условии теоремы 9.7.1 вместо условий (9.6.5) предполагать выполненным условие (9.6.6), то можно показать, что

$$W(\tau_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \min_{\tau} W(\tau).$$

Упражнения к гл. 9

1. Дискриминантная функция $f_*(x)$ может быть определена в терминах потенциальной функции $K(x, y)$ следующим образом (см. § 9.1):

$$f_*(x) = \sum_{x_n \in X^{(1)}} K(x, x_n) - \sum_{x_n \in X^{(2)}} K(x, x_n). \quad (*)$$

Выяснить, какова связь между представлением (*) и разложением (9.3.1) функции $f_*(x)$. Выразить основное условие (9.3.2) гладкости дискриминантных функций в терминах собственных функций $a_i(x)$ потенциальной функции $K(x, y)$.

2. Убедиться, что процедура (9.3.5) является частным случаем КСА, рассмотренных в § 2.1.

3. Показать, что процедура (9.6.7) является градиентной по отношению к функционалу (9.6.8).

4. Сформулировать алгоритм и доказать, следуя доказательству теоремы 9.7.1, его сходимость, когда на каждом шаге происходит «розыгрыш монеты» (на каждом шаге сообщается, к какому классу принадлежит предъявляемое при обучении изображение. Кроме того, на каждом шаге алгоритма обучения имеется $d_n(x)$ — оценка степени достоверности, выстраиваемая системой. Поэтому можно включить случайный акт: бросание монеты, с помощью которой с вероятностью $d_n(x)$ точка x относится к первому классу и с вероятностью $1 - d_n(x)$ — ко второму классу изображений. С учетом этой информации и производится коррекция вектора τ_n).

Самообучением, или *обучением «без учителя»*, называют задачу построения разделяющей поверхности с помощью тренировочного множества, относительно элементов которого не известна принадлежность к тому или иному классу изображений. Разумеется, так поставленная задача является неопределенной, если к сказанному не добавлять ничего нового. Однако всякая опознающая система может классифицировать изображения по их «схожести», разделяя таким образом все множества предъявленных изображений на классы «похожих» между собой. Весь вопрос состоит в том, насколько естественно понятие «схожести» изображений, свойственное данной системе, и как формализовать это интуитивное понятие.

В данном разделе рассматривается один из подходов к задаче о самообучении, основанный на введении некоторого функционала, зависящего от разделяющей функции. Самообучение в такой постановке сводится к минимизации с помощью специальных рекуррентных процедур этого функционала. Выбор функционала часто зависит от интуитивных представлений создателя опознающей системы о том, что значит правильно классифицировать предъявляемые системе изображения.

Обсуждаемая ниже постановка задачи возникла в рамках общего подхода, разрабатываемого Я. З. Цыпкиным и его сотрудниками. Предложенные здесь рекуррентные процедуры самообучения по виду напоминают процедуру Роббинса — Монро, но доказательство их сходимости не укладывается в рамки общих теорем метода стохастической аппроксимации и требует привлечения новых идей.

Постановки задач о самообучении, аналогичные рассматриваемой в данном разделе, возникают в рамках метода потенциальных функций. Из-за недостатка места здесь эти задачи рассматриваться не будут, хотя приводимые ниже доказательства в значительной степени опираются на построения, использованные при рассмотрении задачи о самообучении в работах авторов метода потенциальных функций.

К задаче обучения «без учителя» возможны и другие подходы, связанные с «обработкой» сразу всей обучающей выборки. Здесь такие варианты задачи самообучения не рассматриваются.

В заключение отметим, что функционалы, возникающие в задаче самообучения, как правило, многоэкстремальны, а известные методы позволяют находить лишь локальные экстремумы, которые могут не отвечать решению поставленной задачи. Отмеченный недостаток присущ и обсуждаемому ниже рекуррентным процедурам. Вопрос о нахождении глобального минимума в задаче самообучения изучен слабо и далее больше не обсуждается.

ГЛАВА 10. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О САМООБУЧЕНИИ

В главе дается постановка задачи о самообучении (обучении «без учителя»), поясняется, в чем состоит существенное различие между рекуррентными алгоритмами самообучения и процедурой Роббинса — Монро. Приводимое в § 10.3—10.4 доказательство их сходимости для некоторого специального случая показывает, насколько это доказательство сложнее ставшей стандартной схемы доказательства сходимости метода стохастической аппроксимации.

§ 10.1. СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛА СРЕДНЕГО РИСКА В ЗАДАЧЕ О САМООБУЧЕНИИ

Пусть требуется все множество изображений разбить на заданное число l классов. Если изображения x в пространстве признаков сгруппированы в непосредственной близости от «центров» классов, то естественно поступить следующим образом. Введем функцию, характеризующую расстояние точки x от неизвестного пока «центра» класса. Тогда классификация может быть основана на требовании, чтобы каждый элемент каждого класса был удален от «центра» класса на расстояние, меньшее, чем от «центров» других классов. Это требование может быть связано с минимизацией некоторого функционала (среднего риска). Задача самообучения считается решенной, если удалось по тренировочному множеству определить «центры» $\{\tau^{(k)}\}$ и границы соответствующих множеств так, чтобы риск был минимален. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть пространство признаков X разбито на l -непересекающихся подмножеств $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$ и пусть $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(l)}$ — «центры» соответствующих множеств. Зададимся произвольными монотонно возрастающими функциями $R_k(x)$ и будем характеризовать расстояние от изображения x до «центра» $\tau^{(k)}$ соответ-

ствующего класса с помощью выражения $\rho_k(x, \tau^{(k)}) = R_k(x - \tau^{(k)})$. Функцию $\rho_k(x, \tau^{(k)})$ можно рассматривать как функцию потерь, или штрафов, для изображений k -го класса. Пусть $x(\omega)$ — случайный вектор. Средний риск, или средний штраф, можно записать в виде

$$W = \sum_{k=1}^l p_k \int_{X^{(k)}} R_k(x - \tau^{(k)}) p_k(x) dx, \quad (10.1.1)$$

где, как обычно, $p_k = \mathbf{P}\{x \in X^{(k)}\}$,

$$p_k(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}\{x(\omega) \in D_\varepsilon(x)\} \cap X^{(k)}}{\mathbf{P}\{x(\omega) \in D_\varepsilon(x)\} \cup V_\varepsilon(x)},$$

$D_\varepsilon(x)$ — шар радиуса ε с центром в точке x и $V_\varepsilon(x)$ — объем шара $D_\varepsilon(x)$. Предполагается, что написанные пределы существуют.

Вводя плотность распределения изображений $p(x) = \sum_{k=1}^l p_k p_k(x)$, перепишем W в виде

$$W = \sum_{k=1}^l \int_{X^{(k)}} R_k(x - \tau^{(k)}) p(x) dx. \quad (10.1.2)$$

Такой переход возможен в силу сделанного предположения о непересекаемости множеств $X^{(k)}$. Если образовать общую функцию потерь

$$Q(x, \bar{\tau}) = \sum_{k=1}^l R_k(x - \tau^{(k)}) I^{(k)}(x),$$

где $\bar{\tau}$ — набор векторов $\{\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(l)}\}$, $I^{(k)}(x)$ — индикатор множества $X^{(k)}$, то средний риск можно представить в виде

$$W(\bar{\tau}) = \mathbf{M}_x Q(x, \bar{\tau}). \quad (10.1.3)$$

Итак, задача построения разделяющих функций, реализующих разбиение пространства признаков на классы, сводится к минимизации функционала среднего риска (10.1.3). Заметим, что в рамках поставленной задачи важно найти не только границы, но и «центры» классов.

Если плотность $p(x)$ распределения изображений известна, то параметризуя каким-либо образом множество разделяющих поверхностей, приходим к обычной вариационной задаче для нахождения экстремальных значений параметров разделяющих поверхностей и соответствующих им «центров» классов. Варьируя параметры задачи, получаем уравнения, которым должны удовлетворять экстремальные параметры. Эти уравнения могут иметь сложную функциональную форму, но, в принципе, их можно решить и среди найденных значений параметров выделить нужные. Обычно в задачах обучения плотность $p(x)$ не известна и приходится производить оценку параметров с помощью тренировочного множества (обучающей выборки).

Для построения стохастических процедур оценки экстремальных параметров выясним, каким условиям должны удовлетворять экстремальные параметры задачи. Эти условия получаются из равенства нулю вариации функционала (10.1.3). Поскольку при использовании обычного приема вариационного исчисления приходится варьировать не только подынтегральное выражение, но и «пределы интегрирования», то приведем формулу для приращения функционала при варьировании «пределов интегрирования».

Лемма 10.1.1. Пусть гладкая вещественная функция $f(x)$ такова, что $\nabla f(x) \neq 0$ в точках, где $f(x) = 0$, и пусть $R(x)$ — непрерывная финитная функция. Тогда

$$\Delta \int_{\{f(x) > 0\}} R(x) dx \triangleq \int_{\{f(x) + \delta f(x) > 0\}} R(x) dx - \int_{\{f(x) > 0\}} R(x) dx = \int_{\{f(x) = 0\}} \frac{\delta f(x)}{\|\nabla f(x)\|} R(x) d\sigma + o[\max_{x \in X} |\delta f(x)|], \quad (10.1.4)$$

где выражение $\int_{\{f(x) = 0\}} Q(x) d\sigma$ означает интеграл по поверхности $\{f(x) = 0\}$, $\sigma(z)$ — величина, удовлетворяющая условию $\lim_{|z| \rightarrow 0} |z|^{-1} \sigma(z) = 0$ и \tilde{X} — носитель функции $R(x)$: $\tilde{X} = \{x | R(x) \neq 0\}$.

В частности, если $f(x) = (c, x) + \gamma$ и $\delta f(x) = (\delta c, x) + \delta \gamma$ — линейные функции, то

$$\Delta \int_{\{f(x) > 0\}} R(x) dx = \|c\|^{-1} \int_{\{f(x) = 0\}} \delta f(x) R(x) d\sigma + o[\max_{x \in \tilde{X}} \|x\|]. \quad (10.1.5)$$

Из формул (10.1.4), (10.1.5) следует, что вариация δW функционала

$$W = \int_{\{f(x) > 0\}} R(x) dx$$

равна

$$\delta W = \int_{\{f(x) = 0\}} \|\nabla f(x)\|^{-1} R(x) \delta f(x) d\sigma. \quad (10.1.6)$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta \int_{\{f(x) > 0\}} R(x) dx = \int_V R(x) dx,$$

где V — объем, заключенный между поверхностями S и S' , $S = \{x | f(x) = 0\}$, $S' = \{x | f(x) + \delta f(x) = 0\}$. Пусть x — произвольная точка на S . Через x' обозначим точку вида

$$x' = x + \varepsilon \|\nabla f(x)\|^{-1} \nabla f(x) \triangleq x + \delta x, \quad (10.1.7)$$

расположенную на поверхности S' . Согласно определению интеграла по объему справедливо соотношение

$$\int_V R(x) dx = \int_S \int_{x'} R(x) (d\vec{\sigma}, dz),$$

где $d\vec{\sigma}$ — ориентированный по антиградиенту элемент площади на поверхности S . Предполагая, что $R(x)$ — непрерывная функция, а точка x' близка к x , т. е. вариация δx мала, получим

$$\begin{aligned} \int_V R(x) dx &= \int_S R(x) \int_{x'} (d\vec{\sigma}, dz) + o(\|\delta x\|) = \\ &= \int_S R(x) (d\vec{\sigma}, \delta x) + o(\|\delta x\|). \end{aligned} \quad (10.1.8)$$

Вычислим δx по формуле (10.1.7):

$$0 = f(x') + \delta f(x') = f(x + \delta x) + \delta f(x + \delta x) = f(x) + (\nabla f(x), \delta x) + o(\|\delta x\|^2) + \delta f(x) + o(\|\delta f(x)\| + \|\delta x\|).$$

Учитывая, что $f(x) = 0$, $x \in S$, с помощью (10.1.7) находим $\delta x = -\delta f(x) \cdot \|\nabla f(x)\|^{-1} \nabla f(x) + o(\|\delta x\| + \|\delta f(x)\|)$. Подставляя найденное для δx выражение в (10.1.8), получим окончательно

$$\int_V R(x) dx = \int_S \|\nabla f(x)\|^{-1} R(x) \delta f(x) d\sigma + o(\max_{x \in \bar{X}} \|\delta f(x)\|),$$

где $d\sigma = -(d\vec{\sigma}, \nabla f(x)) \|\nabla f(x)\|^{-1}$ и учтено, что $\|\delta x\|$ и $\|\delta f(x)\|$ суть величины одного порядка малости. Лемма доказана.

Вернемся к функционалу среднего риска (10.1.3). Вариацию δW удобно представить в виде суммы двух вариаций: вариации $\delta_1 W$, связанной с изменением параметров $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(l)}$, и вариации $\delta_2 W$, связанной с изменением множеств $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$:

$$\delta W = \delta_1 W + \delta_2 W. \quad (10.1.9)$$

Вариация $\delta_1 W$ вычисляется просто:

$$\delta_1 W = - \sum_{k=1}^l \int_{X^{(k)}} (\nabla_{\tau^{(k)}} R_k(x - \tau^{(k)}), \delta \tau^{(k)}) p(x) dx, \quad (10.1.10)$$

где $\nabla_{\tau} R_k(\tau)$ — градиент функции R_k по τ . Для вычисления вариации $\delta_2 W$ воспользуемся леммой 10.1.1. Чтобы привести W к нужному виду, введем дискриминантные функции $f^{(k)}(x)$ по формулам

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \inf_{y \in X^{(k)}} \|x - y\|, & \text{если } x \in X^{(k)}, \\ - \inf_{y \in X^{(k)}} \|x - y\|, & \text{если } x \notin X^{(k)}, \end{cases} \quad (10.1.11)$$

т. е. $f^{(k)}(x)$ — разность расстояний от изображения x до мно-

жества $X \setminus X^{(h)}$ и от изображения x до множества $X^{(h)}$. Из формул (10.1.11) следует, что $f^{(h)}(x) \geq 0$, если $x \in X^{(h)}$, и $f^{(h)}(x) < 0$, если $x \in X \setminus X^{(h)}$, причем знак равенства достигается лишь на границе множества $X^{(h)}$. Теперь выражение для W может быть записано в виде

$$W = \sum_{k=1}^l \int_{\{f^{(k)}(x) > 0\}} R_k(x - \tau^{(k)}) p(x) dx.$$

Здесь предполагается, что граница $S_k = \{x | f^{(k)}(x) = 0\}$ множества $X^{(k)}$ имеет нулевую меру, так что интегралы по множествам $\{f^{(k)}(x) \geq 0\}$ и $\{f^{(k)}(x) > 0\}$ совпадают. Для применения леммы 10.1.1 нужно убедиться, что $\nabla f^{(k)}(x) \neq 0$ при $x \in S_k$. Из (10.1.11) имеем $\nabla f^{(k)}(x)|_{x \in S_k} = -n_k$, где n_k — нормированный вектор внешней нормали к границе S_k множества $X^{(k)}$. Далее предполагается, что для почти всех точек границ множеств $X^{(k)}$ внешняя нормаль существует. Пусть теперь разделяющие функции $f^{(k)}(x)$ варьируются. Вариации этих функций обозначим через $\delta f^{(k)}(x)$. По лемме 10.1.1. получаем

$$\delta_2 W = \sum_{k=1}^l \int_{S_k} \delta f^{(k)}(x) R_k(x - \tau^{(k)}) p(x) d\sigma, \quad (10.1.12)$$

поскольку $\|\nabla f^{(k)}(x)\|_{x \in S_k} = 1$. Это и есть искомая формула для вариации $\delta_2 W$, связанной с изменением множеств $\{X^{(k)}\}$. Отметим, что $\delta f^{(k)}(x)$ — не совсем произвольные вариации. Действительно, при вариации множеств $X^{(k)}$ должно по-прежнему соблюдаться условие непересекаемости проварьированных множеств $\widetilde{X}^{(k)}$ и их полнота

$$\bigcup_{k=1}^l \{f^{(k)}(x) + \delta f^{(k)}(x) \geq 0\} = X$$

и

$$\{f^{(p)}(x) + \delta f^{(p)}(x) > 0\} \cap \{f^{(r)}(x) + \delta f^{(r)}(x) > 0\} = \emptyset, \quad p \neq r.$$

Это приводит к тому, что если точка x принадлежит границе двух множеств $X^{(p)}$ и $X^{(r)}$, $x \in S_p \cup S_r$, то

$$\delta f^{(p)}(x) = -\delta f^{(r)}(x). \quad (10.1.13)$$

Равенство (10.1.13) — единственное ограничение (кроме, разумеется, требования некоторой гладкости вариаций $\delta f^{(k)}(x)$).

В экстремальном случае необходимо, чтобы $\delta_1 W = 0$, $\delta_2 W = 0$. Из (10.1.10) получаем, что необходимо должно быть выполнено

$$\int_{\{f^{(k)}(x) > 0\}} \nabla_x R_k(x - \tau^{(k)}) p(x) dx = 0. \quad (10.1.14)$$

Рассмотрим теперь равенство $\delta_2 W = 0$. Учитывая (10.1.12) и (10.1.13), получим, что в каждой точке x , принадлежащей границе множеств $X^{(p)}$ и $X^{(r)}$, при условии $\rho(x) \neq 0$ необходимо должно быть выполнено

$$R_p(x - \tau^{(p)}) = R_r(x - \tau^{(r)}). \quad (10.1.15)$$

Требование $\rho(x) \neq 0$ в точках границ несущественно, поскольку всегда можно изменить множества $X^{(h)}$ без изменения величины среднего риска так, что $\rho(x) \neq 0$ на рассматриваемой границе. При этом, разумеется, требование указанной гладкости границ (существование почти всюду на границе внешней нормали) должно сохраняться.

Итак, окончательно убеждаемся, что экстремальные области $X^{(h)}$ и их «центры» $\tau^{(h)}$ должны удовлетворять условиям (10.1.14), (10.1.15). Отметим, что если $x = x(\omega)$ — сл. вел., то (10.1.14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} M \{ I^{(k)}(x(\omega)) \nabla_{\tau} R_k(x(\omega) - \tau^{(k)}) \} = 0, \quad (10.1.16) \\ k = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Соотношение (10.1.15) однозначно определяют области $X^{(h)}$, если известны «центры» $\tau^{(h)}$. Таким образом, задача свелась лишь к нахождению «центров» классов из условий (10.1.16).

§ 10.2. РЕКУРРЕНТНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ САМООБУЧЕНИЯ

Уравнение (10.1.16) очень напоминает уравнение регрессии, для решения которого в гл. 8 была рассмотрена рекуррентная процедура Роббинса — Монро. Отличие состоит «лишь» в множителе $I^{(k)}(x)$, стоящем под знаком м. о. в уравнениях (10.1.16), но, как оказывается, это отличие принципиально и не позволяет воспользоваться теоремой 8.2.1 о сходимости процедуры Роббинса — Монро. Тем не менее этот множитель не мешает написать для функционала (10.1.16) стохастическую процедуру для оценки параметров $\tau^{(h)}$:

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}^{(k)} = \tau_n^{(k)} - \gamma_n I_n^{(k)}(x_n) \nabla_{\tau} R_k(x_n - \tau_n^{(k)}), \quad (10.2.1) \\ k = 1, \dots, l; \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где x_1, x_2, \dots — элементы обучающей выборки; $\{\tau_1^{(k)}\}, k = 1, \dots, \dots, l$, — начальные значения «центров», выбираемые произвольно.

Алгоритм (10.2.1) пока нельзя назвать эффективным, поскольку в его правую часть входят неизвестные величины $I_n^{(k)}(x_n)$. Однако с помощью соотношений (10.1.15) эта трудность легко обходится.

Действительно, $I_n^{(k)}(x)$ — индикатор множества $\{f_n^{(k)}(x) > 0\}$. Поэтому для определения значения величины $I_n^{(k)}(x)$ достаточ-

по выяснить, какая из функций R_k принимает в точке $x = x_n$ наименьшее значение. Поскольку $R_k(x)$ — монотонные функции типа расстояния, то при заданных «центрах» $\tau_n^{(1)}, \dots, \tau_n^{(l)}$ точка x принадлежит тому из множеств $\{f_n^{(p)}(x) > 0\}$, для которого

$$R_p(x - \tau_n^{(p)}) = \min_k R_k(x - \tau_n^{(k)}). \quad (10.2.2)$$

Это последнее условие и служит для определения значений $I_n^{(k)}(x_n)$ в алгоритме (10.2.1). В развернутой форме алгоритм (10.2.1) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}^{(p)} &= \tau_n^{(p)} - \gamma_n \nabla_{\tau} R_p(x_n - \tau_n^{(p)}), \\ \text{если } R_p(x_n - \tau_n^{(p)}) &= \min_k R_k(x_n - \tau_n^{(k)}), \quad \tau_{n+1}^{(k)} = \tau_n^{(k)} \quad \text{при } k \neq p. \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

В такой форме алгоритм (10.2.3) напоминает алгоритмы с поощрением.

Можно было бы сформулировать рекуррентный алгоритм и для функционала, в котором каждая из функций R_k зависит сразу от всех «центров» $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(l)}$. Все предыдущие рассуждения от этого мало меняются, лишь окончательные выражения становятся более громоздкими.

Выбирая в алгоритме (10.2.3) различные функции R_k и числовые последовательности γ_n , можно получить как известные в литературе процедуры самообучения, так и ряд новых процедур.

Остановимся на вопросе о возможности использования теоремы 8.2.1 для обоснования сходимости процедуры (10.2.3). Простоты ради ограничимся случаем, когда $R_1(x) = \dots = R_n(x) = R(x)$. Покажем, что четвертое условие теоремы 8.2.1 выполнено быть не может.

Это условие требует единственности минимума функционала (10.1.3) и в принятых обозначениях формулируется следующим образом.

Существуют векторы $\tau_*^{(1)}, \dots, \tau_*^{(l)}$ такие, что для произвольных векторов $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(l)}$, отличных от $\tau_*^{(1)}, \dots, \tau_*^{(l)}$, справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^l (\tau^{(k)} - \tau_*^{(k)}, M_x \{I^{(k)}(x) \nabla_{\tau} R(x - \tau^{(k)})\}) > 0. \quad (10.2.4)$$

Остальные предположения теоремы 8.2.1 естественны в данном случае. При выполнении неравенства (10.2.4) теорема 8.2.1 утверждает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^{(k)} = \tau_*^{(k)} \quad (\text{п. н.}), \quad k = 1, \dots, l. \quad (10.2.5)$$

Но процедура (10.2.3) при одинаковых R_k носит геометрический характер в том смысле, что последовательность разбиений $\{f_n^{(k)}(x) > 0\}$ не зависит от того, в каком порядке занумерованы исходные «центры» $\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(l)}$. Перенумерация исходных «центров» приведет лишь к перенумерации множеств $\{f_n^{(k)}(x) > 0\}$, но не более того. Соотношения (10.2.5) тогда показывают, что $\tau_*^{(1)} = \dots = \tau_*^{(l)}$, т. е. векторы $\{\tau_*^{(l)}\}$ не являются «центрами»

разбиения пространства X , а потому такими не могут быть и векторы $\{\tau_n^{(k)}\}$ при больших n .

Приведенное соображение показывает, что для доказательства сходимости процедуры (10.2.3) условие (10.2.4) должно быть заменено чем-то другим, либо вообще опущено. В любом случае соображения, приведенные при доказательстве теоремы 8.2.1, оказываются недостаточными.

§ 10.3. ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ САМООБУЧЕНИЯ И ИДЕЯ ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Будем ниже предполагать, что выполнены условия:

1) Функции $R_k(x)$ в функционале (10.1.1) одинаковы и имеют вид

$$R_k(x) = \|x\|^2, \quad k = 1, \dots, l.$$

2) Обучающая последовательность x_1, x_2, \dots состоит из независимых сл. вел., имеющих одинаковое распределение с плотностью $p(x)$.

3) Плотность $p(x)$ непрерывна и финитна (последнее означает, что носитель $X(p) = \{x \mid p(x) \neq 0\}$ функции $p(x)$ — ограниченное множество).

4) Числовая последовательность γ_n удовлетворяет условиям

$$1 > \gamma_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty.$$

5) Начальный набор $\{\tau_1^{(k)}\}$ «центров» множеств состоит из различных точек, каждая из которых принадлежит выпуклой оболочке множеств $X(p)$ — носителя функции $p(x)$.

При сделанных предположениях функционал (10.1.1) и процедура (10.2.3) могут быть записаны в виде

$$W(\bar{\tau}) = \sum_{k=1}^l \int_X \|\tau^{(k)} - x\|^2 I^{(k)}(x) p(x) dx, \quad (10.3.1)$$

$$\tau_{n+1}^{(k)} = \tau_n^{(k)} + \gamma_n I_n^{(k)}(x_n) (x_n - \tau_n^{(k)}), \quad k = 1, \dots, l, \quad (10.3.2)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

где $I_n^{(k)}(x)$ — индикатор множества $X_n^{(k)}$ и $\bar{\tau}$ — набор векторов $\{\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(l)}\}$. Разбиение $\{X_n^{(k)}\}$ множества X на каждом шаге алгоритма определяется по правилу

$$\{x \in X_n^{(k)}\} \Leftrightarrow \{\|\tau_n^{(k)} - x\| < \min_{j \neq k} \|\tau_n^{(j)} - x\|\}. \quad (10.3.3)$$

Теорема 10.3.1. При выполнении перечисленных выше условий 1) — 5) для последовательностей $\{\tau_n^{(k)}\}$, полученных с помощью алгоритма (10.3.2), существует п. н. предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(\bar{\tau}_n) = W_0, \quad (10.3.4)$$

причем по некоторой подпоследовательности

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [p_{n_s}^{(k)} \tau_{n_s}^{(k)} - M_{n_s}^{(k)}] = 0 \quad (\text{п. н.}), \quad k = 1, \dots, l. \quad (10.3.5)$$

$$\begin{aligned} p_n^{(k)} &= \int_X I_n^{(k)}(x) p(x) dx, \\ M_n^{(k)} &= \int_X x I_n^{(k)}(x) p(x) dx. \end{aligned} \quad (10.3.6)$$

Соотношение (10.3.4) означает, что последовательность наборов $\{\tau_n^{(k)}\}$ сходится в смысле функционала $W(\bar{\tau})$, а из соотношения (10.3.5) следует, что W_0 — одно из экстремальных значений функционала $W(\bar{\tau})$, поскольку при $\inf p_{n_s}^{(k)} \neq 0$ из (10.3.5) следует, что „центры“ $\tau_{n_s}^{(k)}$ стремятся к „центрам тяжести“ $[p_{n_s}^{(k)}]^{-1} M_{n_s}^{(k)}$ соответствующих классов $X_{n_s}^{(k)}$, что, как следует из соотношений (10.1.14), (10.1.15), соответствует экстремальности функционала $W(\bar{\tau})$.

Вместе с тем теорема 10.3.1 не гарантирует ни единственности предельных точек последовательности $\{\tau_n^{(k)}\}$, ни даже существования их пределов.

Интересен вопрос о том, в каких случаях соотношение (10.3.5) будет выполнено не на подпоследовательности, а на всей последовательности, а также когда можно гарантировать выполнение условий

$$\inf_{k, n} p_n^{(k)} > 0 \quad (\text{п. н.}). \quad (10.3.7)$$

Имеют место следующие результаты.

Теорема 10.3.2. Пусть выполнены условия теоремы 10.3.1 и функция

$$P(\tau, \alpha) = \int_{\{(\tau, x) - \alpha > 0\}} p(x) dx$$

непрерывно дифференцируема по параметрам τ и α при $\tau \neq 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} [p_n^{(k)} \tau_n^{(k)} - M_n^{(k)}] = 0 \quad (\text{п. н.}), \quad (10.3.8)$$

$k=1, \dots, l$, при $l=2, 3$, причем при $l=2$ выполнены неравенства (10.3.7).

б) При выполнении неравенств (10.3.7) соотношения (10.3.8) справедливы при любом натуральном l .

в) При выпуклом носителе $X(p)$ функции $p(x)$ справедливы неравенства (10.3.7).

Таким образом, «неэффективное» условие (10.3.7) гарантирует сходимость центров $\{\tau_n^{(k)}\}$ к соответствующим «центрам тяжести» (в смысле стремления к нулю расстояния между ними), а выпуклость множества $X(p)$ является достаточным условием для выполнимости неравенств (10.3.7). Схема доказательства приведенных утверждений в значительной степени от-

личается от доказательства теоремы 8.2.1, хотя и использует основные его моменты.

Ниже будет дано полное доказательство лишь теоремы 10.3.1. Что касается теоремы 10.3.2, то ограничимся лишь приведением схемы доказательства, отсылая за подробностями к литературе, указанной в комментариях. Эта схема состоит в следующем.

Обозначим через $V(\bar{\tau})$ величину

$$V(\bar{\tau}) = \sum_{k=1}^l \|p^{(k)}(\bar{\tau}) - M^{(k)}\|^2, \quad (10.3.9)$$

где $p^{(k)} = p^{(k)}(\bar{\tau}) \triangleq \int_{X^{(k)}(\bar{\tau})} p(x) dx$,

$$M^{(k)} = M^{(k)}(\bar{\tau}) \triangleq \int_{X^{(k)}(\bar{\tau})} xp(x) dx \quad (10.3.10)$$

и $\{X^{(k)}(\bar{\tau})\}$ — разбиение множества X , производимое с помощью набора точек $\bar{\tau} = \{\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(l)}\}$ в соответствии с правилом (10.3.3). В ходе доказательства теоремы 10.3.1 получаем, что п. н. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n V(\bar{\tau}_n)$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} W(\bar{\tau}_n)$.

Для доказательства теоремы 10.3.2 следует установить оценки для $V(\bar{\tau}_n)$ типа

$$V(\bar{\tau}_{n+1}) \leq V(\bar{\tau}_n) + C\gamma_n, \quad (10.3.11)$$

где C — положительная постоянная. Из оценок (10.3.11) и факта сходимости ряда $\sum \gamma_n V(\bar{\tau}_n)$ выводится предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\bar{\tau}_n) = 0. \quad (10.3.12)$$

Сами же оценки получаются из рекуррентного соотношения (10.2.3), если предположить, что

$$\inf_n \min_{i \neq j} \|\tau_n^{(i)} - \tau_n^{(j)}\| > 0 \text{ (п. н.)}. \quad (10.3.13)$$

Установление неравенства (10.3.13) составляет главное затруднение при доказательстве теоремы 10.3.2. Особенность задач с $l=2, 3$ позволяет установить (10.3.13) лишь в условиях теоремы 10.3.2. В случае $l > 3$ удается установить (10.3.13) при дополнительном предположении о выпуклости носителя функции $p(x)$. Путьно с неравенствами (10.3.13) тогда получается неравенство $\inf_{n, k} p_n^{(k)} > 0$, что совместно с (10.3.12) приводит к остальным утверждениям теоремы 10.3.2.

Реализация указанного плана в техническом отношении довольно сложна и утомительна.

§ 10.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ
ПРОЦЕДУРЫ САМООБУЧЕНИЯ

Предварительно проведем специальное построение, представляющее собой основной шаг в доказательстве теоремы 10.3.1.

Каждому набору точек $\bar{\tau} = \{\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(l)}\}$, осуществляющему разбиение пространства признаков X на l непересекающихся классов $X^{(k)}(\bar{\tau})$, сопоставим $l(l-1)$ линейных функций

$$L_{ij}(x) = (\tau^{(i)} - \tau^{(j)}, x) - \frac{1}{2} (\|\tau^{(i)} - \tau^{(j)}\|^2), \quad (10.4.1)$$

$$i \neq j.$$

Уравнение $L_{ij}(x) = 0$ определяет плоскость, проходящую через середину отрезка, соединяющего точки $\tau^{(i)}$ и $\tau^{(j)}$. Всего имеется $2^{-1}l(l-1)$ таких плоскостей. Занумеруем их в каком-либо порядке и обозначим через n_{ij} номер плоскости, отвечающей точкам $\tau^{(i)}$ и $\tau^{(j)}$.

Наряду с набором $\bar{\tau}$ точек из X рассмотрим другой набор $\bar{\tau}' = \{\tau^{(1)'}, \dots, \tau^{(l)'}\}$, точки $\tau^{(i)'}$ которого удовлетворяют условиям

$$\min_{j \neq i} L_{ij}(\tau^{(i)'}) > 0, \quad i = 1, \dots, l. \quad (10.4.2)$$

Точки $\tau^{(i)'}$, $\tau^{(j)'}$ определяют свои плоскости $L'_{ij}(x) = 0$. Будем считать, что эти плоскости занумерованы теми же числами n_{ij} , что и плоскости $L_{ij}(x) = 0$.

Для каждого натурального k определим функции

$$L_{ijk}(x) = \begin{cases} L_{ij}(x), & \text{если } n_{ij} > k, \\ L'_{ij}(x), & \text{если } n_{ij} \leq k, \end{cases} \quad (10.4.3)$$

а с помощью этих функций введем множества

$$X_{i,k} \triangleq \bigcap_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^l \{L_{ijk}(x) > 0\}. \quad (10.4.4)$$

Отметим некоторые свойства множеств $X_{i,k}$. Очевидно, что при каждом k множества $X_{i,k}$ образуют разбиение пространства X , а если $X_{i,k-1} = X_{i,k}$, то существует точка $\tau^{(j)}$, для которой номер n_{ij} плоскости, отвечающий точкам $\tau^{(i)}$ и $\tau^{(j)}$, равен k .

С помощью введенных обозначений можем написать

$$\Delta p^{(i)} \triangleq \mathbf{P}(X^{(i)'}) - \mathbf{P}(X^{(i)}) = \sum_k [\mathbf{P}(X_{i,k}) - \mathbf{P}(X_{i,k-1})],$$

$$\text{где } \mathbf{P}(X^{(i)}) \triangleq \int_{X^{(i)}} p(x) dx, \quad X^{(i)} \triangleq \bigcap_{j \neq i} \{L_{ij}(x) > 0\},$$

штрих у суммы по k означает, что суммируются лишь слагаемые, для которых существует такое j , и что $n_{ij} = k$, поскольку $X_{i,k} = X_{i,k-1}$ для остальных индексов i , следовательно, $\mathbf{P}(X_{i,k}) = \mathbf{P}(X_{i,k-1})$. Вводя обозначения $\Delta p_{ij} \triangleq \mathbf{P}(X_{i,n_{ij}}) - \mathbf{P}(X_{i,n_{ij}-1})$, получим

$$\Delta p^{(i)} = \sum_{j=1}^i \Delta p_{ij}. \quad (10.4.5)$$

Аналогично вводя обозначения

$$\Delta M_{ij} \triangleq M_{i,n_{ij}} - M_{i,n_{ij}-1}; \quad M_{ij} \triangleq \int_{x_{i,j}} xp(x) dx,$$

можно записать

$$\begin{aligned} \Delta M^{(i)} &= \int_{x^{(i)'}} xp(x) dx - \int_{x^{(i)}} xp(x) dx = \\ &= \sum_{j \neq i} \Delta M_{ij}. \end{aligned} \quad (10.4.6)$$

Введенные величины Δp_{ij} , ΔM_{ij} , как следует из свойств введенных выше множеств $X_{i,j}$, антисимметричны по своим индексам

$$\Delta p_{ij} = -\Delta p_{ji}, \quad \Delta M_{ij} = -\Delta M_{ji}. \quad (10.4.7)$$

Лемма 10.4.1. *Справедливо неравенство*

$$2(\tau^{(i)'} - \tau^{(j)'}) (\Delta M_{ij}) - (\|\tau^{(i)'}\|^2 - \|\tau^{(j)'}\|^2) \Delta p_{ij} \geq 0.$$

Доказательство. Используя обозначения

$$\begin{aligned} Y_{i,j} &\triangleq X_{i,n_{ij}} \cup X_{j,n_{ij}} = X_{i,n_{ij}-1} \cup X_{j,n_{ij}-1}, \\ Z_{i,j} &\triangleq Y_{i,j} \cap \{L_{ij}(x) > 0\}, \quad Z'_{i,j} = Y_{i,j} \cap \{L'_{ij}(x) > 0\}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \Delta p_{ij} &= \int_{Z'_{i,j}} p(x) dx - \int_{Z_{i,j}} p(x) dx, \\ \Delta M_{ij} &= \int_{Z'_{i,j}} xp(x) dx - \int_{Z_{i,j}} xp(x) dx \quad \text{и} \\ 2(\tau^{(i)'} - \tau^{(j)'}) (\Delta M_{ij}) - \Delta p_{ij} (\|\tau^{(i)'}\|^2 - \|\tau^{(j)'}\|^2) &= \\ &= 2 \int_{(Z'_{i,j} \cap \{L'_{ij}(x) < 0\})} L'_{ij}(x) p(x) dx - \\ &- 2 \int_{(Z_{i,j} \cap \{L'_{ij}(x) < 0\})} L'_{ij}(x) p(x) dx \geq 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Суммируя неравенства леммы (10.4.1) по $j (j \neq i)$ и учитывая соотношение (10.4.7), получим неравенство

$$\sum_{h=1}^i [\|\tau^{(h)'}\|^2 \Delta p^{(h)} - 2(\tau^{(h)'}) (\Delta M^{(h)})] \leq 0. \quad (10.4.8)$$

Лемма 10.4.2. *Справедливо неравенство*

$$W(\bar{\tau}') \leq W(\bar{\tau}) + 2 \sum_{k=1}^l (\nabla \tau^{(k)}, p^{(k)}(\bar{\tau}) \tau^{(k)} - M^{(k)}(\bar{\tau})) + \sum_{k=1}^l p^{(k)}(\bar{\tau}) \|\tau^{(k)}\|^2, \quad (10.4.9)$$

где $\bar{\tau}$ и $\bar{\tau}'$ — два набора, каждый из которых состоит из l различных точек в множестве X (набор $\bar{\tau}'$ удовлетворяет условиям (10.4.2), т. е. для каждого $i=1, \dots, l$ выполнено $\tau^{(i)} \in X^{(i)}(\bar{\tau})$).

Доказательство. Действительно, с учетом неравенства (10.4.8) имеем

$$\begin{aligned} W(\bar{\tau}') - W(\bar{\tau}) &= \\ &= \sum_{k=1}^l [\|\tau^{(k)'}\|^2 p^{(k)}(\bar{\tau}') - \|\tau^{(k)}\|^2 p^{(k)}(\bar{\tau}) - \\ &\quad - 2(\tau^{(k)'}, M^{(k)}(\bar{\tau}')) + 2(\tau^{(k)}, M^{(k)}(\bar{\tau}))] = \\ &= \sum_{k=1}^l [\|\tau^{(k)'}\|^2 \Delta p^{(k)} - 2(\tau^{(k)'}, \Delta M^{(k)})] + \\ &\quad + \sum_{k=1}^l [(\Delta \tau^{(k)}, 2\tau^{(k)} + \Delta \tau^{(k)}) p^{(k)}(\bar{\tau}) + 2(\Delta \tau^{(k)}, M^{(k)})] \leq \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^l (\Delta \tau^{(k)}, p^{(k)}(\bar{\tau}) \tau^{(k)} - M^{(k)}(\bar{\tau})) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^l p^{(k)}(\bar{\tau}) \|\Delta \tau^{(k)}\|^2, \end{aligned}$$

что и утверждалось.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 10.3.1. В силу алгоритма (10.3.2) имеем

$$M(\Delta \tau_n^{(k)} | x_1, \dots, x_{n-1}) = -\gamma_n [p^{(k)}(\bar{\tau}_n) \tau_n^{(k)} - M^{(k)}(\bar{\tau}_n)], \quad (10.4.10)$$

где $\Delta \tau_n^{(k)} = \tau_{n+1}^{(k)} - \tau_n^{(k)}$. Подставляя в (10.4.9) вместо $\bar{\tau}$ набор векторов $\{\tau_n^{(k)}\}$, а вместо $\bar{\tau}'$ набор $\{\tau_{n+1}^{(k)}\}$ и беря условное м. о. при условии x_1, \dots, x_{n-1} , в силу (10.4.10) получим

$$\begin{aligned} M(W(\bar{\tau}_{n+1}) | x_1, \dots, x_{n-1}) &\leq W(\bar{\tau}_n) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^l p^{(k)}(\bar{\tau}_n) \|\Delta \tau_n^{(k)}\|^2 - \\ &\quad - 2\gamma_n \sum_{k=1}^l \|p^{(k)}(\bar{\tau}_n) \tau_n^{(k)} - M^{(k)}(\bar{\tau}_n)\|^2 = \\ &= W(\bar{\tau}_n) + \sum_{k=1}^l p^{(k)}(\bar{\tau}_n) \|\Delta \tau_n^{(k)}\|^2 - 2\gamma_n V(\bar{\tau}_n). \end{aligned}$$

В силу алгоритма (10.3.2) имеем $\|\Delta \tau_n^{(k)}\| \leq 2\gamma_n C$,

$$C = \sup_{\{\rho(\cdot, \nu) \neq 0\}} \|x\|,$$

$$\begin{aligned} \text{и потому } M(W(\bar{\tau}_{n+1}) | x_1, \dots, x_{n-1}) &\leq W(\bar{\tau}_n) - \\ &\quad - 2\gamma_n V(\bar{\tau}_n) + 4lC^2\gamma_n^2. \end{aligned} \quad (10.4.11)$$

Поскольку $\sum_n \gamma_n^2 < \infty$, а $W(\bar{\tau}_n) \geq 0$, то в силу следствия к теореме 8.2.1 о сходимости супермартингалов получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(\bar{\tau}_n) = W_0 \quad (\text{п. н.}).$$

Теперь из неравенства (10.4.11) элементарно следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n M V(\bar{\tau}_n)$, означающая, что почти всякая реализация наборов $\bar{\tau}_n$ содержит подпоследовательность $\{\bar{\tau}_{n_s}\}$, для которой $\lim_{s \rightarrow \infty} V(\tau_{n_s}) = 0$. Это и доказывает теорему 10.3.1.

§ 10.5. МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА САМООБУЧЕНИЯ

В § 10.3 уже пояснялось, что в основе доказательства теоремы 10.3.2 лежит возможность обеспечения неравенств (10.3.13). Это обстоятельство приводит к следующей естественной модификации алгоритма (10.3.2): если на некотором шаге «перемещающийся» центр класса приблизится к остальным на расстояние, меньшее заданного числа $\varepsilon > 0$, то он аннулируется, а дальнейшее изменение центров классов вновь происходит по формулам (10.3.2), но уже число классов на единицу меньше. Точная формулировка видоизмененного алгоритма самообучения имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_n^{(i_k^n)} &= \tau_n^{(i_k^n)} + \gamma_n I_n^{(i_k^n)}(x_n) \left(x_n - \tau_n^{(i_k^n)} \right), \quad k = 1, \dots, m_n, \\ p^n &\triangleq \min_{r \neq s} \left\| \tau_n^{(i_r^n)} - \tau_n^{(i_s^n)} \right\|, \quad m_{n+1} = m_n - I_{\{p^n < \varepsilon\}}, \end{aligned} \quad (10.5.1)$$

$$i_k^{n+1} = i_{k+q_n^n}^n, \quad q_k^n \triangleq I_{\{p^n < \varepsilon\}} \sum_{s=1}^k I_n^{(i_s^n)}(x_n),$$

$$\bar{\tau}_{n+1}^{(i_k^{n+1})} = \bar{\tau}_n^{(i_k^{n+1})}, \quad k = 1, \dots, m_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.5.2)$$

Здесь m_1 — начальное число классов, $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(m_1)}$ — начальный набор центров классов, каждая точка которого принадлежит выпуклой оболочке носителя функции $p(x)$, $\min_{r \neq s} \|\tau^{(r)} - \tau^{(s)}\| > \varepsilon$, $I_{\{ \cdot \}}$ — индикатор множества $\{ \cdot \}$, а остальные обозначения те же, что и в алгоритме самообучения (10.3.2). Процедура (10.5.1) совпадает с (10.3.2), а перенумерация (10.5.2) полученных векторов $\bar{\tau}_n^{(i_k^n)}$ такова, что «перемещающийся» центр класса аннулируется, если он попадает в ε -окрестность какого-либо из остальных центров.

Теорема 10.5.1. Пусть m_n и $\{\tau_n^{(i_k^n)}\}$ — числа и векторы, получаемые с помощью алгоритма (10.5.1) — (10.5.2). При выполнении условий теоремы 10.3.1 при любом $\varepsilon > 0$ и натуральном $m_1 > 0$ справедливы предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m_\infty > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[p_n^{(i_k^n)} \tau_n^{(i_k^n)} - M_n^{(i_k^n)} \right] = 0,$$

причем $m_\infty \geq 3$, если ε достаточно мало и $m_1 \geq 3$.

Для алгоритма (10.5.1) — (10.5.2), повторяя по существу рассуждения § 10.4, показывается, что п. н. сходится ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n V_n$, $V_n = \sum_{k=1}^{m_n} \left\| p_n^{(i_k^n)} \tau_n^{(i_k^n)} - M_n^{(i_k^n)} \right\|^2$. Этот факт и то обстоятельство, что для алгоритма (10.5.1) — (10.5.2) справедливы неравенства (10.3.13), позволяют убедиться в справедливости теоремы 10.5.1. Здесь ограничимся лишь этим кратким пояснением.

Интересно исследовать соответствие между алгоритмами (10.3.2) и (10.5.1) — (10.5.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$. В частности, в каких случаях имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P \{m_\infty(\varepsilon) = m_1\} = 1?$$

Упражнения к гл. 10

1. Предположим, что множество изображений в пространстве признаков состоит из вершин расположенного в плоскости правильного $2n$ -угольника, причем каждая из вершин равновероятна. Убедиться, что в данном случае функционал (10.3.1) многоэкстремален. Найти экстремальные плоскости.

2. То же, что и в предыдущем упражнении, но вместо правильного многоугольника выбран прямоугольник. Убедиться, что не всякая экстремальная поверхность минимизирует функционал (10.3.1).

3. Найти экстремальные поверхности в случае, когда для плотности $p(x)$ выполнены условия

$$p(x) = \begin{cases} V^{-1}, & \text{если } \|x\| \leq C, \\ 0, & \text{если } \|x\| > C. \end{cases}$$

$$\text{Здесь } V = \int_{\{\|x\| \leq C\}} dx.$$

4. Выбирая в качестве функций $R_k(x - \tau^{(k)})$ функций вида

$$R_k(x - \tau^{(k)}) = \|x - \tau^{(k)}\|^2 + \sum_{h=1}^l \left[\tau^{(h)} \right]^2,$$

получить из общей процедуры (10.2.3) процедуру самообучения А. А. Дорофеюка.

5. Показать, что при одинаковых функциях $R_k(x)$ в функционале (10.1.3) алгоритм (10.3.2) носит геометрический характер в том смысле, что перенумерация начальных „центров“ $\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_l^{(l)}$ приводит лишь к перенумерации множеств $X_n^{(k)}$ на каждом шаге алгоритма.

6. Показать, что при функциях $R_k(x) = \|x\|^2$ соотношения (10.1.14) определяют «центры» $\tau^{(k)}$, совпадающие с «центрами тяжести» множеств $X^{(k)}$, а соотношения (10.1.15) определяют плоскости, проходящие через середины отрезков, соединяющих «центры» $\tau^{(k)}$, и перпендикулярно этим отрезкам. Таким образом, $X^{(k)}$ в рассматриваемом случае — выпуклые многогранники.

7. Предполагая, что в алгоритме (10.2.1) $I_n^{(1)}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} I^{(1)}(x)$, доказать, используя схему доказательства теоремы 8.2.1, что «центры» $\tau_n^{(k)}$ сходятся и в пределе порождают экстремальное разбиение для функционала (10.1.3).

8. Используя лемму 10.1.1, показать, что в задаче разбиения множества X на два непересекающихся подмножества $X^{(1)} = A$ и $X^{(2)} = B$ экстремальные поверхности для функционалов среднего риска

$$W_1 = \mu_A^{(2)} + \mu_B^{(2)} - [\mu_A^{(0)}]^{-1} \|\mu_A^{(1)}\|^2 - [\mu_B^{(0)}]^{-1} \|\mu_B^{(1)}\|^2;$$

$$W_2 = \left\| [\mu_A^{(0)}]^{-1} \mu_A^{(1)} - [\mu_B^{(0)}]^{-1} \mu_B^{(1)} \right\|;$$

$$W_3 = [\mu_A^{(0)}]^{-1} \mu_A^{(2)} + [\mu_B^{(0)}]^{-1} \mu_B^{(2)} - [\mu_A^{(0)}]^{-2} \|\mu_A^{(1)}\|^2 - [\mu_B^{(0)}]^{-2} \|\mu_B^{(1)}\|^2$$

можно искать в классе линейных поверхностей в первых двух случаях и в классе поверхностей второго порядка для функционала W_3 . Здесь через $\mu_A^{(k)}$, $\mu_B^{(k)}$ обозначены ненормированные k -е моменты множеств A и B :

$$\mu_A^{(k)} = \int_A x^k p(x) dx, \quad \mu_B^{(k)} = \int_B x^k p(x) dx,$$

где $x^k \triangleq (\|x\|^2)^{k/2}$ при четном k и $x^k \triangleq (\|x\|^2)^{(k-1)/2} x$ при нечетном k .

9. Убедиться, что функционал W_1 является частным видом функционала (10.1.3) при $l = 2$ и $R_1(x) = R_2(x) = \|x\|^2$.

10. Используя результаты решения задачи 8, сформулируйте рекуррентные процедуры для построения экстремальных множеств A и B .

11. Дать геометрическую интерпретацию построений, осуществляемых формулами (10.4.3), (10.4.4). Убедиться, что при каждом k множества $X_{i,k}$, $i = 1, \dots, l$, образуют разбиение множества X .

12. Показать, что для множеств $X_{i,k}$, определяемых формулами (10.4.3), (10.4.4), (10.4.1), справедливо равенство $X_{i,k} = X_{i,k-1}$, если ни для какого j не выполнено равенство $n_{ij} = k$ (n_{ij} — номер плоскости $L_{ij}(x) = 0$, отвечающей точкам $\tau^{(i)}$, $\tau^{(j)}$, см. § 10.4).

13. Доказать соотношения (10.4.7).

14. Доказать, что в условиях теоремы 10.3.1 для последовательности наборов $\tau_n = \{\tau_n^{(1)}, \dots, \tau_n^{(l)}\}$ справедливо неравенство

$$\min_{i \neq j} \|\tau_n^{(i)} - \tau_n^{(j)}\| > 0 \quad (\text{п. н.}).$$

15. Построить пример, показывающий, что в условиях теоремы 10.3.1 при $l > 2$ может иметь место соотношение $\inf_n \min_k p_n^{(k)} = 0$ (т. е. алгоритм (10.3.2) приводит к разбиению, некоторые из подмножеств которого нулевой вероятности).

16. Доказать теорему 10.5.1.

СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Метод КСА с успехом может быть применен для решения ряда задач адаптивного управления. Оказывается, некоторые задачи адаптивной стабилизации и слежения естественным образом могут быть переформулированы как задачи нахождения решения системы неравенств, порождаемых целевым условием и выбранным способом управления. Для отыскания нужного решения можно воспользоваться рекуррентными процедурами с поощрением.

Цель данного раздела — проиллюстрировать подобный подход на некоторых простейших задачах адаптивного управления.

В отличие от основного текста работы, где делались попытки довести каждую задачу до конца (по крайней мере в теоретическом плане), здесь будет намечен лишь подход к решению задач. Будет, собственно, продемонстрировано, как можно прийти к задаче о решении выпуклых (часто линейных) неравенств, и показано, что полученные неравенства разрешимы с «запасом». Для найденных неравенств по стандартной схеме гл. 2 могут быть выписаны алгоритмы настройки регуляторов, но для доказательства их конечной сходимости требуется равномерная ограниченность во времени фазовых переменных объекта управления и регулятора. Окончательные формулировки решения задачи получаются, если наряду с другими требованиями удастся обеспечить и это условие. В некоторых случаях удовлетворить условию ограниченности фазовых переменных удастся сравнительно легко (например, введением ограничений на фазовые переменные), но чаще всего это приводит к необходимости значительного изменения самой постановки задачи. Можно сказать, что здесь-то, в некотором смысле, и начинается «настоящая» задача о синтезе адаптивного регулятора. Эта фаза задачи адаптивного управления здесь совершенно не рассматривается, так как доведение задачи «до конца» далеко увела бы за рамки простой «иллюстрации» предлагаемого подхода.

§ Д.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ АДАПТИВНОМ УПРАВЛЕНИИ

При разработке системы автоматического управления (САУ) конструктор часто сталкивается с проблемой неопределенности условий функционирования *управляющей системы* (УС). Природа этой неопределенности разнообразна: технологические допуски, возможные неисправности, изменение характеристик *объекта управления* (ОУ) в результате износа и старения, а также изменения условий, внешних по отношению к проектируемой системе, но оказывающих на нее частично или полностью неконтролируемые воздействия. Если степень неопределенности велика, то для построения УС могут оказаться недостаточными известные методы теории автоматического управления, а использование УС, основанных на априорных расчетах по «средним» условиям функционирования САУ, часто не обеспечивает выполнения целей управления (ЦУ).

Для решения задачи управления в таких условиях естественно обратиться к *адаптивным управляющим системам* (Ад УС), восполняющих недостающую для нужного управления информацию в процессе функционирования системы управления.

Понятия «*адаптивная система*», «*адаптивная управляющая система*» в настоящее время не имеют единого толкования. Для наших целей удобно принять определение, предложенное В. А. Якубовичем. Приведем частный вариант этого определения в применении к непрерывным динамическим объектам управления.

Пусть объект управления (ОУ) описывается уравнением

$$\Phi(t, y(t), \dots, y^{(m_1)}(t), u(t), \dots, u^{(m_2)}(t), \xi) = 0, \quad (Д.1.1)$$

где Φ — известная вещественная функция своих аргументов; t — вещественная переменная, играющая роль времени, $t \in [t_0, \infty)$; $y(t)$ — вектор-функция *выходов* ОУ; $u(t)$ — вектор-функция *управлений*; $y^{(k)}(t)$, $u^{(k)}(t)$ — k -е производные по t соответствующих векторных функций; m_1 , m_2 — натуральные числа; ξ — параметр, относительно которого известно лишь, что он принадлежит множеству Ξ . Таким образом, множество Ξ характеризует собой степень априорной неопределенности об ОУ и условиях его функционирования. Функция Φ в уравнении (Д.1.1) предполагается такой, что при задании достаточно гладкой вектор-функции $u(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, и фиксации произвольного параметра $\xi \in \Xi$ уравнение (Д.1.1) однозначно определяет выходной процесс $y(t, \xi)$. Это позволяет говорить о классе ОУ, определяемом множеством Ξ и параметризованным параметром ξ . Элементы множества Ξ называются *варьируемыми параметрами* (ВП).

Выбор тех или иных управлений определяется *целью управления* (ЦУ), представляющей собою требование обеспе-

чить выполнение некоторых ограничений на выходной процесс. Характер этих ограничений зависит от конкретной задачи управления. Формализуем ЦУ в виде требования обеспечить выполнение предельного неравенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{s > t} \varphi(s, \sigma(s)) > 0, \quad (\text{Д.1.2})$$

где $\sigma(t)$ — набор известных к моменту времени t величин, связанных с ОУ и УС*; $\varphi(t, \sigma(t))$ — известная вещественная функция своих аргументов.**)

Будем предполагать, что для каждого ОУ из класса Ξ управление $u(t)$, обеспечивающее выполнение ЦУ, существует и может быть определено из уравнения

$$U(t, \sigma(t), u(t), \dots, u^{(m_s)}(t), \rho(\xi)) = 0, \quad (\text{Д.1.3})$$

где $\rho(\xi)$ — отображение Ξ в конечномерное пространство R и U — известная функция своих аргументов. Предположение, что U — известная функция своих аргументов в ряде задач довольно ограничительно, ее конструирование само по себе может оказаться самостоятельной проблемой. Но эта проблема лежит вне интересующей нас в данный момент задачи; мы предполагаем, что коль скоро модель ОУ определена (параметр ξ известен), то возможно осуществить синтез управления, обеспечивающего ЦУ (Д.1.2), в форме (Д.1.3). Во многих практических задачах синтез нужных управлений удается осуществить в виде закона, зависящего не от всех характеристик ОУ, а лишь от некоторого числа их комбинаций, что и объясняет появление $\rho(\xi)$ в (Д.1.3). В некоторых случаях может, разумеется, оказаться, что $\rho(\xi)$ — тождественное преобразование (и тогда $\Xi \subseteq R$).

Воспользоваться управлением (Д.1.3), однако, нельзя, поскольку оно зависит от неизвестного вектора $\rho(\xi)$. Поэтому естественно искать нужное управление из уравнения

$$U(t, \sigma(t), u(t), \dots, u^{(m_s)}(t), \tau(t)) = 0, \quad (\text{Д.1.4})$$

где $\tau(t)$ — вектор-функция, называемая тактикой управления (ТУ), $\tau(t) \in R$. Соотношение (Д.1.4) должно быть дополнено алгоритмом изменения ТУ, который запишем в виде

$$\tau(t+0) = Q[\tau(t-0) + \theta(t)\psi(t-0, \sigma(t-0), \tau(t-0))], \quad (\text{Д.1.5})$$

$t \geq t_0$,

где обозначено $f(t \pm 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t \pm \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$;

*) Набор $\sigma(t)$ может содержать выход $y(t)$ и вход $u(t)$ ОУ вместе с их производными до определенного порядка и другие текущие, а также прошлые характеристики ОУ и УС.

**) Обычно смысл ЦУ состоит в требовании, чтобы все или часть фазовых переменных ОУ и УС находились в заданных областях, изменялись во времени по предписанному закону и т. п.

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(t, \sigma(t)) \leq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi(t, \sigma(t)) > 0; \end{cases} \quad (\text{Д.1.6})$$

$\psi(t, \sigma, \tau)$ — функция со значениями в R ; $Q(\tau)$ — отображение R в его подмножество T и $\tau(t_0)$ — произвольный элемент из T . Предполагается, что для каждой точки $\tau \in T$ из уравнения (Д.1.4) может быть определена вектор-функция $u(t)$ (не обязательно обеспечивающая ЦУ (Д.1.2)) и $\rho(\Xi) \subseteq T$. Можно писать более сложные процедуры изменения ТУ, но для наших целей достаточно алгоритма (Д.1.6), реализующего кусочно-постоянную ТУ со значениями в T . Функции $Q(\tau)$ и $\psi(t, \sigma, \tau)$ подлежат определению с тем, чтобы обеспечить ЦУ (Д.1.2). Разумеется, эти функции не должны зависеть от ВП ξ , и, кроме того, коррекции вектора τ должны быть таковы, чтобы из условия $\varphi(t-0, \sigma(t-0)) \leq 0$ следовало бы $\varphi(t+0, \sigma(t+0)) > 0$. Последнее требование гарантирует разделенность моментов коррекции вектора τ положительным промежутком времени. В противном случае соотношение (1.5) может оказаться некорректным: в момент $t+0$ функция $\sigma(t)$ может оказаться неопределенной. Для избежания этой трудности следовало бы ввести в правую часть малое запаздывание ε , т. е. вычислять все входящие туда функции в момент времени $t-\varepsilon$, а затем изучить, как влияют на конструируемые управления малые запаздывания. Мы этим, однако, заниматься не будем, так как в рассматриваемых далее примерах указанных затруднений не возникает.

Соотношения (Д.1.4) — (Д.1.6) полностью задают УС, предназначенную для управления любым ОУ из класса Ξ .

Определение Д.1.1. УС (Д.1.4) — (Д.1.6) называется *адаптивной в классе Ξ ОУ по отношению к ЦУ (Д.1.2)*, если (Д.1.2) выполнено для каждого $\xi \in \Xi$.

Наименьшее время $t(\xi)$, начиная с которого во все дальнейшие моменты времени выполнено неравенство $\inf_{s > t} \varphi(s, \sigma(s)) > 0$, называется *временем адаптации (настройки, обучения)* адаптивной управляющей системы (АДУС). Процедура (Д.1.5) — (Д.1.6) называется *алгоритмом адаптации*.

Если АДУС предназначена для поддержания некоторых характеристик ОУ на заданном уровне (в заданных пределах), то будем говорить об адаптивном регуляторе (АР). Итак, АР состоит из собственно *регулятора* и устройства, называемого *адаптором* и предназначенного для настройки регулятора. Блок-схема АР изображена на рис. Д.1.1, где приняты следующие сокращения: ОУ — объект управления, описываемый уравнением (Д.1.1), Р — регулятор, описываемый уравнением (Д.1.5), БНР — блок настройки регулятора (адаптор), описываемый соотношениями (Д.1.5) — (Д.1.6).

Системой адаптивного управления (САДУ), или просто адаптивной системой (АС), будем называть систему, объединяющую ОУ и АдУС.

Не всякая АдУС является практически приемлемой. Кроме требования ее практической реализуемости нужно еще, чтобы время $t(\xi)$ адаптации было бы не очень велико. Эти требования могут формализоваться по-разному в зависимости от особенностей конкретной задачи.

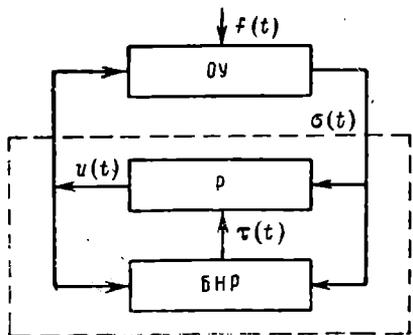


Рис. Д.1.1. Блок-схема АР

Подчеркнем, что после окончания процесса адаптации АдУС не найдет значения параметра $\rho(\xi)$, а лишь получит некоторую его оценку $\tau(t(\xi))$, гарантирующую выполнение ЦУ, но которая, как показывают результаты моделирования конкретных систем, может значительно отличаться от $\rho(\xi)$.

Построение АдУС в виде (Д.1.4) — (Д.1.6), т. е. конструирование $\psi(t, \sigma, \tau)$ и $Q(\tau)$, назовем *синтезом АдУС*.

В практических задачах нужно еще уметь так сформулировать закон управления (Д.1.4) и ЦУ (Д.1.2), чтобы синтез АдУС был возможен.

В заключение кратко обсудим содержательный смысл понятия адаптации. Адаптор, функционирующий согласно алгоритму (Д.1.5), естественно рассматривать как высший по отношению к регулятору (Д.1.4) уровень управления. С интуитивной точки зрения адаптация должна проявляться в том, чтобы в «стационарных», неизменяющихся условиях функционирования системы высший уровень не «работал» все время, а с течением времени «отключался» и совершался бы переход на «автоматическое» управление. Лишь значительное изменение условий функционирования вызывает необходимость «включения» высшего управления для выработки им новой тактики управления. Именно в соответствии с подобным представлением об адаптации согласуется данное выше формальное определение АдУС.

В ряде публикаций предлагается изменение ТУ описывать уравнениями, которые не обязательно фиксируют ТУ $\tau(t)$ в «стационарных» условиях после некоторого конечного периода адаптации (разумеется, уравнения регулятора и адаптора по-прежнему не должны зависеть от ВП ξ), т. е. алгоритмы адаптации не являются КСА. При таком расширительном толковании АдУС в значительной степени стирается грань между САДУ и обычной САУ, поскольку в данном случае «высший» уровень «работает» все время и в этом смысле он ничем не отличается от уровня «автоматического» управления. Время адаптации здесь естественно трактовать как переходный процесс в САДУ. Сходство между САДУ и САУ становится еще более полным, если параметры адаптора рассчитываются и фиксируются априорно. Разумеется, возможен и в этом случае «истинно адаптивный» подход, когда параметры адаптора настраиваются (за конечное время!) в процессе функционирования системы (третий уровень управления) и т. д.

Число уровней адаптации можно увеличивать на этом пути неограниченно. Свойства подобных иерархических систем изучены слабо. В частности,

трудно придать точный смысл следующим, на наш взгляд, интересным вопросам: можно ли за счет многоуровневости управлений добиваться упрощения системы управления в целом и в каких случаях это целесообразно? Как следует распределять цели управления между различными уровнями управления? Всякая ли «разумная» задача управления в условиях априорной неопределенности допускает адаптивное управление при некотором конечном наборе уровней управления?

Отметим очевидную аналогию поставленных вопросов с проблемами, возникающими при рассмотрении многослойных перцептронов с настраиваемыми между слоями связями (см. § 5.6).

§ Д.2. ЗАДАЧА ОБ АДАПТИВНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Предположим, что ОУ описывается уравнением

$$\sum_{k=0}^{m_1} B_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m_2} C_k u^{(k)}(t) + v(t), \quad (\text{Д.2.1})$$

где $y(t)$ — m -компонентная векторная функция выходов ОУ; $u(t)$ — l -компонентная векторная функция управлений; $v(t)$ — m -компонентная векторная функция внешних воздействий. Всюду в дальнейшем предполагается равномерная по времени t ограниченность $v(t)$:

$$\sup_t \|v(t)\| < \infty. \quad (\text{Д.2.2})$$

Прямоугольные $m \times l$ матрицы C_k (m — число строк, l — число столбцов) и квадратные $m \times m$ матрицы B_k предполагаются не зависящими от времени t . ОУ вида (Д.2.1) является частным случаем ОУ вида (Д.1.1).

Будем всюду в этом параграфе предполагать, что матрица B_m неособая и известна. Это позволяет без ограничения общности положить $B_m = I_m$, I_m — единичная матрица порядка m . Предполагается также известной матрица C_{m_2} , причем считается, что матрица $C_{m_2} C_{m_2}^*$ неособая.*) Остальные коэффициенты ОУ предполагаются неизвестными и их совокупность составляет вектор ВП ξ .**) Предполагается также, что реализации векторной функции $v(t)$ не измеряются.

Задача о стабилизации состоит в построении таких управлений $u(t)$, при которых выход ОУ удовлетворял бы условию

$$\|y(t)\| < \epsilon_0, \quad (\text{Д.2.3})$$

где ϵ_0 — задаваемая наперед положительная постоянная.

В зависимости от способа построения регулятора можно прийти к различным моделям адаптивного управления.

*) Последнее возможно лишь, если $l \geq m$, т. е. размерность вектора управлений u не меньше размерности вектора выходов y .

**) В качестве множества Ξ будем, простоты ради, рассматривать множество всевозможных коэффициентов в управлении (Д.2.1).

Первый подход к задаче синтеза АР. ЦУ в виде (Д.2.3) желательно изменить на некоторое другое, которое, во-первых, обеспечивало бы и выполнение неравенства (Д.2.3) при достаточно больших t , и, во-вторых, допускало возможность синтеза АР. С этой целью зададимся некоторыми квадратными (порядка $m \times m$) матрицами G_k , $k=0, 1, \dots, m_1$, и поставим ЦУ вида

$$\left\| \sum_{k=0}^{m_1} G_k y^{(k)}(t) \right\| < \varepsilon_1, \quad (\text{Д.2.4})$$

где ε_1 — наперед заданное достаточно малое положительное число. Ясно, что если все корни уравнения

$$\det \left(\sum_{k=0}^{m_1} G_k \lambda^k \right) = 0 \quad (\text{Д.2.5})$$

имеют отрицательные вещественные части, то из выполнения ЦУ вида (Д.2.4) следует (при достаточно малом ε_1 и достаточно больших t) выполнение ЦУ вида (Д.2.3). В этом смысле ЦУ (Д.2.4) является достаточной для ЦУ (Д.2.3). Постараемся теперь определить управление $u(t)$ таким образом, чтобы при достаточно больших t выполнялось неравенство (Д.2.4). Эта задача уже укладывается в некоторую общую схему, позволяющую осуществлять синтез АР.

Будем искать уравнения $u(t)$ как решение дифференциального уравнения

$$u^{(m_2)}(t) = \sum_{k=0}^{m_1-1} E_k y^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{m_1-1} D_k u^{(k)}(t). \quad (\text{Д.2.6})$$

(уравнение АР). Задача состоит в отыскании прямоугольных порядка $m \times l$ и квадратных порядка $l \times l$ матриц E_k , D_k таких, что выполнялось бы неравенство (Д.2.4). Предположим, что полином (Д.2.5) гурвицев (все корни лежат строго в левой полуплоскости), $G_{m_1} = I_m$ и что имеется возможность в каждый момент времени t наблюдать вектор-функции $y(t), \dots, y^{(m_1)}(t)$ (и, разумеется, $u(t), \dots, u^{(m_2)}(t)$), но не $v(t)$. Составной вектор $\sigma^*(t) = (y^*(t), \dots, y^{(m_1)*}(t), u^*(t), \dots, u^{(m_2)*}(t))$ будет набором наблюдаемых величин. Неравенство (Д.2.4) может быть тогда переписано в виде

$$\varphi_1(\sigma(t)) \triangleq \varepsilon_1 - \left\| \sum_{k=0}^{m_1} G_k y^{(k)}(t) \right\| > 0, \quad (\text{Д.2.7})$$

т. е. имеет вид ЦУ (Д.1.2). Вводя обозначения

$$\tau = \{E_0, \dots, E_{m_1-1}, -D_0, \dots, -D_{m_2-1}\},$$

$$\sigma^*(t) = (y^*(t), \dots, y^{(m_1-1)*}(t), u^*(t), \dots, u^{(m_2-1)*}(t)). \quad (\text{Д.2.8})$$

$$r_1(t) = \sum_{k=0}^{m_1-1} (C_k - B_k) y^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{m_2-1} C_k u^{(k)}(t),$$

запишем ОУ (Д.2.1) в виде

$$\sum_{k=0}^{n_1} G_k y^{(k)}(t) = r_1(t) + C_{m_2} \tau \sigma(t) + v(t), \quad (\text{Д.2.9})$$

откуда следует, что неравенства (Д.2.7) могут быть переписаны в виде выпуклых по τ неравенств

$$\varphi_1(t, \tau) \triangleq \varepsilon_1 - \|r_1(t) + C_{m_2} \tau \hat{\sigma}(t) + v(t)\|. \quad (\text{Д.2.10})$$

Подчеркнем, что хотя функция $\varphi_1(t, \tau)$ зависит от ВП, ее значения в каждый момент времени известны, поскольку в силу соотношения (Д.2.9) справедливо равенство

$$\hat{\varphi}_1(t, \tau) = \varphi_1(\sigma(t)). \quad (\text{Д.2.11})$$

Если в качестве матрицы ТУ τ выбрать матрицу

$$\tau_* = \{C_{m_2}^{-1}(B_0 - G_0), \dots, C_{m_2}^{-1}(B_{m_1-1} - G_{m_1-1}), \\ C_{m_2}^{-1}C_0, \dots, C_{m_2}^{-1}C_{m_1-1}\} \quad (\text{Д.2.12})$$

($C_{m_2}^{-1}$ — правая обратная матрицы C_{m_2} , существующая в силу предположения о неособенности матрицы C_{m_2}), то неравенства (Д.2.10) примут вид

$$\varphi_1(t, \tau_*) = \varepsilon_1 - \|v(t)\| > 0,$$

откуда при выполнении условия

$$\sup_t \|v(t)\| < \varepsilon_1/2 \quad (\text{Д.2.13})$$

следует их разрешимость независимо от выбора начальных данных уравнений (Д.2.1) и (Д.2.6).

Воспользуемся формулами (Д.2.12) для построения управлений, разумеется, нельзя, поскольку τ_* зависит от ВП ξ (неизвестных коэффициентов ОУ). Поэтому приходится прибегать к итеративным процедурам (алгоритмам адаптации) для отыскания нужного значения параметра τ . Об алгоритмах адаптации будет сказано несколько позднее.

Второй подход к задаче синтеза АР. Пусть G_k , $k=0, 1, \dots, m_1-1$ — прямоугольные матрицы порядка $m \times r$ (r — число строк, m — число столбцов, $r \leq m$). Рассмотрим вектор-функцию

$$s(t) = \sum_{k=0}^{m_1-1} G_k y^{(k)}(t). \quad (\text{Д.2.14})$$

Будем предполагать, что матрицы G_k известны, G_{m_1-1} — неособая и что из условия $s(t) \equiv 0$ следует предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0. \quad (\text{Д.2.15})$$

Тогда исходная задача о стабилизации ОУ (Д.2.1) может быть переформулирована следующим образом: построить управления $u(t)$ так, чтобы при достаточно больших t и достаточно малом ε_2 , $\varepsilon_2 > 0$, справедливо было неравенство

$$\|s(t)\| < \varepsilon_2. \quad (\text{Д.2.16})$$

Управление будем вновь искать в виде дифференциального уравнения (Д.2.6). Коэффициенты этого уравнения постараемся выбрать так, чтобы было выполнено неравенство

$$\varphi_2(\sigma(t)) \triangleq -2^{-1} \frac{d}{dt} \|s(t)\|^2 - p \|s(t)\|^2 > 0 \quad (\text{Д.2.17})$$

для некоторого положительного p . При таком выборе коэффициентов уравнения (Д.2.6) при достаточно больших t будет справедлива, очевидно, оценка (Д.2.16), а с ней и (Д.2.3). С помощью обозначений (Д.2.8) и

$$r_2(t) = s^*(t) \left[- \sum_{k=0}^{m_1-1} G_{m_1-1} C_k u^{(k)}(t) - G_{m_1-1} v(t) + \sum_{k=0}^{m_1-1} (G_{m_1-1} B_k + p G_k - G_{k-1}) y^{(k)}(t) \right], \quad G_{-1} = 0,$$

нетрудно в силу уравнения (Д.2.1) (напомним, $B_{m_1} = I_m$) получить соотношение

$$2^{-1} \frac{d}{dt} \|s(t)\|^2 + p \|s(t)\|^2 = -r_2(t) + s^*(t) G_{m_1-1} C_{m_2} \hat{\sigma}(t), \quad (\text{Д.2.18})$$

с помощью которого ЦУ (Д.2.17) можно переписать в виде неравенств

$$\varphi_{II}(t, \tau) \triangleq r_2(t) - s^*(t) G_{m_1-1} C_{m_2} \hat{\sigma}(t) > 0, \quad (\text{Д.2.19})$$

линейных по τ . Как и в предыдущем случае, значения целевой функции $\varphi_{II}(t, \tau)$ известны при каждом t , поскольку

$$\varphi_2(\sigma(t)) = \varphi_{II}(t, \tau).$$

Система неравенств (Д.2.19) имеет решение. Действительно, если в качестве матрицы ТУ τ выбрать матрицу

$$\tau_* = \{E_{0*}, \dots, E_{m_1-1*}, -D_{0*}, \dots, -D_{m_2-1*}\},$$

где

$$D_{k*} = C_{m_2}^{-1} C_k, \quad k = 0, 1, \dots, m_2 - 1, \\ E_{k*} = C_{m_2}^{-1} G_{m_1-1}^{-1} [-G_{m_1-1} B_k + G_{k-1} + (q + p) C_k], \\ k = 0, 1, \dots, m_1 - 1; \quad G_{-1} = 0,$$

и q — некоторое число, то, как нетрудно проверить, будет выполняться соотношение

$$\varphi_{II}(t, \tau_*) = -s^*(t) G_{m_1-1} v(t) + q \|s(t)\|^2. \quad (\text{Д.2.20})$$

Если q удовлетворяет оценке $q > C \varepsilon_2^{-1} \|G_{m_1-1}\|$ ($C = \sup_t \|v(t)\|$), то в области, где $\|s(t)\| \geq \varepsilon_2$, правая часть соотношения (Д.2.20) будет положительной независимо от выбора начальных данных в уравнениях (Д.2.1) и (Д.2.6).

Третий подход к синтезу АР. Вновь рассмотрим вектор-функцию $s(t)$, определяемую формулой (Д.2.14), и будем строить управления $u(t)$, обеспечивающие при больших t вы-

полнение ЦУ (Д.2.16). Управления $u(t)$ будем вновь искать как решения дифференциального уравнения (Д.2.6), но теперь матрицы E_k и D_k будут зависеть от входов и выходов системы (Д.2.1). Уравнение (Д.2.6) становится нелинейным, но имеет специальную структуру. Перейдем к описанию этой структуры. Обозначим через R матрицу $R = G_{m_1-1}C_{m_2}$. В качестве матриц E_k , D_k будем выбирать матрицы, матричные элементы $[E_k]_{ij}$, $[D_k]_{ij}$ которых имеют вид

$$\begin{aligned} [E_k]_{ij} &= - [P_k]_{ij} \operatorname{sign} [y_i^{(k)}(R^*s(t))]_j, \\ [D_k]_{ij} &= - [Q_k]_{ij} \operatorname{sign} [u_i^{(k)}(R^*s(t))]_j, \end{aligned} \quad (\text{Д.2.21})$$

где $[P_k]_{ij}$, $[Q_k]_{ij}$ — положительные числа; $y_i^{(k)}$, $u_i^{(k)}$ — i -е компоненты вектор-функций $y^{(k)}$, $u^{(k)}$; $(R^*s(t))_j$ — j -тая компонента вектор-функции $R^*s(t)$ и $\operatorname{sign} a$ — знак числовой величины a ($\operatorname{sign} a = +1$ при $a \geq 0$, $\operatorname{sign} a = -1$ при $a < 0$). Обозначим через P_k , Q_k матрицы с матричными элементами $[P_k]_{ij}$, $[Q_k]_{ij}$. Для произвольной вектор-функции $\psi(t)$ через $|\psi(t)|$ будем обозначать вектор-функцию той же размерности, в которой каждая компонента $\psi_i(t)$ вектор-функции $\psi(t)$ заменена на ее абсолютную величину $|\psi_i(t)|$. Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tau &= \{P_0, P_1, \dots, P_{m_1-1}, Q_0, Q_1, \dots, Q_{m_2-1}\}, \\ \psi(t) &= s^*(t)R, \\ r_3(t) &= s^*(t) \left[\sum_{k=0}^{m_1-1} (G_{k-1} + pG_k - G_{m_1-1}B_k) y^{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{m_2-1} G_{m_1-1}C_k u^{(k)} + G_{m_1-1}v(t) \right], \end{aligned} \quad (\text{Д.2.22})$$

с помощью которых, а также (Д.2.8), перепишем ЦУ (Д.2.17) в виде неравенств

$$\varphi_{III}(t, \tau) \triangleq -r_3(t) + |\psi(t)|^* \tau \hat{\sigma}(t) > 0, \quad (\text{Д.2.23})$$

линейных по матричному параметру τ . Как и прежде, выполнение этого неравенства гарантирует убывание к нулю величины $\|s(t)\|$. В неравенствах (Д.2.23) вектор-функция $|\psi(t)|$, составленная из модулей компонент вектор-функции $\psi(t)$, определяется через наблюдаемые величины $\sigma(t)$. Итак, вновь приходим к неравенствам, допускающим применение рекуррентных процедур для нахождения их решения.

Отметим, что неравенство (Д.2.23) всегда разрешимо, т. е. каково бы ни было значение набора $\sigma(t)$ фазовых переменных системы (Д.2.1), (Д.2.6) в момент времени t , существует матрица τ_* такая, что неравенства (Д.2.23) будут справедливы для всех t . Действительно, достаточно заметить, что этого можно добиться выбором достаточно больших элементов матриц P_k и Q_k , если предполагать невырожденность матрицы RR^* и справедливость неравенства $\|s(t)\| \geq \varepsilon_2$. Сказанное остается

справедливым и для ОУ (Д.2.1), коэффициенты которого — произвольные функции времени или даже входов и выходов ОУ (но $B_{m_1} = I_m$). Нужно лишь потребовать, чтобы эти коэффициенты были равномерно ограничены при всех изменениях их аргументов.

Алгоритмы адаптации. В каждом из рассмотренных выше подходов к задаче синтеза АР приходим к задаче о нахождении матричного решения τ неравенств

$$\varphi(t, \tau) > 0, \quad (\text{Д.2.24})$$

причем каждый раз отмечалось, что для функции $\varphi(t, \tau)$ существует решение τ_* такое, что при всех t справедливо «усиленное» неравенство

$$\varphi(t, \tau_*) \geq \varepsilon_* \quad (\text{Д.2.25})$$

для некоторого $\varepsilon_* > 0$. Поскольку значения $\varphi(t, \tau)$ в каждый момент времени известны, а сама функция $\varphi(t, \tau)$ выпукла по τ , то для нахождения решения неравенств (Д.2.24) естественно воспользоваться матричным аналогом алгоритмов основной теоремы 2.1.1. Пусть $\tau(t_0)$ — произвольная матрица соответствующей размерности. Рассмотрим рекуррентную процедуру, определяющую матричную функцию $\tau(t)$:

$$\tau(t+0) = \tau(t-0) + \gamma(t-0)\theta(t)\nabla_{\tau}\varphi(t-0, \tau-0), \quad (\text{Д.2.26})$$

$$\text{где, как обычно, } \theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(t, \tau(t)) \leq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi(t, \tau(t)) > 0, \end{cases}$$

$\gamma(t)$ — некоторые положительные функции и $\nabla_{\tau}\varphi(t, \tau)$ — градиент функции φ по матричному аргументу τ . В рассмотренных выше случаях имеем

$$\nabla_{\tau}\varphi_I(t, \tau) = -C_{m_1}^* \left\| \sum_{k=0}^{m_1} G_k y^{(k)}(t) \right\|^{-1} \left(\sum_{k=0}^{m_1} G_k y^{(k)}(t) \right)^* \hat{\sigma}^*(t),$$

$$\nabla_{\tau}\varphi_{II}(t, \tau) = -(s^*(t) G_{m_1-1} C_{m_2})^* \hat{\sigma}^*(t),$$

$$\nabla_{\tau}\varphi_{III}(t, \tau) = |\varphi(t)|^* |\hat{\sigma}(t)|^*.$$

Из этих формул следует, что градиенты по τ от целевых функций в каждом случае могут быть вычислены, если в каждый момент времени t наблюдается вектор-функция $\sigma(t)$ и известна матрица C_m . Следуя аналогии с теоремой 2.1.1, функции $\gamma(t)$ можно вычислить по формуле

$$\gamma(t) = \kappa^{-1}(t) - \beta(t) \|\nabla_{\tau}\varphi(t, \tau(t))\|^{-2} \varphi(t, \tau(t)), \quad (\text{Д.2.27})$$

где функция $\kappa(t)$ определяется рекуррентной процедурой $\kappa(t_0) = 1$, $\kappa(t+0) = \kappa(t-0) + \theta(t)$; $\beta(t)$ — произвольная функция со значениями в промежутке $[0, 2]$; $\|\nabla_{\tau}\varphi(t, \tau)\|^2 = \text{Sp}[\nabla_{\tau}\varphi(t, \tau)^* \nabla_{\tau}\varphi(t, \tau)]$ (Sp означает сумму диагональных элементов, или след, соответствующий квадратной матрице).

Как и в теореме 2.1.1, нетрудно убедиться, что при любых t и s , $t > s$, справедливо неравенство

$$\|\tau_* - \tau(s)\| \geq \|\tau_* - \tau(t)\|, \quad (\text{Д. 2.28})$$

где $\|\tau\|^2 = \text{Sp } \tau^* \tau$. Из (Д.2.28) следует, что с течением времени последовательность $\tau(t)$ приближается к искомому матричному параметру τ_* . Если же окажется, что

$$\sup_t \|\nabla_{\tau} \varphi(t, \tau(t))\| < \infty, \quad (\text{Д.2.29})$$

то, как и в теореме 2.1.1, нетрудно показать, что алгоритм (Д.2.26)–(Д.2.27) является КСА в том смысле, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0, \quad (\text{Д.2.30})$$

т. е. в процессе обучения будет лишь конечное число коррекций коэффициентов регулятора $\theta(t)$ — двухзначная функция, а потому из (Д.2.30) следует, что $\theta(t) \equiv 0$ при достаточно больших t . Условие (Д.2.29) во всех рассмотренных выше случаях будет заведомо выполнено, если

$$\sup_t \|\hat{c}(t)\| < \infty. \quad (\text{Д.2.31})$$

Итак, показано, как можно осуществить синтез АР, если в уравнении (Д.2.1) коэффициент B_m , — единичная матрица, коэффициент C_m , известен и выполнено неравенство (Д.2.31).

К сожалению, именно последнее требование не является эффективным и, более того, в практических задачах именно оно обычно нарушается. Существуют различные способы обеспечить выполнение условия (Д.2.31) (например, вводя ограничения на фазовые переменные), но это приводит к необходимости видоизменять исходную постановку задачи. Приведенные выше соображения при этом являются только наводящими.

Сравнительно просто указанные подходы реализуются в случае, если ОУ обладает свойством минимальной фазовости (точнее, когда C_k — квадратные матрицы и корни уравнения $\det(\sum_{k=0}^{m_1} C_k \lambda^k) = 0$ расположены в левой полуплоскости). Для ОУ, не обладающего этим свойством, синтез АР возможен, но настройка происходит медленно.

Рассмотрим поэтому некоторые другие подходы к синтезу АР, в которых, как нам кажется, время настройки не будет чрезмерно большим даже для неминимально фазовых ОУ.

§ Д.3. АЛГОРИТМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

КСА можно использовать и для функциональной идентификации ОУ вида (Д.2.1). Под функциональной идентификацией понимается построение модели, которая под действием тех же входов, что и входы на ОУ, «вырабатывает» те же или близкие

выходы, что и ОУ. Более точно, рассмотрим линейный объект

$$\sum_{k=0}^{m_1-1} \hat{B}_k \hat{y}^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m_2} \hat{C}_k u^{(k)}(t), \quad (\text{Д.3.1})$$

который назовем моделью ОУ (Д.2.1). Будем говорить, что модель (Д.3.1) производит функциональную идентификацию (ФИ) порядка r ОУ (Д.2.1), если при всех (либо при достаточно больших) t справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^r \|y^{(k)}(t) - \hat{y}^{(k)}(t)\| < \delta, \quad (\text{Д.3.2})$$

где r — некоторое натуральное число, $r \leq m_1$, и δ — заданное достаточно малое положительное число — параметр ФИ. При этом требуется еще уточнить, при каких управлениях требуется обеспечить неравенство (Д.3.2). Предполагая, что

$\hat{B}_{m_1} = B_{m_1} = I_m$ и вводя обозначения

$$\begin{aligned} \tau &= \{\hat{B}_0, \dots, \hat{B}_{m_1-1}, -\hat{C}_0, \dots, -\hat{C}_{m_2}\}, \\ \tau_* &= \{B_0, \dots, B_{m_1-1}, -C_0, \dots, -C_{m_2}\}, \end{aligned} \quad (\text{Д.3.3})$$

$$\hat{\sigma}^*(t) = (y^*(t), \dots, y^{(m_1-1)*}(t), u^*(t), \dots, u^{(m_2)*}(t)),$$

перепишем уравнение (Д.2.1) в виде

$$y^{(m_1)}(t) + \tau \hat{\sigma}(t) = (\tau_* - \tau) \hat{\sigma}(t) + v(t). \quad (\text{Д.3.4})$$

Если вектор-функция $v(t)$ удовлетворяет при всех t неравенству (Д.2.13), $\varepsilon_1 = \varepsilon$, то для определения матрицы τ следует решать неравенства

$$\|y^{(m_1)}(t) + \tau \hat{\sigma}(t)\| < \varepsilon, \quad (\text{Д.3.5})$$

т. е. опять приходим к системе выпуклых неравенств. Для их решения пригоден, например, аналог алгоритма «Полоска» (см. § 2.2), в котором матрица τ находится из условия

$$y^{(m_1)}(t) + \tau \hat{\sigma}(t) = 0.$$

Таким образом, приходим к следующему алгоритму идентификации:

$$\tau(t+0) = \tau(t-0) + \theta_\varepsilon(t) \|\hat{\sigma}(t-0)\|^{-2} y^{(m_1)}(t-0) \hat{\sigma}^*(t-0), \quad (\text{Д.3.6})$$

где, как обычно,

$$\theta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|y^{(m_1)}(t-0) + \tau(t) \hat{\sigma}(t)\| \geq \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \|y^{(m_1)}(t-0) + \tau(t) \hat{\sigma}(t)\| < \varepsilon. \end{cases}$$

Можно описать и другие алгоритмы, связанные с градиентом функций

$$\varphi(t, \tau) = y^{(m_1)}(t) + \tau \hat{\sigma}(t).$$

Если удалось найти матрицу τ , для которой неравенство (Д.3.5) выполнено при достаточно малом ε для всех достаточно больших t , то обычно нетрудно установить неравенство (Д.3.2)

для $\delta = \delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ и $r = m_1$, т. е. можно произвести ФИ порядка m_1 . Выше уже говорилось, что при выполнении условия (Д.3.4) система неравенств (Д.3.5) разрешима с «запасом». Для конечной сходимости алгоритма (Д.3.6) достаточно выполнения условия (Д.2.31), т. е. равномерной по t ограниченности фазовых переменных системы (Д.2.1), (Д.2.6). По поводу этого условия можно повторить все, что было сказано в § Д.2 по поводу условия (Д.2.30).

Перейдем теперь к описанию подхода к задаче о синтезе АР, который в некотором смысле сводит эту задачу к функциональной идентификации ОУ.

§ Д.4. ПРИНЦИП ИСКЛЮЧЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СИНТЕЗЕ АДАПТИВНОГО РЕГУЛЯТОРА

Рассмотрим вновь уравнения (Д.2.1) и (Д.2.6). Если бы коэффициенты ОУ были известны, то в соответствии с рассматриваемой задачей (стабилизация, отслеживание заданного режима и т. д.) нетрудно подобрать коэффициенты регулятора, обеспечивающие решение поставленной задачи. Если после выбора соответствующим образом коэффициентов регулятора совокупная система (Д.2.1), (Д.2.6) становится (в отсутствие внешних возмущений, т. е. $v(t) \equiv 0$) асимптотически устойчивой, то в адаптивном варианте, т. е. когда коэффициенты ОУ неизвестны, можно воспользоваться следующим приемом исключения регулятора из рассмотрения.

Обозначим через $\hat{B}^{(m_1)}(\lambda)$ и $\hat{C}^{(m_2)}(\lambda)$ полиномы порядка m_1 и m_2 , коэффициенты которых являются оценками $\{\hat{B}_k\}$, $\{\hat{C}_k\}$ коэффициентов ОУ ($B_{m_1} = I_m$). В соответствии с поставленной задачей коэффициенты $\{D_k\}$, $\{E_k\}$ регулятора выберем по оценочным полиномам $\hat{B}^{(m_1)}(\lambda)$, $\hat{C}^{(m_2)}(\lambda)$ так, чтобы была асимптотически устойчива система

$$\begin{aligned} \hat{B}^{(m_1)}\left(\frac{d}{dt}\right)y &= \hat{C}^{(m_2)}\left(\frac{d}{dt}\right)u, \\ D^{(m_2)}\left(\frac{d}{dt}\right)u &= E^{(m_1-1)}\left(\frac{d}{dt}\right)y, \end{aligned} \quad (\text{Д.4.1})$$

где $D^{(m_2)}(\lambda)$ и $E^{(m_1-1)}(\lambda)$ — полиномы степеней m_2 и $m_1 - 1$ с коэффициентами $\{D_k\}$, $\{E_k\}$, $D_{m_2} = I_l$. Сам выбор коэффициентов D_k , E_k из этого условия может быть осуществлен различными способами (и некоторые из них будут рассмотрены ниже). Фиксация способа построения полиномов $D^{(m_2)}(\lambda)$ и $E^{(m_1-1)}(\lambda)$ по полиномам $\hat{B}^{(m_1)}(\lambda)$ и $\hat{C}^{(m_2)}(\lambda)$ зависит от выбранного подхода к задаче. Пусть некоторый такой способ фиксирован. Мы не будем пока останавливаться на вопросе о разрешимости, т. е. о возможности построения нужных по-

линомов $D^{(m_2)}(\lambda)$, $E^{(m_1-1)}(\lambda)$ при произвольных полиномах $\hat{B}^{(m_1)}(\lambda)$, $\hat{C}^{(m_2)}(\lambda)$. Тогда задача сводится лишь к оценке коэффициентов полиномов $\hat{B}^{(m_1)}(\lambda)$, $\hat{C}^{(m_2)}(\lambda)$ из условия

$$\begin{aligned} & \hat{B}^{(m_1)}\left(\frac{d}{dt}\right)y - \hat{C}^{(m_2)}\left(\frac{d}{dt}\right)u \equiv \\ & = \left[\hat{B}^{(m_1-1)}\left(\frac{d}{dt}\right) - B^{(m_1-1)}\left(\frac{d}{dt}\right) \right]y - \\ & - \left[\hat{C}^{(m_2)}\left(\frac{d}{dt}\right) - C^{(m_2)}\left(\frac{d}{dt}\right) \right]u + v(t). \end{aligned} \quad (\text{Д.4.2})$$

Действительно, если записать систему (Д.2.1), (Д.2.6) в виде уравнения первого порядка с матрицей A , а аналогичную матрицу для системы (Д.2.1), (Д.3.1) обозначить через \hat{A} , то система (Д.2.1), (Д.2.6) будет записана в виде

$$\frac{dz}{dt} = \hat{A}z + (\hat{A} - A)z + \tilde{v}(t), \quad (\text{Д.4.3})$$

где $z^*(t) = (y^*(t), \dots, y^{(m_1-1)*}(t), u^*(t), \dots, u^{(m_2-1)*}(t))$, $v(t)$ определяется известным способом по $v(t)$. По условию система

$$\frac{dz}{dt} = \hat{A}z \quad (\text{Д.4.4})$$

асимптотически устойчива* (из этих соображений и производился выбор коэффициентов регулятора). Поэтому при выполнении неравенства

$$\|(\hat{A} - A)z + \tilde{v}(t)\| < \varepsilon \quad (\text{Д.4.5})$$

с достаточно малым ε (которое следует определять в зависимости от скорости убывания решений уравнения (Д.4.4)) можно гарантировать малость $\|z(t)\|$ при достаточно больших t , т. е. обеспечить стабилизацию ОУ. Нетрудно убедиться, что выражение, стоящее в неравенстве (Д.4.5) под знаком нормы, совпадает с правой частью уравнения (Д.4.2). Итак, приходим к задаче, рассмотренной в § Д.3. При определении оценок коэффициентов ОУ из условия

$$\left\| \hat{B}^{(m_1)}\left(\frac{d}{dt}\right)y - \hat{C}^{(m_2)}\left(\frac{d}{dt}\right)u \right\| < \varepsilon \quad (\text{Д.4.6})$$

регулятор оказался как бы исключенным из рассмотрения, что объясняет название описанного приема.

Для нахождения искомого оценок из неравенства (Д.4.6) можно воспользоваться алгоритмом (Д.3.4). Заметим, что в описанном подходе знание коэффициента C_m , не требуется. В ча-

* То есть матрица \hat{A} — гурвицева (все ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части).

стности, этот коэффициент может быть нулевым, либо таким, что ОУ не является минимально-фазовым. В следующем параграфе будет показано, что описанный подход к задаче синтеза АР не является «пустым» и что с его помощью действительно можно в некоторых случаях осуществить синтез АР.

§ Д.5. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРИНЦИПА ИСКЛЮЧЕНИЯ

Приведем три способа определения коэффициентов регулятора по оценкам коэффициентов ОУ, гарантирующих асимптотическую устойчивость модели. Для простоты ограничимся случаем скалярных уравнений (Д.2.1), (Д.2.6) и $v(t) \equiv 0$.

I пример. Зададимся гурвицевым многочленом $\sum_{k=0}^{m_1+m_2} G_k \lambda^k$ и будем определять коэффициенты D_k, E_k регулятора (Д.2.6) из условия

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m_1} \hat{B}_k \lambda^k \sum_{s=0}^{m_2} D_s \lambda^s - \sum_{k=0}^{m_2} \hat{C}_k \lambda^k \sum_{s=0}^{m_1-1} E_s \lambda^s &= \\ &= \sum_{k=0}^{m_1+m_2} G_k \lambda^k. \end{aligned} \quad (\text{Д.5.1})$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , приходим к линейной алгебраической системе относительно коэффициентов регулятора. Если бы эта система была разрешима при любых оценках $\{\hat{B}_k\}, \{\hat{C}_k\}$, то мы пришли бы к ситуации, разобранный в предыдущем параграфе.

Однако система (Д.5.1) разрешима не при всех значениях оценок $\{\hat{B}_k\}, \{\hat{C}_k\}$. В пространстве оценок имеются многообразия, при которых определитель, отвечающий системе (Д.5.1), обращается в нуль. Оказывается возможным так модифицировать алгоритм адаптации, чтобы при получении новых оценок не попадать в заданные окрестности этих многообразий. Это удастся сделать, поскольку указанные многообразия представляют поверхности простой структуры в пространстве оценок $\{\hat{B}_k\}, \{\hat{C}_k\}$. Учет этого обстоятельства и видоизменение постановки задачи, связанной с необходимостью обеспечить равномерную по времени ограниченность фазовых переменных системы (Д.2.1), (Д.2.6), позволяют до конца решить задачу синтеза АР в случае скалярного ОУ. Однако описание полного решения этой задачи выходит за рамки наших намерений.

II пример. Обозначим через z вектор фазовых переменных систем (Д.2.1), (Д.2.6). Зададимся в пространстве z некоторым вектором $\pi^* = (p_0, \dots, p_{m_1-1}, r_0, \dots, r_{m_2-1})$ и определим коэффициенты регулятора (Д.2.6) из условия, чтобы проходящая через начало координат плоскость, определяемая вектором π , являлась для системы (Д.2.1), (Д.2.6) плоскостью притяжения. Более точ-

но это означает, что коэффициенты регулятора выбираются из условия

$$\frac{ds}{dt} = -\alpha s, \quad (\text{Д.5.2})$$

где α — произвольно выбранное положительное число и $s^*(t) = (\pi^*, z^*)$. Поставленная задача решается элементарно, и коэффициенты регулятора имеют вид

$$E_k = (p_{m_1-1} \hat{C}_{m_2} + r_{m_2-1})^{-1} (\alpha p_k - p_{k-1} + p_{m_1-1} \hat{B}_k), \quad (\text{Д.5.3})$$

$$D_k = - (p_{m_1-1} \hat{C}_{m_2} + r_{m_2-1})^{-1} (\alpha r_k - r_{k-1} + p_{m_1-1} \hat{C}_k)$$

(предполагается, что $p_{m_1-1} \hat{C}_{m_2} + r_{m_2-1} \neq 0$). Если из условия $s(t) \equiv 0$ следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$, то задача опять свелась к рассматриваемой в § Д.4, поскольку теперь весь вопрос состоит в получении достаточно хороших оценок \hat{B}_k , \hat{C}_k . В частности, это имеет место, если ОУ (Д.2.1) — минимально-фазовый и компоненты вектора π выбраны из условия гурвицевости многочлена $\sum_{k=0}^{m_1-1} p_k \lambda^k$ и $r_k \equiv 0$.

В общем случае можно поступить следующим образом. Выберем $m_1 + m_2$ линейно-независимых векторов $\pi^{(1)}, \dots, \dots, \pi^{(m_1+m_2)}$ в фазовом пространстве уравнений (Д.2.1), (Д.2.6) и постараемся выбрать управление так, чтобы при достаточно больших t обеспечить выполнение неравенств

$$|(\pi^{(k)}, z(t))| < \varepsilon, \quad k = 1, \dots, m_1 + m_2. \quad (\text{Д.5.4})$$

Ясно, что из линейной независимости векторов $\pi^{(k)}$ и малости числа ε отсюда следует малость $\|z(t)\|$, т. е. обеспечивается стабилизация ОУ. Покажем, как можно пытаться синтезировать регулятор, для которого неравенства (Д.5.4) были бы выполнены при достаточно больших t .

Запишем систему (Д.4.1) в виде системы первого порядка, предполагая, что коэффициенты регулятора определены по вектору $\pi^{(k)*} = (p_0^{(k)}, \dots, p_{m_1-1}^{(k)}, r_0^{(k)}, \dots, r_{m_2-1}^{(k)})$ и оценкам $\{\hat{B}_k\}$, $\{\hat{C}_k\}$ формулами (Д.5.3). Получим уравнение $\frac{dz}{dt} = \hat{A}^{(h)} z$, где матрица $\hat{A}^{(h)}$ определяется известным способом по коэффициентам системы (Д.4.1). С помощью матриц $\hat{A}^{(h)}$ синтезируем матрицу $\hat{A}(z)$ по формуле $\hat{A}(z) = A_k$, если $\max_{1 \leq j \leq m_1+m_2} (\pi^{(j)}, z) = (\pi^{(h)}, z)$, т. е. $\hat{A}(z)$ — кусочно-постоянная матричная функция, выбираемая из условия убывания в точке z наибольшей из функций $s_k = (\pi^{(k)}, z)$.

Предположим, что векторами $\pi^{(k)}$ можно распорядиться так, что нелинейная система $\frac{d\hat{z}}{dt} = \hat{A}(\hat{z})\hat{z}$ будет асимптотически устойчивой.*) Система (Д.2.1), (Д.2.6) при таком способе управления запишется в виде $\frac{dz}{dt} = \hat{A}(z)z + [A(z) - \hat{A}(z)]z + \tilde{v}(t)$, причем условие малости величины $\|[A(z) - \hat{A}(z)]z + \tilde{v}(t)\|$ имеет по-прежнему вид (Д.4.6). Итак, задача опять сводится к функциональной идентификации ОУ — определению оценок из условия (Д.4.6) при достаточно малом ε .

Следует отметить, что в данном случае описан синтез нелинейного АР. Такие регуляторы обладают рядом преимуществ по сравнению с линейными АР. В частности, интересной особенностью построенного АР является возможность реализовать так называемые скользящие режимы. Именно выбором векторов $\pi^{(k)}$ можно распорядиться так, чтобы некоторые из поверхностей переключения, определяемые уравнениями $(\pi^{(k)}, z) = (\pi^{(j)}, z)$, $k \neq j$, при известных условиях могли стать поверхностями скольжения, причем скольжение будет происходить по направлению к началу координат.

Использование скользящих режимов позволяет обеспечить высокие динамические показатели процесса управления. Управление с использованием скользящих режимов получило широкое признание, соответствующий раздел теории управления, называемый теорией систем с переменной структурой, бурно развивается. Существенный вклад в развитие этой теории внесен группой московских исследователей под руководством С. В. Емельянова.

III пример. Вернемся к первому примеру и несколько усложним его. Именно покажем, как можно модифицировать алгоритм адаптации, при котором не требуется знания производных выходов ОУ. Такая модификация весьма полезна в прикладных задачах, поскольку вычисление производных по времени t выходов ОУ служит обычно источником значительных неконтролируемых помех.

Коэффициенты регулятора по-прежнему определяются из соотношения (Д.5.1). Введем обозначение

$$\psi(t) \triangleq \hat{B}_m \left(\frac{d}{dt} \right) y - \hat{C}_m \left(\frac{d}{dt} \right) u. \quad (\text{Д.5.5})$$

В данном случае невязку $\psi(t)$ нельзя считать известной, поскольку она зависит от производных функций $y(t)$, которые, по предположению, нет возможности (или нежелательно) наблюдать, либо вычислять. Поэтому введем сглаженную невязку

$$\eta(t) \triangleq \int_0^t K(t, s) \psi(s) ds, \quad (\text{Д.5.6})$$

*) Возможность и способ такого выбора векторов $\pi^{(k)}$ здесь не рассматривается.

где ядро $K(t, s)$ непрерывно дифференцируемо по второму аргументу n раз и удовлетворяет условиям ($i = \max(m_1, m_2)$)

$$\left. \frac{\partial^i K(t, s)}{\partial s^i} \right|_{s=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^i K(t, s)}{\partial s^i} \right|_{s=t} = 0, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (\text{Д.5.7})$$

Это позволяет переписать (Д.5.6) (после нужного числа раз интегрирования по частям) в виде

$$\eta(t) = \int_0^t \left\{ \left[\tilde{B}_{m_1} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) K(t, s) \right] y(s) - \left[\tilde{C}_{m_2} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) K(t, s) \right] u(s) \right\} ds, \quad (\text{Д.5.8})$$

где $\tilde{B}_{m_1}(\lambda)$, $\tilde{C}_{m_2}(\lambda)$ — многочлены, получаемые очевидным образом при интегрировании по частям. Поскольку ядро $K(t, s)$ предполагается известным, формула (Д.5.8) показывает, что $\eta(t)$ можно вычислить, если известны лишь выход $y(s)$ и управление $u(s)$, $0 \leq s \leq t$. Кроме того, из формулы (Д.5.8) непосредственно следует, что $\eta(t)$ является линейной функцией оценок коэффициентов (Д.2.1). Поэтому для получения нужных оценок можно вновь воспользоваться способом, изложенным в § Д.4. Предположим, что в результате применения соответствующей модификации алгоритма (Д.3.6) окажется справедливым неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\eta(t)| < \infty. \quad (\text{Д.5.9})$$

Покажем, что условие (Д.5.9) обеспечивает выполнение неравенств

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y(t)| < \infty, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |u(t)| < \infty. \quad (\text{Д.5.10})$$

Прежде поясним, как можно построить нужное ядро $K(t, s)$. Для этого зададимся произвольным гурвицевым многочленом $Q(\lambda)$ степени m_1 и рассмотрим уравнение (при некотором $\lambda < 0$)

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right) y = (1 - e^{\lambda t})^{n-1} \psi(t). \quad (\text{Д.5.11})$$

Решение $y(t)$ этого уравнения можно представить в виде

$$y(t) = \int_0^t K(t, s) \psi(s) ds.$$

Ядро $K(t, s)$ в правой части последнего соотношения удовлетворяет условиям (Д.5.7). Оно определяется лишь свойствами полинома $Q(\lambda)$ и сглаживающей функции $(1 - e^{\lambda t})^{n-1}$. Учитывая соотношения (Д.5.11), (Д.5.1), (Д.5.6) и (Д.4.1), нетрудно получить равенства, связывающие $y(t)$ и $u(t)$ с $\eta(t)$:

$$\sum_{k=0}^{m_1+m_2} C_k \frac{d^k}{dt^k} y = D_{m_2} \left(\frac{d}{dt} \right) \left[(1 - e^{\lambda t})^{n-1} Q\left(\frac{d}{dt}\right) \eta(t) \right],$$

$$\sum_{k=0}^{m_1+m_2} G_k \frac{d^k}{dt^k} u = E_{m_1-1} \left(\frac{d}{dt} \right) \left[(1 - e^{\lambda t})^{n-1} Q \left(\frac{d}{dt} \right) \gamma_1(t) \right].$$

Соотношения (Д.5.10) выводятся из (Д.5.9) в силу следующего простого утверждения, которое приведем без доказательства.

Лемма Д.5.1. *Если $G(\lambda)$ — гурвицев и $P(\lambda)$ — произвольный многочлен, причем степень $P(\lambda)$ не превосходит степени $G(\lambda)$, то справедлива импликация*

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |\xi(t)| < \infty \right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| < \infty \right\},$$

где $y(t)$ — произвольное решение уравнения $G \left(\frac{d}{dt} \right) y = P \left(\frac{d}{dt} \right) \xi$. Итак, доказана ограниченность входов и выходов

ОУ после применения алгоритма идентификации, не использующего знания производных выхода ОУ (Д.2.1). Осталось лишь показать, как вычисляются управления $u(t)$ по $y(t)$. Для этого нельзя непосредственно воспользоваться вторым соотношением (Д.4.1) (производные неизвестны). Поэтому перепишем второе соотношение (Д.4.1) в виде

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} [D_{m_2-1}(\lambda)]^{-1} E_{m_1-1}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \cdot \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} y(s) ds. \quad (\text{Д.5.12})$$

Формулу (Д.5.12) можно привести к более удобному виду, если воспользоваться теоремой о вычетах. Полученное выражение не будет содержать производных от $y(t)$.

§ Д.6. ЗАДАЧА ОБ АДАПТИВНОМ УПРАВЛЕНИИ МАНИПУЛЯТОРОМ

Развитие автоматических автономных систем привело к необходимости разработки специальных устройств — манипуляторов, являющихся аналогами человеческой руки. Рассмотрим задачу в следующей простейшей постановке: требуется перевести m -звенный плоский манипулятор из одной известной конфигурации в заданную другую. Переменными, описывающими положение манипулятора, являются углы $\{\varphi_i\}$, $i=1, \dots, m$, между i -м звеном и вертикальной осью (рис. Д.6.1), управляющими воздействиями являются моменты $\{M_i\}$, приложенные в сочленениях манипулятора. Простоты ради предполагается, что как на φ_i , так и на M_i не наложено никаких ограничений. Длины звеньев манипулятора считаются постоянными, но неизвестными; неизвестны также распределения масс этих звеньев и масса переносимого груза.

Уравнение движения. В указанных предположениях движение манипулятора под действием приложенных моментов описывается нелинейным дифференциальным уравнением следующего вида:

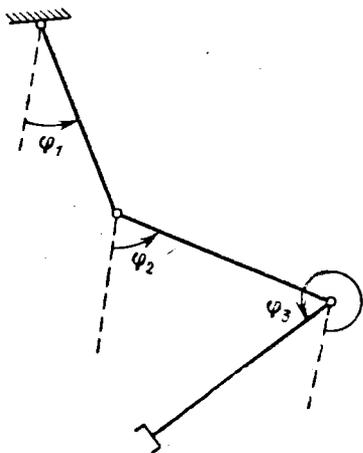


Рис. Д.6.1. Трехзвенный плоский манипулятор

$$A(\varphi, \xi) \ddot{\varphi} + B(\varphi, \dot{\varphi}, \xi) = CM(t), \quad (\text{Д.6.1})$$

где $\varphi^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ — набор угловых переменных манипулятора; $M^* = (M_1, \dots, M_m)$ — приложенные в сочленениях манипулятора изменяющиеся во времени моменты; $\dot{\varphi} = \frac{d}{dt} \varphi$; $\ddot{\varphi} = \frac{d^2}{dt^2} \varphi$; $A(\varphi, \xi)$ — $m \times m$ -матрица-функция; C — $m \times m$ -постоянная матрица; $B(\varphi, \dot{\varphi}, \xi)$ — m -компонентная вектор-функция; $\xi^* = (a_1, \dots, a_n)$ — векторный набор параметров (ВП) a_i манипулятора, определяемый длинами звеньев и распределением масс манипулятора. Так для трехзвенного плоского манипулятора ($m=3$)

определяемый длинами звеньев и распределением масс манипулятора. Так для трехзвенного плоского манипулятора ($m=3$)

$$A(\varphi, \xi) = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & a_5 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \\ a_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & a_2 & a_6 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \\ a_5 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) & a_6 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) & a_3 \end{pmatrix},$$

$$B(\varphi, \dot{\varphi}, \xi) = \begin{pmatrix} a_4 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + a_5 \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + a_7 \sin \varphi_1 \\ a_4 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + a_6 \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + a_8 \sin \varphi_2 \\ a_5 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + a_6 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + a_9 \sin \varphi_3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $\xi^* = (a_1, \dots, a_9)$. Аналогичную форму имеет уравнение манипулятора при любом числе звеньев. Особенность этих уравнений состоит в том, что матрица $A(\varphi, \xi)$ является симметричной, положительно определенной, т. е. для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и для произвольного m -мерного вектора φ справедливо неравенство

$$(A(\varphi, \xi) \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) \geq \varepsilon_0 (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}), \quad (\text{Д.6.2})$$

где (φ, ψ) — скалярное произведение m -мерных векторов φ и ψ

ψ. Кроме того, матрица $A(\varphi, \xi)$ и вектор $B(\varphi, \dot{\varphi}, \xi)$ зависят от вектора параметров ξ линейно, т. е. для любого числа λ справедливы равенства

$$A(\varphi, \lambda\xi) = \lambda A(\varphi, \xi); \quad B(\varphi, \dot{\varphi}, \lambda\xi); \quad B(\varphi, \dot{\varphi}, \lambda\xi) = \lambda B(\varphi, \dot{\varphi}, \xi). \quad (\text{Д.6.3})$$

Свойства (Д.6.2)—(Д.6.3) уравнения (Д.6.1) будут в дальнейшем существенно использоваться.

Постановка задачи. Пусть φ_0 — набор углов, определяющий начальное положение манипулятора, и φ_c — произвольный, наперед заданный набор угловых переменных. Требуется так построить управление $M(t)$, чтобы при достаточно больших t обеспечить выполнение неравенства

$$\|\varphi(t) - \varphi_c\| < \delta \quad (\text{Д.6.4})$$

для наперед заданного положительного числа δ . Здесь $\|\varphi\|$ обозначает норму вектора φ .

Эта задача легко может быть решена, если вектор параметров ξ известен. В рассматриваемом случае это не так, и потому естественно воспользоваться адаптивными методами, в которых управляющие моменты M_i строятся с помощью обратной связи как функции наблюдаемых величин $\varphi, \dot{\varphi}$. Для решения такой задачи можно воспользоваться подходом, описанным в § Д.2—Д.5 для адаптивной стабилизации линейных систем.

Метод решения. Зададимся матрицами D_1 и D_2 такими, что корни уравнения

$$\det(\lambda^2 I_m + \lambda D_1 + D_2) = 0 \quad (\text{Д.6.5})$$

(I_m — единичная матрица) расположены в открытой левой полуплоскости. Обозначим через $\eta(t)$ вектор-функцию

$$\eta(t) \triangleq \ddot{\varphi}(t) + D_1 \dot{\varphi}(t) + D_2 (\varphi(t) - \varphi_c), \quad (\text{Д.6.6})$$

где $\varphi(t)$ — вектор-функция, удовлетворяющая уравнению (Д.6.1) и начальному условию $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$. Постараемся так подобрать управления $M_i(t)$, чтобы при достаточно больших t выполнялось неравенство $\|\eta(t)\| < \epsilon$ при достаточно малом $\epsilon > 0$. Ясно, что это условие в силу свойства корней уравнения (Д.6.5) обеспечит выполнение исходного целевого неравенства (Д.6.4). Будем искать управляющие моменты (управление) M в виде следующей функции фазовых переменных $\varphi, \dot{\varphi}$ системы (Д.6.1):

$$M = G(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_c) \tau(t), \quad (\text{Д.6.7})$$

где $G^*(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_c) = (G_1(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_c), \dots, G_n(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_c))$,

$$G_1(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_c) = C^{-1} \frac{\partial}{\partial a_1} [B(\varphi, \dot{\varphi}, \xi) - A(\varphi, \xi)(D_1 \dot{\varphi} + D_2(\varphi - \varphi_c))],$$

ТУ $\tau(t)$ определяется алгоритмом

$$\begin{aligned} \tau(t+0) &= \tau(t-0) - \beta_t \|G^*(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_c) \eta(t-0)\|^2 \\ &\quad \cdot \varepsilon_0 \theta_\varepsilon(t) \|\eta(t-0)\|^2 G^*(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_c) \eta(t-0); \quad (Д.6.8) \\ \theta_\varepsilon(t) &= \begin{cases} 1, & \text{если } \|\eta(t-0)\| \geq \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \|\eta(t-0)\| < \varepsilon; \end{cases} \end{aligned}$$

β_t — произвольные числа, расположенные строго внутри интервала $(0,2)$: $\beta' \leq \beta_t \leq \beta''$, $\beta' > 0$, $\beta'' < 2$; ε_0 — положительное число из оценки (Д.6.2); η^* обозначает вектор-строку, отвечающую вектор-столбцу η . В качестве начального набора параметров $\tau(0)$ может быть выбран произвольный вектор соответствующей размерности. Алгоритм (Д.6.8) описывает изменение структуры регулятора, формирующего управляющие воздействия в виде (Д.6.7), поэтому его естественно назвать алгоритмом адаптации.

Свойства алгоритма адаптации. Из соотношения (Д.6.8) нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} \|\tau(t-0) - \xi\|^2 - \|\tau(t+0) - \xi\|^2 &\geq \|G^*(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_c) \eta(t-0)\|^2 \\ &\quad \cdot \varepsilon_0^2 \beta_t (2 - \beta_t) \theta_\varepsilon(t) \|\eta(t-0)\| \geq \|G^*(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_c) \eta(t-0)\|^2 \\ &\quad \cdot \varepsilon_0^2 \beta' (2 - \beta'') \theta_\varepsilon(t) \varepsilon^2, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\tau(t)$ монотонно приближается к ξ и если

$$\sup_t \|G^*(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_c) \eta(t-0)\| < \varepsilon,$$

то множество $\{\varepsilon_\varepsilon(t) = 1\}$ ограничено сверху, т. е. начиная с некоторого момента времени будет выполняться целевое условие $\|\eta(t)\| < \varepsilon$, что при достаточно малом ε приводит к выполнению при достаточно больших t исходного целевого неравенства (Д.6.4).

Рассмотренная задача может быть обобщена на манипуляторы, действующие в пространстве, с переменными длинами звеньев, угловые переменные и управляющие моменты которых удовлетворяют различным ограничениям.

Описанный выше способ естественным образом распространяется на задачу слежения схватом манипулятора заданной (программной) траектории в пространстве угловых переменных.

§ Д.7. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ АДАПТИВНОМ УПРАВЛЕНИИ

В § Д.1—Д.2 был рассмотрен довольно специальный процесс $y(t)$, определяемый уравнением (Д.1.1) и зависящий от управляющих воздействий $u(t)$, способных изменять его течение. Здесь, следуя В. Г. Сраговичу, кратко остановимся на более общей постановке задачи адаптивного управления. Просто ради ограничимся рассмотрением только дискретного времени $t=0, 1, \dots$

Будем предполагать, что имеется некоторый объект, называемый ОУ, на который можно подавать управляющие воздействия u_t , принимающие значения из множества *допустимых управлений* U и как-то оказывающие воздействия на выход x_t ОУ; x_t принимает значения из множества $X \subseteq R^q$, называемого *фазовым пространством* ОУ.

Если ОУ находится под действием неконтролируемых случайных помех, то x_t является сл. вел. Тогда с $\{x_t\}$ можно связать последовательность условных распределений

$$F_{t+1}(A | x^t, u^t) \triangleq P(x_{t+1} \in A | x_0, \dots, x_t, u_0, \dots, u_t), \quad (Д.7.1)$$

достаточно полно характеризующих рассматриваемый ОУ. Здесь P — вероятностная мера, определенная на σ -алгебре A подмножеств множества Ω , и A — произвольное борелевское множество из R^q .

Будем предполагать, что управление u_t имеет вид

$$u_t = U_t(x^{t-1}, u^{t-1}),$$

где $\{U_t\}$ — последовательность детерминированных отображений из $X^{t-1} \times U^{t-1}$ в U — *стратегия управлений*. Если функция U_t не зависит от $x_s, u_s, s \leq t-1$, то говорят о *программно-мном управлении*. Возможно рассмотрение и более сложных управлений, когда U_t зависит от случая.

Управление всегда преследует определенные цели. Для формулировки цели управления рассмотрим функционал $Q(x^t, u^t)$ и допустим, что существует его м. о.

$$W(U^t) = M(Q(x^t, u^t) | U_1, \dots, U_t), \quad (Д.7.2)$$

где м. о. берется при фиксированной стратегии управления U^t до момента времени t . W называется *средним выигрышем* и к нему относится цель управления рассматриваемым ОУ. Среди целей могут быть: удержание среднего выигрыша в заданном интервале, максимизация и т. п.

В тех случаях, когда математическая модель ОУ известна (т. е. совокупность распределений F_t задана) и цель в принципе достижима, синтез системы управления осуществляется с помощью традиционных методов теории оптимального управления. Нас занимает случай, приобретающий все более важную роль, когда отсутствие полного описания модели ОУ делает неизбежным применение принципов самонастройки, или адаптации. Придадим точный смысл последнему понятию.

Определение Д.7.1. *Управляющей системой с переменной структурой* (УСПС) назовем объект $L = (X, F, U, T)$, где X, U — множество входных и выходных сигналов (они введены выше), $F = \{f\}$ — множество отображений $f: X \rightarrow U$ и T — семейство отображений $T_{x, t}: F \rightarrow F$.

Выходной сигнал УСПС — управление u_t — определяется по входному сигналу текущим отображением f_t . Если X и U конеч-

ны, а F не более чем счетно, то L является автоматом. Функционирование L в ходе управления процессом x_t протекает так: в момент времени t поступает входной сигнал x_t и система L в соответствии с действующим отображением f_t выдает сигнал $u_t = f_t(x_t)$, при этом отображение f_t заменяется на $f_{t+1} = T_{x_t} f_t$. Далее указанный цикл повторяется. Нетрудно заметить сходство между только что данным определением и определением опознающей системы с переменной структурой (см. § В.2).

Удобно предполагать, что рассматриваемый ОУ принадлежит некоторому «известному» семейству, параметризованному параметром ξ (варьируемым параметром — ВП), $\xi \in \Xi$. Сказанное означает, что математическая модель рассматриваемого ОУ известна с точностью до ВП, т. е. известно семейство условных распределений F_t с точностью до параметра ξ . Априорная неопределенность об ОУ зависит, следовательно, от «мощности» множества Ξ .

Если ВП ОУ неизвестен и требуется обеспечить выполнение заданной цели относительно среднего выигрыша $W(U^t)$, управление поручаем УСПС.

Обозначим через $t(\xi)$ время достижения цели УСПС при управлении ОУ, определяемым ВП ξ .

Определение Д.7.2. УСПС L называется *адаптивной* в классе Ξ управляющей системой, если для каждого ВП $\xi \in \Xi$ выполнено равенство $P\{t(\xi) < \infty\} = 1$, т. е. если п. н. конечно время $t(\xi)$ обучения (адаптации).

Заметим, что если отвлечься от различия между непрерывным и дискретным временем, то определение АдУС, данное в § Д.1, является частным вариантом определения Д.7.2. Для обозначения системы, вводимой определением Д.7.2, также будем использовать сокращение АдУС.

Функционирование АдУС можно интерпретировать как случайное блуждание на множестве отображений F , индуцированное последовательностью входных сигналов системы L . Это блуждание имеет направленный характер в том смысле, что приводит к оптимальному отображению $f_{\text{опт}} \in F$, которое обеспечивает осуществление цели управления. Существенно, что алгоритм, реализующий указанное блуждание (алгоритм адаптации), не должен явно зависеть от ВП ξ , а может зависеть лишь от общих характеристик рассматриваемого класса ОУ.

Существующая пока теория не дает ответа на вопрос о том, для каких классов ОУ и каких целей существуют АдУС, и не указывает алгоритмов синтеза АдУС.

Если параметр ξ можно оценить по результатам наблюдений за выходом ОУ и если при известном параметре ξ имеется способ построения управления, обеспечивающий достижение сформулированной цели управления, а сама цель управления «слабо» зависит от «предыстории», то построение адаптивной

модели принципиально возможно. Общий метод синтеза АдУС состоит в следующем: в каком-либо порядке перебираются управления и по значениям выходного процесса строятся оценки параметра ξ . С уточнением их значений заново решается задача построения искомого управления. После достаточно долгого функционирования системы цель управления будет достигнута.

В конкретных задачах реализация этой общей программы зависит от возможности соответствующей идеализации ОУ. Вместе с тем не всякое «блуждание» устраивает разработчиков АдУС: время адаптации должно быть не слишком большим. Мощностные классы E управляемых объектов и время адаптации являются важнейшими характеристиками АдУС (алгоритма адаптации). Требование уменьшения времени адаптации может привести к ограничению класса E , т. е. уменьшению «универсальности» АдУС. В настоящее время такие свойства АдУС в теоретическом плане изучены очень слабо и всякое продвижение в этом направлении представляет несомненный интерес для теории адаптивных систем и ее приложений.

В заключение отметим некоторые классы «управляемых» случайных процессов, порождаемых выходами ОУ, и кратко остановимся на связанных с ними задачах адаптивного управления.

Процессом с независимыми значениями (ПНЗ) называется процесс, характеризующий семейством распределений

$$F_t(A | u_{t-1}) = P(x_t \in A | u_{t-1}).$$

При управлениях u_t , не зависящих от течения процесса, ПНЗ является последовательностью независимых случайных величин. *Однородным ПНЗ* (кратко ОПНЗ) называется процесс, характеризующий распределением $F(A | u)$.

Объект исследования сложившегося раздела теории адаптивных систем — управление ОПНЗ при функционале $Q = x_t$, т. е. его м. о. $W(u)$ означает средний выигрыш за один такт времени. Относящиеся сюда работы разбиваются на два класса в зависимости от выполнения условий: 1) множество ХУУ бесконечно; 2) множество ХУУ конечно.

Предметом исследования являются такие задачи: а) найти значение управления, при котором средний выигрыш принимает заданное значение W_0 , т. е. отыскать корень уравнения

$$W(u) = W_0; \quad (Д.7.3)$$

б) найти значение управления, доставляющее максимум среднему выигрышу.

В первом случае, рассматривая уравнение (Д.7.3) как уравнение регрессии, можно написать в силу (Д.7.2) и $Q = x_t$ процедуру Роббинса — Монро (см. § 8.1)

$$u_{t+1} = u_t + \gamma_t (x_t - W_0), \quad (Д.7.4)$$

где γ_t — положительные (отрицательные) постоянные, если функция $W(u)$ невозрастающая (неубывающая). При выполнении определенных предположений о функции $W(u)$ и постоянных γ_t (см. § 8.2) процедура (Д.7.4) (при любом выборе начального управления u_0) будет п. н. сходиться к $u_{\text{опт}}$ — решению (Д.7.3). В случае б) аналогичную роль играет процедура Кифера — Вольфовица.

Из указанной сходимости u_t к $u_{\text{опт}}$ в силу применимости усиленного закона больших чисел к процессу x_t можно (при условии непрерывности $W(u)$) получить равенство

$$P \left(\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \sum_{j=1}^t x_j = W_0 \right) = 1$$

в случае задачи а) и равенство

$$P \left(\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \sum_{j=1}^t x_j = W(u_{\text{опт}}) \right) = 1$$

в случае задачи б). Эти равенства показывают, что средние по времени выигрыши сходятся п. н. к соответствующим выигрышам, средним «по ансамблю».

Если оценивать скорость сходимости u_t к $u_{\text{опт}}$ в метрике $M \|u_t - u_{\text{опт}}\|^2$, то при соответствующих предпосылках (см. § 8.3, 8.4) получим, что функция $M \|u_t - u_{\text{опт}}\|^2$ имеет порядок t^{-1} , т. е. сходимость медленная. Обычно требуется использовать результаты большого числа наблюдений для более или менее четкого выявления предела. Это обстоятельство часто служит причиной отказа от метода стохастической аппроксимации как способа управления в реальном масштабе времени.

Значительно лучшие результаты могут быть получены в случае управления ОПНЗ с конечными множествами X и U . АдУС для таких процессов являются автоматы. Здесь в качестве цели управления может выдвигаться δ -оптимальность: выбор «оптимального» действия (управления, которое обеспечивает максимум среднего выигрыша) с вероятностью $1 - \delta$, а остальных действий с суммарной вероятностью δ . δ -оптимальная для всех ОПНЗ АдУС не может быть конечным автоматом (т. е. автоматом с конечным числом состояний). В работах В. Г. Сраговича и его сотрудников предложены многочисленные разновидности адаптивных систем, предназначенных для управления ОПНЗ в разнообразных постановках задачи адаптивного управления. Некоторые из таких АдУС были испытаны при управлении сложными технологическими процессами и показали свою эффективность.

Следует отметить, что ОПНЗ — простейшие управляемые процессы, сфера приложимости которых ограничена. Несмотря на возможность идеализации выходных процессов ряда важных технологических объектов в виде ОПНЗ, актуальна разра-

ботка АдУС для более широкого класса выходных процессов (процессов с последствием).

В настоящее время уже имеется ряд интересных и многообещающих результатов для управляемых марковских и полумарковских процессов с доходами, представляющими значительно более широкий по сравнению с ОПНЗ класс управляемых процессов.

Упражнения к Дополнению

1. Вывести формулы (Д.5.3).

2. Убедиться, что если ОУ (Д.2.1) минимально-фазовый, то при выборе $r_k \equiv 0$ и коэффициентов p_k из условия гурвицевости полинома $\sum_{k=0}^{m_1-1} p_k \lambda^k$ регулятор (Д.2.6), построенный по формулам (Д.5.3), обеспечивает при $\hat{B}_k = B_k, \hat{C}_k = C_k$ асимптотическую устойчивость ОУ.

3. Убедиться, что алгоритм (Д.2.25) для функций $\varphi_1(t, \tau), \varphi_{II}(t, \tau), \varphi_{III}(t, \tau)$ обеспечивает выполнение неравенства (Д.2.28). Вывести оценку сверху для числа изменений кусочно-постоянной матрицы $\tau(t)$.

4. Проанализировать условия разрешимости уравнения (Д.5.1) в случае $m_1 = 2, m_2 = 1$.

5. Вывести уравнения движения плоского двухзвенного манипулятора, предполагая, что его звенья — однородные стержни.

К введению

Распознавание образов представляет собой часть общей проблемы искусственного интеллекта, возникшей в 30—40-х годах под влиянием работ Н. Винера, Дж. фон Неймана, А. М. Тьюринга, У. Росс Эшби и других основоположников кибернетики. Хорошее представление о соотношении между этими разделами кибернетики дают работы [24, 174].

Литература, посвященная распознаванию образов, весьма обширна. Сюда относятся как работы теоретического характера [2, 9—11, 14—17, 20—22, 34, 57, 93, 97, 121, 129, 145, 161, 163—167, 176—179], так и работы, в которых обсуждаются конкретные вопросы работы опознающих систем [24, 25, 35, 45, 59—60, 94, 96, 106, 115, 170, 134, 136]. В действительности, такое разделение весьма условно, поскольку большинство работ первой группы содержит практические рекомендации и результаты моделирования на ЭВМ конкретных опознающих систем. Представление о процессе развития проблемы узнавания и существующих здесь трудностях можно составить с помощью указанных выше работ, а также обзоров [23, 52, 56, 71, 73, 111, 126, 127].

В развитии проблемы автоматической классификации изображений перцептронные системы Ф. Розенблатта занимают особое место. Предназначенные для исследования механизмов мозга [113, 114], они сразу же привлекли внимание исследователей и вызвали поток работ, посвященных изучению их возможностей (см., например, [32, 33]). С самого начала перцептрон вызывал двойственное к себе отношение. Эта ситуация в известной степени сохранилась до настоящего времени [59, 60, 106].

Наибольшее развитие в теории распознавания получил геометрический (экстраполяционный) подход, изложение которого составляет основную часть данной работы. Такой подход далеко не всегда позволяет моделировать удивительную способность мозга к «обучению» при очень коротких обучающих последовательностях (см. по этому поводу интересные соображения в [16]). Для ослабления этого дефекта предлагались и предлагаются способы построения «информативных» признаков, использование теории групп и групповых инвариантов [145] (см. также [137, 27, 141]). Все большее внимание уделяется лингвистическому (структурному) подходу к проблеме распознавания [1, 36], в частности, намечаются подходы к задаче о смысле-ловом фильтре [162, 173]. И лингвистический подход, и задача получения «информативных» признаков часто увязываются с изучением процесса восприятия в живых организмах [56, 36, 37].

К главе I

Принятый в главе подход к обучаемой опознающей системе как системе перцептронного типа основывается на работах [177—179]. Задача обучения трактуется как задача построения по обучающей последовательности разделяющих поверхностей в пространстве признаков (геометрический, или экстра-

поляционный, подход к проблеме распознавания). Опознающие системы при таком подходе различаются алгоритмами обучения (и назначением системы, если речь идет о приложениях).

Алгоритм обучения с поощрением — лишь один из семейства алгоритмов, предложенных Ф. Розенблаттом (в [113] алгоритм называется «системой подкрепления с коррекцией ошибок»). Такого рода алгоритмы давно известны в технике под названием «пороговой фильтрации» (см., например, [112], § 9.1).

В. А. Якубович ввел важное понятие конечно-сходящегося алгоритма (КСА) обучения и привел примеры КСА [177, 178] (это понятие затем широко использовалось его учениками [50, 68, 88, 101, 102, 122, 125, 135, 138, 140, 150, 151, 154—157]).

§ 1.3 представляет собой развернутое изложение [26]. Нерекуррентный алгоритм «Гauss» очень эффективен в задачах, размерность которых не превосходит 100. С его помощью могут решаться многочисленные задачи (для этого достаточно напомнить, что алгоритм представляет собой вариант метода наименьших квадратов), и он показал свою работоспособность в ряде случаев (см., например, [29, 30, 124, 125]).

К главе 2

Основной алгоритм обучения персептрона (названный в § 2.2 алгоритмом Ф. Розенблатта) доказывался и передоказывался многими авторами, начиная с самого Ф. Розенблатта. Геометрическая интерпретация и четкое доказательство конечной сходимости персептрона впервые даны, по-видимому, в [193], доказательство повторялось затем (часто независимо) не менее десяти раз. Самое удивительное, что еще в 1954 г. аналогичные теоремы доказывались в применении к системам неравенств в двух различных статьях, помещенных в одном номере журнала! [188, 192]. Это теоремы релаксационного типа, а сам метод релаксаций получил широкое применение к решенным выпуклым неравенствам [53]. Особенность основной теоремы 2.1.1 состоит в том, что эффективно определяется допустимая величина шага в направлении градиента, обеспечивающая конечную сходимость алгоритма.

§ 2.1—2.4 представляют собой развернутое изложение [151]. Сведение задачи о разделении многих классов изображений к задаче о нахождении решения системы неравенств, принятое в § 2.5, заимствовано из [97].

Задача нахождения расстояния между выпуклыми множествами, рассматриваемая в § 2.6, имеет свою историю. Задача встречается в качестве вспомогательной в различных численных методах решения экстремальных задач (см., например, [41, 66]), и предложено много способов ее решения. Она является стандартной задачей выпуклого (квадратичного) программирования; в [103] сделана попытка свести ее к задаче линейного программирования. В [152] предложен нерекуррентный алгоритм нахождения расстояния от заданной точки до выпуклого многогранника. Большое число алгоритмов обучения основано на решении этой задачи в методе обобщенного портрета [22].

Приведенная в § 2.6 рекуррентная процедура предложена в [67, 68], ее работоспособность проверялась на ряде задач [69, 81]. В § 2.6 приводятся результаты [151], § 2.7 составляет содержание [153].

К главе 3

В § 3.1—3.2 переизлагаются некоторые результаты [177]. Понятие комитета неравенств, введенное в § 3.3, близко к аналогичному понятию в [91, 92]. Приведенное в § 3.3 доказательство существования «Комитета-1» принадлежит Б. Н. Козинцу (не опубликовано), оно полностью отлично от соответствующего доказательства в [91].

Существование «Комитета-1» следует также из теоремы 3.2.1 о полноте пороговых функций (см. упражнение 7).

Специальный вариант рекуррентной процедуры нахождения «Комитета-1» приводится в [97]. Соответствующие перцептроны в [97] названы ассоциативными машинами. Отмечается, что нет доказательства сходимости процедуры обучения ассоциативных машин. Комитетное разделение — простейший вариант построения кусочно-линейных разделяющих поверхностей. Построение таких поверхностей предлагается, например, в [14, 123].

К главе 4

Глава является вспомогательной, в ней приводятся основные конструкции и факты теории вероятностей, используемые в последующих главах. Более подробное изложение приведенного материала может быть найдено в фундаментальной книге М. Лозва [87]. Изложение ведется в соответствии с обозначениями [74].

К главе 5

§ 5.1 — развернутое изложение [151]. Правила останова процесса обучения алгоритмов с поощрением обсуждаются в [2, 22, 5]. Принятый в § 5.3 вариант предложен в [10]. В § 5.4 с незначительными изменениями приводятся результаты [154]. Это первое известное автору доказательство сходимости комитетных процедур.

Процедурам случайного поиска, о которых говорится в § 5.5, посвящено большое число работ (см., например, [65, 104, 112, 13, 79, 80]). Процедурой случайного поиска является алгоритм § 5.2, сюда же относятся рассматриваемые в § 8.4 псевдоградиентные процедуры [108, 109]. Оценкам скорости и среднего времени сходимости процедур случайного поиска уделяется пока мало внимания, в [112] приводятся соображения в пользу того, что в ряде случаев подобные процедуры эффективнее градиентных (когда целевая функция в районе экстремума имеет сложный рельеф). Интересен метод моделей [42, 46, 48, 49], позволяющий при малых величинах шага поиска сопоставить процедуре случайного поиска детерминированное либо стохастическое дифференциальное уравнение, динамику которых удобно изучать моделированием на ЭВМ либо аналоговых устройствах.

Соответствие между процедурами случайного поиска и процедурами стохастической аппроксимации обсуждается в [116, 117]. Упоминание о недостаточности внимания к оценке скорости сходимости процедур обучения имеется в [93], там же приводятся соображения в пользу того, что процедура обучения Ф. Розенблатта качественно отличается от процедуры поиска устойчивого состояния геостата Эшби [112]. Почти ничего не известно о влиянии организации специальных обучающих выборок на скорость сходимости. § 5.6 посвящен краткому изложению метода группового учета аргументов (МГУА), представляющему собой эвристический метод построения многослойных перцептронных систем. Подробнее с этим методом можно познакомиться по работам [59, 60, 106].

К главе 6

Подход к распознаванию образов на основе теории статистических решений [12] является едва ли не преобладающим по числу публикаций. В этом плане «конкуренцию» могут составить лишь работы по применению методов стохастической аппроксимации. Статистическому подходу посвящены, например, работы [15, 2, 70—73, 131—133, 160, 161, 171]; строго говоря, к статистическому подходу следует отнести работы, связанные с использованием процедур стохастической аппроксимации [2, 18, 95, 166, 164, 190].

«Засилье» статистики в распознавании образов столь велико, что некоторые из исследователей не признают права на существование теории обучаемых и адаптивных систем, как таковой, утверждая, что имеются лишь надуманная терминология и аппарат, использующий те или иные модифика-

ции оптимальных правил Байеса (см. по этому поводу [130, 133]). Впрочем, это представление не является общепринятым [165, 148].

В § 6.1 дается общее представление об оптимальной процедуре Байеса. § 6.2, 6.4 излагаются в соответствии с [105], в § 6.3 приводятся некоторые результаты [161].

К главе 7

Методы обучения, основанные на минимизации эмпирического риска, широко используются в самых различных вариантах. Таким, например, является алгоритм «Гаусс», приведенный в § 1.3, а также все процедуры, использующие обучающую выборку фиксированной длины. Теоретической основой такого подхода к задаче обучения являются теоремы о равномерном по классу решающих правил стремлении эмпирического функционала среднего риска к среднему риску. Такие теоремы были получены В. Н. Вапником и А. Я. Червоненкисом [20, 21, 22]; в гл. 7 представлены некоторые из полученных ими результатов.

К главе 8

В 1951 г. была опубликована работа [194] о сходимости стохастической процедуры для нахождения корня уравнения регрессии. Год спустя в [191] обосновывалась стохастическая процедура для нахождения экстремума функционала среднего риска. Эти работы стали основополагающими для метода, получившего название метода стохастической аппроксимации. Метод оказался естественным для решения ряда биологических задач и привлек к себе внимание не только статистиков. Дворецким [190] были получены довольно общие условия сходимости стохастических процедур, не потерявшие значения до сего времени. Обобщение на многомерный случай дано в работе [189]. Использование теории полумартингалов [87] позволило существенно упростить первоначальные доказательства и придать им современный вид [31]. В настоящее время имеются специальные монографии, посвященные методу стохастической аппроксимации [18, 95] (см. также [19, 175]).

Второе рождение метода стохастической аппроксимации произошло в середине 60-х годов, когда Я. З. Цыпкин обнаружил связь этого метода с рекуррентными процедурами обучения [163]. С тех пор работы по развитию этого метода и применению его в теории обучения посыпались, как из рога изобилия, и в настоящее время число работ в этой области весьма внушительно (см., например, [163—167, 131, 132, 86, 84, 75, 76, 78, 63, 54, 40, 19, 169]).

Независимо от работ по стохастической аппроксимации аналогичные процедуры разрабатывались в рамках метода потенциальных функций. Итог этих работ подведен в [2].

В § 8.1, 8.2 изложены общие сведения об основной процедуре метода стохастической аппроксимации, которые можно найти в [2, 32, 163—167]. Некоторые результаты (случай вырождения матрицы в теореме 8.2.1, сходимость процедуры при постоянных γ_n) выписаны подробнее, чем известные в литературе. § 8.3 написан, следуя § 6 гл. IV [2], в § 8.4 приведены некоторые результаты работ [108, 109]. Упражнение 1 основано на данных § 4.12 [164].

К главе 9

В главе приводятся, следуя [2], некоторые результаты, полученные с помощью метода потенциальных функций. Полученные в [2] результаты используются не только здесь, но и в гл. 8, 10.

Переизложение результатов работы [2] представляет известные методологические трудности, так как доказательство многих теорем о сходимости процедур обучения и самообучения сводится к проверке выполнения условий теоремы о сходимости общих процедур метода потенциальных функций. Поскольку изложение этих результатов работы [2] во всей полноте нецелесооб-

разно, приходится доказывать теоремы, не прибегая к результатам гл. 4 [2]. Изучению свойств процедур метода потенциальных функций посвящены также работы [84, 85, 77].

К главе 10

Имеются различные подходы к задаче обучения «без учителя», или самообучения. Основные из них даны в работах [2, 168, 170, 171, 23] (см. также [51—52, 55, 59, 118—120, 156]). Существует определенная связь между этими подходами, большинство из них сводится к экстремизации некоторого функционала среднего риска.

Наиболее общая и естественная задача о самообучении дана в [168], там же приведена рекуррентная процедура самообучения. В § 10.1—10.2 дается изложение [168]. В этой работе формулируется также теорема о сходимости предложенной процедуры. К сожалению, одно из условий теоремы оказывается столь ограничительным, что вопрос о сходимости остается открытым (см. подробнее об этом в § 10.2). Этот факт остался, видимо, незамеченным, и в литературе имеются утверждения о сходимости процедуры самообучения со ссылкой на [168] (см., например, [23]).

В § 10.3—10.4 дается доказательство частной процедуры самообучения для случая многих классов. Аналогичное доказательство для случая двух классов имеется в [2] и в § 10.4 многие из его деталей существенно используются. Это доказательство сходимости алгоритма самообучения технически трудное и использует специальные свойства задачи. Изложение § 10.3—10.4 следует работам [82—83]. В § 10.5 приведена модификация алгоритма самообучения, при которой число классов в процессе самообучения может уменьшаться, зато условия сходимости малоограничительны. Этот алгоритм описан в [83].

К дополнению

Проблема управления объектом в условиях априорной неопределенности, неполной информации о параметрах объекта наиболее четко была сформулирована А. А. Фельдбаумом в его теории дуального управления (см., например, [146, 147]). Работы А. А. Фельдбаума получили широкое признание и развитие в различных направлениях [110].

Многие исследователи пытались и пытаются формализовать интуитивно понятные представления об «обучении» и «адаптации». Интересные соображения, связанные с понятием «обучение», приводятся в [148] (см. также [164]). В § Д.1 дается определение адаптивного регулятора, предложенное в [180, 184—187]. Идеино близкое определение дается в [128, 129, 47]. Общепринятой терминологии, тем не менее, пока нет. Это вызывает трудности в классификации работ по адаптивному управлению, число которых быстро нарастает (см., например, работы [58, 107, 110, 112, 129, 146, 149, 164, 169] и приведенную в них библиографию).

Метод синтеза адаптивного регулятора, принятый в работах В. А. Якубовича, основан на методе КСА, развиваемых ранее как алгоритмы обучения опознающих систем. В какой-то момент стало понятно, что КСА могут трактоваться как алгоритмы адаптации достаточно широкого класса задач [179—185], в который затем оказалось возможным включить некоторые задачи адаптивного управления [186—187, 3, 5—11, 135, 138, 139, 140]. Это направление получило значительное развитие главным образом усилиями участников научного семинара при кафедре теоретической кибернетики, руководимого В. А. Якубовичем (кроме упомянутых уже работ сюда относятся [4, 28, 50, 62, 88—90, 99—102, 125, 142—144, 156]). В этих работах изучаются дискретные и непрерывные системы управления, находящиеся под действием произвольных малых и регулярных больших шумов. Рассмотрены задачи идентификации, стабилизации и слежения и ряд других.

Интересные алгоритмы синтеза адаптивного регулятора, не укладывающиеся в рамки метода КСА, приведены в [90, 158, 159, 43, 44].

Использование методов стохастической аппроксимации в целях адаптивного управления вызывает отмеченные в § 5.5 трудности при доказательстве сходимости процедур адаптации. Первой и едва ли не единственной пока работой, в которой делается попытка доказать сходимость стохастической процедуры адаптации для дискретного динамического объекта, является, насколько известно автору, работа [64] (см. также [78]). Перспективным в задачах адаптивного стохастического управления является использование процедур типа фильтра Калмана—Бьюси. Большое число задач в этой области и подходов к их решению приведено в [164].

§ Д.2 следует работе [6]. Доведение до окончательных результатов первого из подходов в задаче об адаптивном регуляторе осуществлено в [10] для случая минимально-фазового объекта, общий случай рассмотрен в [11].

Соображения, близкие к изложенным в § Д.3, применяются во многих работах по адаптивному управлению; принцип исключения в неявной форме использовался в работах [88, 187]. Первый пример § Д.5 написан на основе дипломной работы О. А. Лубчинской, выполненной под руководством автора в 1974 г., второй пример предложен Г. С. Аксеновым и автором, третий составлен по курсовой работе А. Е. Барабанова (1975).

В § Д.6 приводится пример задачи об адаптивном манипуляторе. Автоматическое управление манипуляторами становится важной задачей, диктуемой потребностями техники, и ей уделяется все большее внимание [61]. Возможны различные подходы к задаче об адаптивном управлении манипулятором (см., например, [61, 28, 144, 7, 8, 39, 98]). В § Д.6 перензлагается работа [7]. § Д.7 посвящен краткому изложению подхода к задаче адаптивного управления случайными процессами, развиваемому группой исследователей ВЦ АН СССР под руководством В. Г. Сраговича [149, 129, 38, 58]. Точка зрения В. Г. Сраговича на предмет адаптации по существу тождественна точке зрения, выдвигаемой В. А. Якубовичем, различие проявляется в выборе рассматриваемых задач и еще в большей степени в методах их решения.

1. Автоматический анализ сложных изображений. Сб. пер. под ред. Э. М. Бравермана. М., 1969. 310 с.
2. Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И. Метод потенциалных функций в теории обучения машин. М., 1970. 384 с.
3. Аксенов Г. С. Адаптивный способ построения управления для полностью управляемых простых систем.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1974, с. 85—88.
4. Аксенов Г. С., Брейтман В. М., Зак А. В., Любачевский Б. Д., Пенев Г. Д., Якубович В. А. Адаптивное управление температурой процесса полимеризации в производстве синтетического каучука.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1974, с. 196—202.
5. Аксенов Г. С., Фомин В. Н. О линейных адаптивных системах управления. Ч. I.— В кн.: Методы вычислений, вып. 8. Л., 1973, с. 95—116.
6. Аксенов Г. С., Фомин В. Н. Конечно-сходящиеся алгоритмы в задаче о построении адаптивного регулятора.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1974, с. 113—121.
7. Аксенов Г. С., Фомин В. Н. К задаче об адаптивном управлении манипулятором.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1976, с. 165—168.
8. Аксенов Г. С., Фомин В. Н. Метод конечно-сходящихся алгоритмов в задаче об адаптивном управлении манипулятором.— Рефераты докладов VI Всесоюзного совещания по проблемам управления. Ч. II. М., 1974, с. 119—122.
9. Аксенов Г. С., Фомин В. Н. Об адаптивной стабилизации линейного объекта в условиях сильной априорной неопределенности.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1976, с. 164—167.
10. Аксенов Г. С., Фомин В. Н., Хрящев С. М. О линейных адаптивных системах управления. Ч. II.— В кн.: Методы вычислений, вып. 9. Л., 1974, с. 73—104.
11. Аксенов Г. С., Фомин В. Н., Хрящев С. М. О линейных адаптивных системах управления. Ч. III.— В кн.: Методы вычислений, вып. 10. Л., 1976, с. 164—176.
12. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М., 1963. 500 с.
13. Антонов Г. Е., Катковник В. Я. Метод синтеза одного класса алгоритмов случайного поиска.— «Автоматика в телемеханика», 1971, № 6 с. 154—157.
14. Аркадьев А. Г., Браверман Э. М. Обучение машины классификации объектов. М., 1971. 192 с.
15. Барабаш Ю. Л., Варский Б. В., Зиновьев В. Т., Кириченко В. С., Санегин В. Ф. Вопросы статистической теории распознавания. М., 1967. 400 с.

16. Бонгард М. М. Проблема узнавания. М., 1967. 320 с.
17. Браиловский В. Л., Лунц А. Л. Формулировка задачи распознавания объектов со многими параметрами и методы ее решения. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1964, № 1, с. 20—31.
18. Вазан М. Т. Стохастическая аппроксимация. М., 1972. 296 с.
19. Вайсборд Э. М., Юдин Д. Б. Обзор некоторых результатов в стохастической аппроксимации (Дополнение к переводу монографии М. Вазана «Стохастическая аппроксимация»). М., 1972, с. 244—275.
20. Вапник В. Н. Задача обучения распознаванию образов. М., 1971. 60 с.
21. Вапник В. Н. Машины, обучающиеся распознаванию образов. — В кн.: Алгоритмы обучения распознаванию образов. М., 1973, с. 5—24.
22. Вапник В. Н., Червонеикис А. Я. Теория распознавания образов. М., 1974. 414 с.
23. Васильев В. И. Распознающие системы. Киев, 1969. 292 с.
24. Винер Н. Кибернетика. М., 1968. 327 с.
25. Галушкин А. И. Синтез многослойных систем распознавания образов. М., 1974. 367 с.
26. Гелиг А. Х. Об одном L -оптимальном алгоритме обучения опознающих систем. — В кн.: Вычислительная техника и вопросы кибернетики, вып. 5. Л., 1968, с. 74—79.
27. Гелиг А. Х. Опознающие системы с неограниченной плоской ретиной. — В кн.: Вычислительная техника и вопросы кибернетики, вып. 5. Л., 1968, с. 80—94.
28. Гелиг А. Х. Адаптивная система управления роботом «глаз — рука». — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1976, с. 163—164.
29. Гелиг А. Х., Жукова Л. К. Применение обучаемой опознающей системы для классификации игровых ситуаций. — В кн.: Вычислительная техника и вопросы кибернетики, вып. 6. Л., 1971, с. 99—104.
30. Гелиг А. Х., Якубович В. А. Применение обучаемой опознающей системы для выделения неизвестного сигнала из шума. — В кн.: Вычислительная техника и вопросы кибернетики, вып. 5. Л., 1968, с. 95—100.
31. Гладышев Е. Г. О стохастической аппроксимации. — «Теория вероятностей и ее применение», 1965, т. 10, № 2, с. 297—300.
32. Глушков В. М. Теория обучения одного класса дискретных перцептронов. — Журн. выч. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 2, с. 317—335.
33. Глушков В. М. К вопросу о самообучении в перцептроне. — Журн. выч. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 6, с. 1102—1110.
34. Глушков В. М. Введение в кибернетику. Киев, 1964. 324 с.
35. Горелик А. Л., Скрипкин В. А. Построение систем распознавания. М., 1974. 224 с.
36. Грановская Р. М. Восприятие и модели памяти. Л., 1974. 361 с.
37. Грановская Р. М., Березная И. Я. Запоминание и узнавание фигур. Л., 1974. 96 с.
38. Гурвич Е. Т. О целях адаптивного управления, достигаемых коллективом автоматов. — «Докл. АН СССР», 1974, т. 215, № 6, с. 1293—1296.
39. Гусев С. В., Тимофеев А. В., Якубович В. А. Об одной иерархической системе управления интегральным роботом. — Труды VI Международной конференции по искусственному интеллекту, т. 9. М., 1975, с. 76—85.
40. Девятериков И. П., Пропой А. И., Цыпкин Я. З. О рекуррентных алгоритмах обучения распознаванию образов. — «Автоматика и телемеханика», 1967, № 1, с. 122—133.
41. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н., Введение в минимакс. М., 1972. 368 с.
42. Деревницкий Д. П. Метод исследования динамики дискретных адаптивных систем управления динамическими объектами. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1976, с. 65—73.
43. Деревницкий Д. П. О классе марковских адаптивных систем. — В кн.: Адаптивные системы, вып. 5. Рига, 1974, с. 5—14.

44. Деревицкий Д. П. Стохастическая модель дискретного марковского процесса адаптации. — В кн.: Автоматика и вычислительная техника, вып. 1. Рига, 1975, с. 9—13.
45. Деревицкий Д. П., Рубекин Н. Ф. Адаптивные системы управления непрерывными технологическими процессами в нефтехимии. М., 1975. 50 с.
46. Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л. Две модели для анализа динамики алгоритмов адаптации. — «Автоматика и телемеханика», 1974, № 1, с. 67—75.
47. Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л. Об одном классе адаптивных систем. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1974, с. 62—68.
48. Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л. Анализ динамики некоторых алгоритмов адаптации. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1974, с. 79—84.
49. Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л. Исследование дискретных адаптивных систем управления динамическими объектами с помощью непрерывных моделей. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1975, № 5, с. 93—99.
50. Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л., Якубович В. А. Адаптивная стабилизация нелинейного объекта в условиях помех. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1976, с. 124—129.
51. Дорофеюк А. А. Обучение машины распознаванию образов без поощрения. — В кн.: Вопросы технической кибернетики. М., 1966, с. 102—115.
52. Дорофеюк А. А. Алгоритмы автоматической классификации. — «Автоматика и телемеханика», 1971, № 12, с. 78—122.
53. Еремин И. И. Релаксационный метод решения систем неравенств с выпуклыми функциями в левых частях. — «Докл. АН СССР», 1965, т. 160, № 5, с. 994—996.
54. Ермольев Ю. М. О методе обобщенных стохастических градиентов и стохастических квазифейеровских последовательностях. — «Кибернетика», 1969, № 2, с. 73—83.
55. Живоглядов В. П., Медведев А. В. Непараметрические алгоритмы адаптации. Фрунзе, 1974, с. 134.
56. Завалишин Н. В., Мучник И. Б. Модели зрительного восприятия и алгоритмы анализа изображений. М., 1974. 344 с.
57. Загоруйко Н. Г. Методы распознавания и их применение. М., 1972. 206 с.
58. Засухин В. С. Адаптивные системы управления марковскими цепями с доходами. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1973, № 5, с. 99—107.
59. Ивахненко А. Г. Самообучающиеся системы распознавания и автоматического управления. Киев, 1969. 391 с.
60. Ивахненко А. Г. Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике. Киев, 1971. 370 с.
61. Игнатьев М. Б., Кулаков Ф. М., Погровский А. М. Алгоритмы управления роботами-манипуляторами. Л., 1972. 247 с.
62. Кадырова Н. О., Соколов Б. М., Студенников А. И. Адаптивная стабилизация обращенного маятника. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1976, с. 114—118.
63. Катковник В. Я. Задача аппроксимации функции многих переменных. — «Автоматика и телемеханика», 1971, № 2, с. 181—185.
64. Катковник В. Я., Кульчицкий О. Ю. Адаптивная стабилизация дискретной линейной динамической системы, возмущаемой случайным шумом. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1976, с. 104—109.
65. Катковник В. Я., Первозванский А. А. Методы поиска экстремума и задача синтеза многомерных систем управления. — В кн.: Адаптивные автоматические системы. М., 1972, с. 17—42.

66. Кнррин Н. Е. Вычислительные методы теории оптимального управления. Л., 1968. 143 с.
67. Козинец Б. Н. Об одном алгоритме обучения линейного перцептрона. — В кн.: Вычислительная техника и вопросы программирования, вып. 3. Л., 1964, с. 80—83.
68. Козинец Б. Н. Рекуррентный алгоритм разделения двух множеств. — В кн.: Алгоритм обучения распознаванию образов. М., 1973, с. 43—49.
69. Козинец Б. Н., Ланцман Р. М., Якубович В. А. Об одном кибернетическом методе исследования в криминалистической экспертизе почерка. — В кн.: Кибернетика и судебная экспертиза, вып. 2. Вильнюс, 1966, с. 15—35.
70. Ковалевский В. А. Задача распознавания образов с точки зрения математической статистики. — В кн.: Читающие автоматы. Киев, 1965, с. 8—37.
71. Ковалевский В. А. Современное состояние проблемы распознавания образов. — «Кибернетика», 1967, № 5, с. 78—86.
72. Ковалевский В. А. Статистические методы распознавания. — В кн.: Автоматическое распознавание слуховых образов (АРСО—IV). Киев—Канев, 1968, с. 5—20.
73. Ковалевский В. А. Распознавание образов: эвристика или наука? Киев, 1970. 33 с.
74. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М., 1974. 119 с.
75. Красулина Т. П. Замечание о некоторых процессах стохастической аппроксимации. — «Теория вероятностей и ее приложения», 1962, № 7, с. 108—113.
76. Красулина Т. П. О процессе Роббинса—Монро в случае нескольких корней. — «Теория вероятностей и ее приложения». — 1967, № 12, с. 386—390.
77. Красулина Т. П. Исследование асимптотических свойств алгоритмов метода потенциальных функций, предназначенных для восстановления характеристик объектов по наблюдаемым значениям. — «Автоматика и телемеханика», 1968, № 2, с. 114—121.
78. Красулина Т. П. О применении алгоритмов стохастической аппроксимации к задачам автоматического управления при наличии сильных помех. — «Автоматика и телемеханика», 1969, № 5, с. 104—107.
79. Кульчицкий О. М. Метод построения и сходимости одного алгоритма случайного поиска в гильбертовом пространстве. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1972, № 5, с. 27—34.
80. Кульчицкий О. М. Алгоритмы случайного поиска в функциональном пространстве. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1974, с. 91—93.
81. Ланцман Р. М. Кибернетика и криминалистическая экспертиза почерка. М., 1968. 94 с.
82. Левин М. Ю., Фомин В. Н. Рекуррентные процедуры в задаче самообучения. — «Вестник Ленингр. ун-та», 1974, № 19, с. 51—58.
83. Левин М. Ю., Фомин В. Н. Сходимость рекуррентных процедур в задаче обучения без учителя. — «Вестник Ленингр. ун-та», 1975, № 7, с. 35—42.
84. Литваков Б. М. О сходимости рекуррентных алгоритмов обучения распознаванию образов. — «Автоматика и телемеханика», 1968, № 1, с. 142—150.
85. Литваков Б. М. Экстремальный подход к определению условий сходимости алгоритмов метода потенциальных функций. — «Автоматика и телемеханика», 1969, № 9, с. 98—108.
86. Логинов Н. В. Методы стохастической аппроксимации. — «Автоматика и телемеханика», 1966, № 4, с. 185—204.
87. Лозе В. Теория вероятностей. М., 1962. 717 с.

88. Любачевский Б. Д. Рекуррентный алгоритм адаптивного управления линейным дискретным динамическим объектом. — «Автоматика и телемеханика», 1974, № 3, с. 83—84.
89. Любачевский Б. Д. Один метод построения адаптивного управления для динамического объекта. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1974, с. 69—74.
90. Любачевский Б. Д., Якубович В. А. Адаптивное управление устойчивыми динамическими объектами. — «Автоматика и телемеханика», 1974, № 4, с. 116—127.
91. Мазуров Вл. Д. О построении комитета системы выпуклых неравенств. — «Кибернетика», 1967, № 2, с. 56—59.
92. Мазуров Вл. Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания. — «Кибернетика», 1971, № 3, с. 140—146.
93. Минский М., Пейперт С. Перцептроны. М., 1971. 261 с.
94. Моделирование обучения и поведения. (Сборник работ, посвященный памяти М. М. Бонгарда). М., 1975. 239 с.
95. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М., 1972. 304 с.
96. Неймарк Ю. И., Баталова З. С., Васин Ю. Г., Брейдо М. Д. Распознавание образов и медицинская диагностика. М., 1972. 328 с.
97. Нильсон Н. Обучающиеся машины. М., 1967. 180 с.
98. Павлов В. А., Тимофеев А. В. Об одном методе управления роботом-манипулятором, способным обходить препятствия. — В кн.: Теория, принципы устройства и применение роботов-манипуляторов (Материалы V Всесоюзного симпозиума). М.—Л., 1974, с. 170—180.
99. Пенев Г. Д. Об одном классе адаптивных систем «с учителем». — «Вестник Ленингр. ун-та», 1971, № 19, с. 46—51.
100. Пенев Г. Д. Некоторые задачи синтеза адаптивного управления динамическими объектами. — В кн.: Методы вычислений, вып. 9. Л., 1974, с. 105—115.
101. Пенев Г. Д. Адаптивная стабилизация одного класса нелинейных и нестационарных динамических систем. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1976, с. 94—99.
102. Пенев Г. Д., Якубович В. А. О некоторых задачах адаптивного управления. — «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 4, с. 787—790.
103. Первозванский А. А. Распознавание абстрактных образов как задача линейного программирования. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1965, № 4, с. 41—44.
104. Первозванский А. А. Поиск. М., 1970. 263 с.
105. Пересада В. П. Автоматическое распознавание образов. Л., 1970. 90 с.
106. Перцептрон — система распознавания. Под общ. ред. А. Г. Ивахненко. Киев, 1975. 418 с.
107. Позняк А. С. Обучающиеся автоматы в задачах стохастического программирования. — «Автоматика и телемеханика», 1973, № 10, с. 84—96.
108. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения. — «Автоматика и телемеханика», 1973, № 3, с. 45—68.
109. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Потенциальные возможности алгоритмов адаптации. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1976, с. 7—19.
110. Райбман Н. С., Чадеев В. М. Адаптивные модели в системах управления. М., 1966. 159 с.
111. Распознавание образов при помощи цифровых вычислительных машин. Сб. обзоров под ред. Л. Хармона. М., 1974. 164 с.
112. Растрнин Л. А. Системы экстремального управления. М., 1974. 630 с.
113. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики (перцептроны и теория механизмов мозга). М., 1965. 480 с.

114. Розенблатт Ф. Стратегические подходы к исследованию моделей мозга. — В кн.: Принципы самоорганизации. М., 1966, с. 469—490.
115. Розенфельд А. Распознавание и обработка изображений. М., 1972. 230 с.
116. Рубинштейн Я. С. Сопоставление случайного поиска и стохастической аппроксимации. — В кн.: Теория и применение случайного поиска. Рига, 1968, с. 118—145.
117. Рубинштейн Д. С. Случайный поиск и процедура Дворецкого. — В кн.: Проблемы случайного поиска, вып. 1. Рига, 1972, с. 59—64.
118. Ружанский В. И. Алгоритм для распознавания знаков. — В кн.: Вычислительная техника и вопросы программирования, вып. 3. Л., 1964, с. 63—68.
119. Ружанский В. И. Некоторые алгоритмы обучения «без поощрения» распознающих автоматов. — В кн.: Вычислительная техника и вопросы программирования, вып. 4. Л., 1965, с. 75—84.
120. Ружанский В. И., Фрадков А. Л. Об одном алгоритме самообучения распознающих систем. — В кн.: Вычислительная техника и вопросы кибернетики, вып. 6. Л., 1971, с. 88—98.
121. Себестиан Г. С. Процессы принятия решений при распознавании образов. Киев, 1955. 151 с.
122. Соколов Б. М. Градиентный алгоритм обучения опознающей системы. — В кн.: Методы вычислений, вып. 4. Л., 1967, с. 137—143.
123. Соколов Б. М. Кусочно-линейная решающая функция в случае большого числа разделяемых классов. — В кн.: Методы вычислений, вып. 7. Л., 1967, с. 121—124.
124. Соколов Б. М. Обучаемая система сегментации речевого потока. — В кн.: Методы вычислений, вып. 7. Л., 1967, с. 125—128.
125. Соколов Б. М. Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения неравенств в некоторых задачах автоматического управления. — В кн.: Вычислительная техника и вопросы кибернетики, вып. 7. Л., 1970, с. 126—133.
126. Сочивко В. П. Опознающие устройства (обзор отечественной и зарубежной литературы). Л., 1963. 79 с.
127. Сочивко В. П. Распознавание образов при помощи вычислительных машин. — В кн.: Итоги науки. Серия Математика. Теория вероятностей. Математическая статистика. 1964 г. М., 1966, с. 72—123.
128. Срагович В. Г. Адаптивные системы и автоматы. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1974, с. 31—37.
129. Срагович В. Г. Теория адаптивных систем. М., 1976. 240 с.
130. Стратонович Р. Л. Существует ли теория синтеза оптимальных адаптивных, самообучающихся и самонастраивающихся систем? — «Автоматика и телемеханика», 1968, № 1, с. 96—107.
131. Стратонович Р. Л. Оптимальные алгоритмы распознавания. — «Автоматика и телемеханика», 1968, № 2, с. 110—113.
132. Стратонович Р. Л. Об оптимальных алгоритмах типа стохастической аппроксимации. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1970, № 1, с. 24—32.
133. Стратонович Р. Л. Принципы адаптивного приема. М., 1973. 141 с.
134. Тимофеев А. В. Об одном классе полиномиальных разделяющих функций в задачах опознания и диагностики. — В кн.: Методы вычислений, вып. 7. Л., 1971, с. 106—120.
135. Тимофеев А. В. Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы адаптивной идентификации дискретных динамических объектов. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1973, № 5, с. 206—213.
136. Тимофеев А. В. Нелинейные методы оценки информативности метеорологических параметров и классификация метеорологических явлений (функциональные методы и алгоритмы). — «Метеорология и гидрология», 1973, № 7, с. 36—46.

137. Тимофеев А. В. Математическая модель инвариантного восприятия и опознавания по группам преобразований. — В кн.: Вычислительная техника и кибернетика, вып. 22. Киев, 1974, с. 47—56.
138. Тимофеев А. В. Оптимальные конечно-сходящиеся алгоритмы адаптивной идентификации линейных динамических объектов. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1974, с. 75—78.
139. Тимофеев А. В. Локально-оптимальные конечно-сходящиеся алгоритмы адаптации. — В кн.: Дискретные системы. Киев, 1975, с. 16—28.
140. Тимофеев А. В. Конечно-сходящиеся локально-оптимальные алгоритмы решения неравенств, возникающих в задачах синтеза адаптивных систем. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1975, № 4, с. 9—20.
141. Тимофеев А. В., Удовченко С. П., Харнчев В. В., Шмидт А. А. Полные и непрерывные системы инвариантов в задаче распознавания изображений. — «Вестник Ленингр. ун-та», 1972, № 19, с. 142—144.
142. Тимофеев А. В., Якубович В. А. Об одном классе самообучающихся систем, обладающих целесообразным поведением. — В кн.: Управление и информационные процессы в живой природе. М., 1971, с. 111—115.
143. Тимофеев А. В., Якубович В. А. Об одном классе адаптивных моделей человека-оператора в системах управления. — «Автоматика», 1974, № 1, с. 52—66.
144. Тимофеев А. В., Якубович В. А. Адаптивное управление программным движением робота-манипулятора. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1976, с. 170—174.
145. Файн В. С. Опознавание изображений. М., 1971. 296 с.
146. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1966. 623 с.
147. Фельдбаум А. А. О проблемах дуального управления. — В кн.: Методы оптимизации автоматических систем. М., 1972, с. 89—108.
148. Фельдбаум А. А. Процессы обучения людей и автоматов. — В кн.: Методы оптимизации автоматических систем. М., 1972, с. 109—147.
149. Флеров Ю. А. Обзор исследований по адаптивным системам в Вычислительном Центре АН СССР. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1974, с. 38—45.
150. Фомин В. Н. Об одном алгоритме опознающих систем. — В кн.: Вычислительная техника и вопросы программирования, вып. 4. Л., 1965, с. 72—75.
151. Фомин В. Н. Стохастические аналоги конечно-сходящихся алгоритмов обучения опознающих систем. — В кн.: Вычислительная техника и вопросы программирования, вып. 6. Л., 1971, с. 68—87.
152. Фомин В. Н. Алгоритм нахождения кратчайшего расстояния от заданной точки до выпуклого многогранника и его применение в задаче о распознавании образов. — В кн.: Методы вычислений, вып. 7. Л., 1971, с. 97—105.
153. Фомин В. Н. Об одном рекуррентном алгоритме нахождения гиперплоскости, разделяющей выпуклые множества на единичном кубе. — В кн.: Алгоритмы обучения распознаванию образов. М., 1973, с. 85—88.
154. Фомин В. Н., Холопов А. А. Рекуррентные процедуры построения комитета неравенств. — «Вестник Ленингр. унта», 1976, № 1, с. 64—68.
155. Фомин В. Н., Якубович В. А. Обучаемые опознающие системы и рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы. — В кн.: Алгоритмы обучения распознаванию образов. М., 1973, с. 29—42.
156. Фрадков А. Л. К задаче синтеза самообучающихся распознающих систем. — «Вестник Ленингр. ун-та», 1972, № 19, с. 70—76.
157. Фрадков А. Л. Некоторые конечно-сходящиеся алгоритмы решения бесконечных систем неравенств и их применение в теории адаптивных систем. — «Вестник Ленингр. ун-та», 1972, № 19, с. 70—75.

158. Фрадков А. Л. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта. — «Автоматика и телемеханика», 1974, № 12, с. 96—103.
159. Фрадков А. Л. Метод синтеза алгоритмов адаптивной стабилизации многосвязного динамического объекта. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1976, с. 82—85.
160. Француз А. Г. Некоторые вопросы статистической теории опознания образов. — В кн.: Бюника. М., 1966, с. 23—32.
161. Фу К. Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин. М., 1971. 256 с.
162. Харичев В. В., Шмидт А. А., Якубович В. А. Об одной новой задаче распознавания образов. — «Автоматика и телемеханика», 1973, № 1, с. 109—122.
163. Цыпкин Я. З. Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах. — «Автоматика и телемеханика», 1966, № 1, с. 23—61.
164. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968. 309 с.
165. Цыпкин Я. З. А все же существует ли теория синтеза оптимальных систем? — «Автоматика и телемеханика», 1968, № 1, с. 108—115.
166. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающихся систем. М., 1970. 251 с.
167. Цыпкин Я. З. Об одном классе обучающихся систем. — В кн.: Адаптивные обучающиеся системы. М., 1972, с. 43—57.
168. Цыпкин Я. З., Кельманс Г. К. О рекуррентных алгоритмах самообучения. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1967, № 5, с. 78—87.
169. Цыпкин Я. З., Позняк А. С. Обучающиеся конечные автоматы. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1972, № 3, с. 127—140.
170. Шибанов Г. П. Распознавание в системах автоконтроля. М., 1973. 424 с.
171. Шлезингер М. И. О самопроизвольном различении образов. — В кн.: Читающие автоматы. Киев, 1965, с. 24—34.
172. Шлезингер М. И. Самообучение распознаванию образов — теоретические вопросы и алгоритмы. — В кн.: Автоматическое распознавание слуховых образов (АРСО—IV). Киев—Киев, 1968, с. 42—58.
173. Шмидт А. А. Задача о смысловом фильтре при распознавании зрительных образов. — В кн.: Рефераты докладов VI Всесоюзного совещания по проблемам управления. Ч. 111. М., 1974, с. 156—160.
174. Штейнбух К. Автомат и человек. М., 1967. 492 с.
175. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М., 1974. 399 с.
176. Якубович В. А. Машины, обучающиеся распознаванию образов. — В кн.: Методы вычислений, вып. 2. Л., 1963, с. 95—131.
177. Якубович В. А. Некоторые общие принципы построения обучаемых опознающих систем. — В кн.: Вычислительная техника и вопросы программирования, вып. 4. Л., 1965, с. 3—72.
178. Якубович В. А. Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств. — «Докл. АН СССР», 1966, т. 166, № 6, с. 1308—1311.
179. Якубович В. А. Три теоретические схемы обучающихся опознающих систем. — В кн.: Самообучающиеся автоматические системы. М., 1966, с. 21—28.
180. Якубович В. А. К теории адаптивных систем. — «Докл. АН СССР», 1968, т. 183, № 3, с. 518—521.
181. Якубович В. А. Адаптивные системы с многошаговыми целевыми условиями. — «Докл. АН СССР», 1968, т. 183, № 2, с. 303—306.
182. Якубович В. А. Об одной задаче обучения целесообразному поведению. — «Автоматика и телемеханика», 1969, № 8, с. 119—139.
183. Якубович В. А. Конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств и их применение в задачах синтеза адаптивных систем. — «Докл. АН СССР», 1969, т. 189, № 3, с. 495—498.

184. Я кубов ич В. А. О методе адаптивного управления в условиях большой неопределенности. — Труды V Конгресса ИФАК, ч. За, Париж, 1972, с. 1—6.
185. Я кубов ич В. А. Об одном классе адаптивных систем и о результатах моделирования на ЭВМ процесса их самообучения. — В кн.: Механизмы и принципы целенаправленного поведения. М., 1972, с. 50—79.
186. Я кубов ич В. А. Об одном методе построения адаптивного управления линейным динамическим объектом в условиях большой неопределенности. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1974, с. 46—61.
187. Я кубов ич В. А. Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем. — В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., 1976, с. 33—64.
188. A g t o n S. The relaxation method for linear inequalities. — «Canad. J. Math.», 1954, v. 6, N 3, p. 382—392.
189. B l u m J. R. Multidimensional stochastic approximation method. — «Ann. Math. Statistics», 1954, v. 25, N 4, p. 737—744.
190. D v o r e t z k y A. On stochastic approximation. — «Proc. the 3rd Berkeley Symp. Math. Statistics a. Probability», 1956, v. 1, p. 39—55.
191. K i e f e r E., W o l f o w i t z J. Stochastic estimation of the maximum of a regression function. — «Ann. Math. Statistics», 1952, v. 23, N 3, p. 462—466.
192. M o t z k i n T. S., S c h o e n b e r g I. J. The relaxation method for linear inequalities. — «Canad. J. Math.», 1954, v. 6, N 3, p. 393—404.
193. N o v i k o v A. On convergence proofs for perceptrons. — «Proc. Symp. Math. Theory Automats. Polit. Inst. Brooklyn», 1963, v. XII, p. 416—428.
194. R o b b i n s H., M o n r o S. A stochastic approximation method. — «Ann. Math. Statistics», 1951, v. 22, N 1, p. 400—407.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Основные условные обозначения	5
Введение	8
§ В.1. Физиологические модели восприятия и перцептрон Ф. Розенблатта	9
§ В.2. Терминология и обозначения	14
§ В.3. Степень априорной информации о классах изображений	18
<i>Часть первая. МЕТОД КОНЕЧНО-СХОДЯЩИХСЯ АЛГОРИТМОВ</i>	
Глава 1. Детерминированные обучаемые опознающие системы	21
§ 1.1. Задача об экстраполяции функции	—
§ 1.2. Рекуррентные алгоритмы обучения	23
§ 1.3. Среднеквадратичное приближение	27
Глава 2. Алгоритмы обучения с поощрением	34
§ 2.1. Основная теорема	—
§ 2.2. Частные случаи основной теоремы	36
§ 2.3. Доказательство основной теоремы	43
§ 2.4. Замечания к основной теореме	46
§ 2.5. Применение основной теоремы к задаче построения обучаемых опознающих систем	49
§ 2.6. Алгоритм «наилучшего» разделения выпуклых оболочек двух множеств	51
§ 2.7. Алгоритм разделения выпуклых множеств, заданных на единичном кубе	56
Глава 3. Нелинейная разделимость классов изображений	60
§ 3.1. Переход в спрямляющее пространство	61
§ 3.2. Полнота пороговых функций	63
§ 3.3. Понятие о комитете неравенств	65
§ 3.4. Рекуррентные процедуры построения комитета неравенств	69
Глава 4. Некоторые сведения из теории вероятностей	74
§ 4.1. Основная теоретико-вероятностная схема	—
§ 4.2. Сходимость последовательностей случайных величин	77
§ 4.3. Теорема Радона—Никодима	78

§ 4.4. Независимые события и случайные величины	79
§ 4.5. Условные математические ожидания и вероятности	—
§ 4.6. Теорема Дж. Л. Дуба о сходимости супермартингалов	81
§ 4.7. Теорема П. Леви (обобщение закона «нуль или единица» Бореля)	83
Глава 5. Стохастические аналоги конечно-сходящихся алгоритмов	86
§ 5.1. Конечно-сходящиеся алгоритмы в случае стохастически независимой тренировочной последовательности	—
§ 5.2. Стохастический вариант основной теоремы о сходимости алгоритмов обучения с поощрением	88
§ 5.3. Правило останова процесса обучения	91
§ 5.4. Стохастические аналоги рекуррентных процедур построения комитетов неравиеств	94
§ 5.5. Алгоритмы обучения с поощрением и случайный поиск	99
§ 5.6. О многослойных перцептронах	101

*Часть вторая. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
ОБУЧАЕМЫХ ОПОЗНАЮЩИХ СИСТЕМ*

Глава 6. Вероятностная постановка задачи о построении обучаемой опознающей системы	104
§ 6.1. Распознавание образов как задача теории статистических решений	—
§ 6.2. Пример на использование статистических методов	108
§ 6.3. Понятие о последовательном критерии отношения вероятностей Вальда	111
§ 6.4. Оптимальные (байесовы) критерии в многоальтернативной задаче распознавания	117
Глава 7. Методы обучения, основанные на минимизации эмпирического риска	121
§ 7.1. Решающее правило и эмпирический риск	123
§ 7.2. Конечный класс решающих правил	125
§ 7.3. Понятие о функции роста	126
§ 7.4. Достаточные условия равномерной сходимости	129
§ 7.5. Применение теоремы о равномерной сходимости (по вероятности) в теории обучаемых опознающих систем	132
§ 7.6. Об упорядочении класса решающих правил	135

Часть третья. МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Глава 8. Процедура Роббинса — Монро	137
§ 8.1. Постановка задачи	138
§ 8.2. Условие сходимости процедуры Роббинса — Монро	141
§ 8.3. Оценка скорости сходимости процедуры Роббинса — Монро	148
§ 8.4. Псевдоградиентные процедуры стохастической аппроксимации	150
Глава 9. Метод потенциалных функций в теории обучаемых систем	156
§ 9.1. Идея метода и общая рекуррентная процедура	157
§ 9.2. Функционалы, экстремизируемые процедурами метода потенциалных функций	160

§ 9.3. Обучение распознаванию изображений (детерминированная постановка задачи)	162
§ 9.4. О сходимости процедур метода потенциальных функций	163
§ 9.5. Вероятностная постановка задачи обучения	165
§ 9.6. Восстановление плотности вероятности	167
§ 9.7. Непосредственная аппроксимация степени достоверности	170

Часть четвертая. САМООБУЧЕНИЕ

Глава 10. Общая постановка задачи о самообучении	174
§ 10.1. Свойства функционала среднего риска в задаче о самообучении	—
§ 10.2. Рекуррентные процедуры самообучения	179
§ 10.3. Теоремы о сходимости алгоритмов самообучения и идея их доказательства	181
§ 10.4. Доказательство теоремы о сходимости процедуры самообучения	184
§ 10.5. Модификация алгоритма самообучения	187

Дополнение. СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ Д.1. Постановка задачи об адаптивном управлении	191
§ Д.2. Задача об адаптивной стабилизации линейного объекта управления	195
§ Д.3. Алгоритмы функциональной идентификации объекта управления	201
§ Д.4. Принцип исключения в задаче о синтезе адаптивного регулятора	203
§ Д.5. Примеры использования принципа исключения	205
§ Д.6. Задача об адаптивном управлении манипулятором	209
§ Д.7. Общая постановка задачи об адаптивном управлении	212
Комментарии	218
Указатель литературы	224

Фомин Владимир Николаевич

Математическая теория обучаемых опознающих систем

Редактор *Л. К. Бетехтина*

Техн. редактор *Е. Г. Учасва* Корректоры *Е. К. Терентьева, Г. Н. Гуляева*

М-15060. Сдано в набор 2 IV 1976 г. Подписано к печати 26 VIII 1976 г.
Формат бум. 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 3. Уч.-изд. л. 15,36. Печ. л. 14,75.

Бум. л. 7,38. Тираж 4760 экз. Заказ 254. Цена 1 р. 54 к.

Издательство ЛГУ имени А. А. Жданова.

199164, Ленинград, Университетская наб., 7/9.

Типография ЛГУ имени А. А. Жданова.

199164, Ленинград, Университетская наб., 7/9.