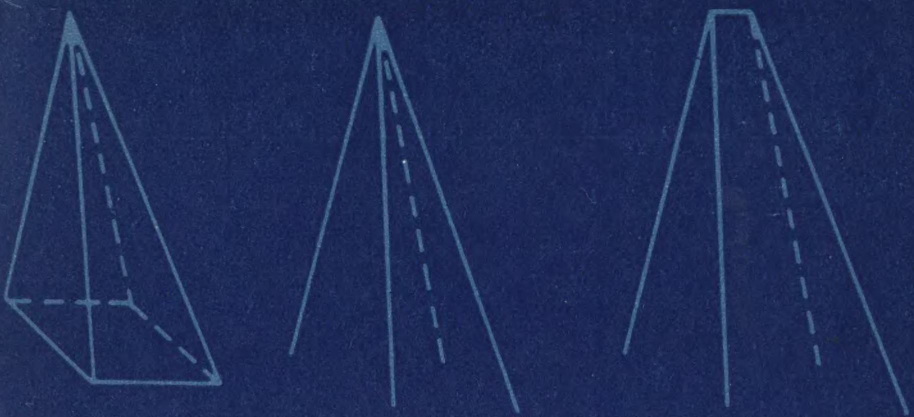
М. К. ГАВУРИН, В. Н. МАЛОЗЕМОВ



ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

М. К. ГАВУРИН, В. Н. МАЛОЗЕМОВ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Учебное пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЛЕНИНГРАД
1984

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета*

УДК 519.85(07)

Гавурин М. К., Малоземов В. Н. **Экстремальные задачи с линейными ограничениями:** Учеб. пособие. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1984. 176 с.

Учебное пособие написано на основе курса лекций, который авторы в течение многих лет читали в Ленинградском университете на математическом отделении факультета повышения квалификации преподавателей вузов. Оно посвящено линейному, квадратичному и дробно-линейному программированию, простейшим задачам выпуклого программирования, линейным и дробно-рациональным чебышевским приближениям. Значительную часть книги занимает изложение материала, недостаточно представленного в учебной и даже монографической литературе.

Пособие предназначено для слушателей ФПК, студентов и аспирантов математических специальностей, инженерно-технических работников, интересующихся теоретическими вопросами математического программирования Библиогр. 75 назв. Ил. 15.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук *И. В. Романовский* (Ленингр. ун-т), канд. физ.-мат. наук *А. А. Корбут* (Ин-т соц.-эконом. проблем АН СССР)

Г $\frac{1502000000-122}{076(02)-84}$ 89—84

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эту книгу можно рассматривать как начальный математический курс по теории конечномерной оптимизации. Основное внимание уделяется в ней линейным экстремальным задачам, или, как чаще говорят, линейному программированию. Из нелинейных задач затрагиваются лишь те, которые тесно связаны с линейными. Однако и их круг достаточно широк. В него входят, например, задачи квадратичного, билинейного и дробно-линейного программирования, линейных и дробно-рациональных чебышевских приближений.

Применительно к указанным задачам обсуждаются традиционные математические вопросы: существование решения, признаки оптимальности, теоремы двойственности, влияние параметров и т. д. Исследование этих вопросов, важное само по себе, играет существенную роль при обосновании свойств алгоритмов.

Значительную часть книги занимает изложение материала, явно недостаточно представленного в учебной и даже монографической литературе. Это прежде всего теоремы существования решения в квадратичном, дробно-линейном и кубическом программировании; теория линейных и дробно-рациональных чебышевских приближений с точки зрения негладкой оптимизации; геометрический анализ вырожденных вершин выпуклого многогранного множества; дробно-линейное программирование на неограниченных множествах.

Алгоритмы решения задач линейного, параметрического и дробно-линейного программирования описаны на содержательном уровне. Авторы стремились возможно более выпукло показать существо рассматриваемых методов, но не имели в виду научить читателя их эффективному применению.

Для общей задачи выпуклой оптимизации и для задачи квадратичного программирования алгоритмы не приводятся. Причиной является то обстоятельство, что в этих областях ситуация еще не определилась, и пока трудно выделить методы, которым бы следовало отдать предпочтение.

В каждом параграфе авторы ставили четкую цель и стремились достичь ее наиболее коротким путем. Некоторые дополнительные вопросы оформлены в виде упражнений, к которым, как правило, даются сжатые ответы. Эти упражнения значительно расширяют содержание книги.

Для записи действий с матрицами и векторами широко используется система обозначений, заимствованная из языка АЛГОЛ-60. Эта система, первоначально созданная для применения в программах для ЭВМ, оказалась чрезвычайно удобной в тех случаях, когда приходится рассматривать части массивов. В математической литературе ее впервые широко применил И. В. Романовский [34].

Полная ссылка на теоремы и формулы состоит из трех чисел Первое число указывает номер главы, второе и третье — номер теоремы или формулы в параграфе. При ссылках внутри главы номер главы опускается.

С известной степенью условности вклад каждого из авторов можно определить следующим образом: М. К. Гавурину принадлежат вводные параграфы ко всем главам, § II.10, III.13, IV.4—IV.7 и Добавление; В. Н. Малоземову — § I.2—I.11, III.2—III.12, IV.2, IV.3 и IV.8. Особое место занимает в книге глава II. В ней рассматриваются наиболее тонкие вопросы: структура выпуклых многогранных множеств, общая схема метода последовательного улучшения плана, параметрическое линейное программирование. Эта глава (за исключением § II.1 и II.10) написана совместно обоими авторами и В. А. Даугавет. Общее редактирование книги и окончательная подготовка ее текста осуществлены В. Н. Малоземовым.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность В. А. Даугавет за сотрудничество и Т. В. Малоземовой за помощь в работе над рукописью.

Июнь 1983 г.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$:=$ — равно по определению;

$1:n$ — множество целых чисел от 1 до n включительно;

$M,\ N$ — конечные индексные множества;

$|M|$ — количество элементов, содержащихся в M;

$\varnothing$ — пустое множество;

$\mathbf{R}^N$ — линейное пространство векторов $x = x[N]$ с компонентами $x[j]$, $j \in N$;

$\mathbf{R}^N_+$ — совокупность векторов из $\mathbf{R}^N$ с неотрицательными компонентами;

$[x_0,\ x_1]$ — отрезок, соединяющий точки x_0 и x_1 (множество векторов вида $x(t) = tx_1 + (1-t)x_0$, $t \in [0,\ 1]$);

$\mathbf{0} = \mathbf{0}[N]$ — нулевой вектор пространства $\mathbf{R}^N$;

$e = e[N]$ — вектор, все компоненты которого равны единице;

$e_k = e_k[N]$, где $k \in N$, — k-й орт (вектор, у которого $e_k[k] = 1$ и $e_k[j] = 0$ при остальных $j \in N$);

$\langle x,\ y\rangle = x[N] \times y[N] = \sum_{j \in N} x[j] \times y[j]$ — скалярное произведение векторов x и y;

$A = A[M,\ N]$ — матрица с элементами $A[i,\ j]$, $i \in M$, $j \in N$;

$A^T = A^T[N,\ M]$ — транспонированная матрица;

$A[M_1,\ N_1]$, где $M_1 \subset M$, $N_1 \subset N$, — подматрица матрицы $A[M,\ N]$;

$v = Ax = A[M,\ N] \times x[N]$ — вектор с компонентами $v[i] = A[i,\ N] \times x[N]$, $i \in M$;

$y = uA = u[M] \times A[M,\ N]$ — вектор с компонентами $y[j] = u[M] \times A[M,\ j]$, $j \in N$;

$E = E[M,\ M]$ — единичная матрица.

ГЛАВА I

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ОСНОВЫ ТЕОРИИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В том круге вопросов, которому посвящена данная книга, видное место занимает линейное программирование. Оно имеет многочисленные практические приложения и играет важную роль при исследовании нелинейных экстремальных задач.

В настоящей главе линейное программирование рассматривается в основном с точки зрения теории линейных неравенств. В § 2, 5 приведены вспомогательные понятия и факты алгебраического и геометрического характера. Собственно теории линейного программирования посвящены § 3, 4, 7—9. Ключевыми являются § 4 и 7, где доказана теорема существования решения и установлен критерий оптимальности.

Теорема существования нетривиальна лишь в случае, когда минимум ищется на неограниченном множестве, т. е. когда не применима теорема Вейерштрасса. В § 4 показано, что задача линейного программирования разрешима тогда и только тогда, когда множество ее планов Ω непусто и целевая функция ограничена снизу на Ω. Более того, если ограничения имеют каноническую форму, то существует оптимальный базисный план. Этим открывается, по крайней мере, в принципе, путь к разысканию минимума с помощью полного перебора базисных планов, число которых конечно.

В § 6 получен критерий разрешимости системы линейных неравенств. Руководящей здесь является идея о связи между свойствами линейных комбинаций Ax столбцов матрицы A и линейных комбинаций uA ее строк. Классический результат такого рода — теорема об условиях разрешимости системы линейных уравнений. Она приведена в § 6 в качестве следствия из теоремы 6.3. Читателю рекомендуется сравнить ее с леммой 6.3.

Критерий оптимальности для задачи линейного программирования установлен в § 7. Он имеет следующую структуру: для того чтобы минимум достигался в точке x_*, необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор u_*, удовлетворяющий некоторой системе линейных равенств и неравенств. Таким образом, в принципе решение задачи линейного программирования сводится к решению системы линейных равенств и неравенств относительно x_* и u_*. В § 8 критерий оптимальности переформулирован в терминах седловой точки функции Лагранжа.

Анализ критерия оптимальности приводит к понятию двойственной задачи. В § 9 изучаются пары двойственных задач линейного программирования. Показывается, что двойственные задачи разрешимы лишь одновременно и минимум в прямой задаче совпадает с максимумом в двойственной. Далее устанавливаются соотношения «дополняющей нежесткости», которые позволяют по решению одной из двойственных задач восстановить решение другой. В частности, появляется возможность выбрать для решения более простую из них. Этим далеко не исчерпываются многообразные применения теории двойственности.

§ 10, 11 посвящены приложениям.

В § 10 рассматриваются простейшие игры — матричные. С помощью теоремы двойственности в линейном программировании получен основной результат теории матричных игр — существование ситуации равновесия.

В § 11 изучается широко распространенная и важная экстремальная задача наилучшего равномерного (чебышевского) приближения непрерывной функции обобщенными полиномами при наличии линейных ограничений на коэффициенты. Доказана теорема существования полинома наилучшего приближения. Вначале это сделано для случая приближения на конечном множестве точек, когда исходная задача сводится к задаче линейного программирования. Введение понятия базисного полинома и обычная техника математического анализа позволяют получить теорему существования в общем случае, когда приближение осуществляется на произвольном компактном множестве евклидова пространства. Попутно установлена сходимость сеточного метода.

§ 2. ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ

Приведем некоторые свойства векторов и матриц, которые в дальнейшем будут систематически использоваться.

1. Пусть $N_1 \subset N$ и $N_2 = N \setminus N_1$. Тогда

$$c[N] \times x[N] = c[N_1] \times x[N_1] + c[N_2] \times x[N_2].$$

Это непосредственно следует из определения скалярного произведения.

2. Если $N_1 \subset N$ и $N_2 = N \setminus N_1$, то

$$A[M, N] \times x[N] = A[M, N_1] \times x[N_1] + A[M, N_2] \times x[N_2].$$

Аналогично, если $M_1 \subset M$ и $M_2 = M \setminus M_1$, то

$$u[M] \times A[M, N] = u[M_1] \times A[M_1, N] + u[M_2] \times A[M_2, N].$$

Доказательство основывается на определении векторов Ax и uA и свойстве 1.

Как следствие получаем соотношения

$$Ax = \sum\nolimits_{j \in N} A[M, j] \times x[j], \quad uA = \sum\nolimits_{i \in M} u[i] \times A[i, N]. \tag{2.1}$$

3. Справедливо равенство

$$u[M] \times (A[M, N] \times x[N]) = (u[M] \times A[M, N]) \times x[N],$$

которое коротко можно записать так: $\langle u, Ax\rangle = \langle uA, x\rangle$.

4. Пусть $N_1 \subset N$, $M_1 \subset M$. Тогда

$$E[N_1, N] \times x[N] = x[N_1],$$
$$u[M] \times E[M, M_1] = u[M_1].$$

Неравенства между векторами понимаются как покомпонентные отношения. Таким образом, запись $x[N] \geqslant y[N]$ означает, что $x[j] \geqslant y[j]$ при всех $j \in N$.

§ 3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейная экстремальная задача, или, как чаще говорят, общая задача линейного программирования, ставится следующим образом: минимизировать линейную форму $f(x) = c[N] \times x[N]$ на множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, определяемом линейными соотношениями

$$A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1],$$
$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2],$$
$$x[N_1] \geq \mathbf{0}[N_1],$$

где $N_1 \subset N$ и M_1, M_2 — непересекающиеся индексные множества. На матрицу A и векторы c, b не накладывается никаких ограничений. В принятых обозначениях задачу можно записать так:

$$f(x) \to \min_{x \in \Omega}. \tag{3.1}$$

Любой вектор x, принадлежащий Ω, называется планом, функция f — целевой функцией, а план, на котором достигается минимум целевой функции, — оптимальным планом. Оптимальный план не всегда существует. Это видно на примере функции одного аргумента $f(x) = x$, когда в качестве Ω берется вся вещественная прямая. Если же оптимальный план существует, то исходная задача называется разрешимой.

Среди линейных экстремальных задач выделяют задачу с ограничениями в канонической форме записи:

$$c[N]\times x[N]\to\min,$$
$$A[M,\ N]\times x[N]=b[M],$$
$$x[N]\geqslant 0[N].$$

Нашей ближайшей целью является доказательство того, что любую линейную экстремальную задачу можно свести к аналогичной задаче с ограничениями в канонической форме записи.

Предварительно введем общее понятие эквивалентных экстремальных задач. Пусть F, G — произвольные функции, заданные на произвольных множествах P, Q соответственно. Экстремальные задачи

$$F(u)\to\min_{u\in P},\quad G(v)\to\min_{v\in Q} \tag{3.2}$$

называются эквивалентными, если существуют отображения $\varphi: P\to Q$ и $\psi: Q\to P$, такие, что

$$\begin{aligned} &G(\varphi(u))\leqslant F(u) \quad \text{при всех } u\in P,\\ &F(\psi(v))\leqslant G(v) \quad \text{при всех } v\in Q. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Другими словами, две задачи на минимум эквивалентны, если любому плану одной из них можно сопоставить план другой с равным или меньшим значением целевой функции.

Лемма 3.1. Экстремальные задачи (3.2) эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\inf_{u\in P} F(u)=\inf_{v\in Q} G(v) \tag{3.4}$$

и когда обе эти задачи одновременно либо разрешимы, либо нет.

Доказательство. Введем обозначения

$$\mu=\inf_{u\in P} F(u),\quad \varkappa=\inf_{v\in Q} G(v).$$

Допустим, что задачи (3.2) эквивалентны. Тогда

$$\begin{aligned} &F(u)\geqslant G(\varphi(u))\geqslant\varkappa \quad \text{при всех } u\in P,\\ &G(v)\geqslant F(\psi(v))\geqslant\mu \quad \text{при всех } v\in Q. \end{aligned}$$

Отсюда следуют неравенства $\mu\geqslant\varkappa$, $\varkappa\geqslant\mu$, приводящие к (3.4). Если $u_*\in P$ — точка минимума функции F, то $v_*:=\varphi(u_*)$ принадлежит Q и

$$\varkappa\leqslant G(v_*)\leqslant F(u_*)=\mu=\varkappa,$$

т. е. v_* доставляет минимум функции G. Столь же очевидно, что точке минимума $v_*\in Q$ функции G соответствует точка $u_*=\psi(v_*)$ из P, доставляющая минимум функции F. Тем самым показано, что задачи (3.2) одновременно либо разрешимы, либо нет.

Переходим к обратному утверждению. Если задачи (3.2) разрешимы и u_*, v_* — их оптимальные планы, то можно положить $\varphi(u)=v_*$ при всех $u\in P$, $\psi(v)=u_*$ при всех $v\in Q$. В силу (3.4) задачи (3.2) будут эквивалентными. Допустим, что задачи (3.2) не имеют решений. Зафиксируем $u\in P$. Поскольку $F(u)>\mu=\varkappa$, то найдется элемент $v\in Q$, на котором $F(u)\geqslant G(v)$. Его и возьмем в качестве $\varphi(u)$. Аналогичным образом определяется отображение ψ. В этом случае выполняются соотношения (3.3), гарантирующие эквивалентность задач (3.2). Лемма доказана.

Замечание. Введенное определение эквивалентности не следует абсолютизировать. С одной стороны, оно слишком широкое, так как формулируется в терминах произвольных отображений φ, ψ. С другой — узкое, поскольку не включает, например, содержательно эквивалентные экстремальные задачи, различающиеся лишь постоянным слагаемым или положительным постоянным множителем в целевой функции. Однако указанного определения достаточно для наших целей.

Вернемся к линейной экстремальной задаче (3.1). Обозначим $N_2=N\setminus N_1$, $M=M_1\cup M_2$ и возьмем произвольный план x_0. Имеем $x_0[N_2]=y_0[N_2]-z_0[N_2]$, где $y_0[j]=\max\{x_0[j],\ 0\}$, $z_0[j]=\max\{-x_0[j],\ 0\}$ при $j\in N_2$. Очевидно, что $y_0[N_2]\geqslant\geqslant 0[N_2]$, $z_0[N_2]\geqslant 0[N_2]$. Положим далее

$$w_0[M_1]=A[M_1,\ N]\times x_0[N]-b[M_1].$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
A[M_1,\ N_1]\times x_0[N_1]+A[M_1,\ N_2]\times y_0[N_2]-\\
-A[M_1,\ N_2]\times z_0[N_2]-w_0[M_1]=b[M_1],\\
A[M_2,\ N_1]\times x_0[N_1]+A[M_2,\ N_2]\times y_0[N_2]-\\
-A[M_2,\ N_2]\times z_0[N_2]=b[M_2],\\
x_0[N_1]\geqslant 0[N_1],\ y_0[N_2]\geqslant 0[N_2],\ z_0[N_2]\geqslant 0[N_2],\\
w_0[M_1]\geqslant 0[M_1].
\end{gathered}$$

Введем матрицу

$$A_0=\begin{pmatrix} A[M_1,\ N_1] & A[M_1,\ N_2] & -A[M_1,\ N_2] & -E[M_1,\ M_1]\\ A[M_2,\ N_1] & A[M_2,\ N_2] & -A[M_2,\ N_2] & 0[M_2,\ M_1]\end{pmatrix}$$

и вектор $c_0=(c[N_1],\ c[N_2],\ -c[N_2],\ 0[M_1])$. Матрицу A_0 можно представить в более компактном виде:

$$A_0=(A[M,\ N_1],\ A[M,\ N_2],\ -A[M,\ N_2],\ -E[M,\ M_1]).$$

Теорема 3.1. Линейная экстремальная задача (3.1) эквивалентна следующей задаче линейного программирования с ограничениями в канонической форме записи:

$$\begin{gathered}\langle c_0,\ v\rangle\to\min,\\ A_0v=b,\ v\geqslant 0.\end{gathered}\tag{3.5}$$

Доказательство. **Плану x_0 задачи (3.1) сопоставим** вектор $v_0=(x_0[N_1],\ y_0[N_2],\ z_0[N_2],\ w_0[M_1])$. По построению v_0 является планом задачи (3.5) и

$$\langle c_0,\ v_0\rangle = c\,[N_1]\times x_0\,[N_1]+c\,[N_2]\times(y_0\,[N_2]-z_0\,[N_2])= \\ = c\,[N]\times x_0\,[N].$$

Обратно, возьмем план $v_0=(v_0[N_1],\ y_0[N_2],\ z_0[N_2],\ w_0[M_1])$ задачи (3.5). Сопоставим ему вектор $x_0=x_0[N]$ с компонентами $x_0[j]=v_0[j]$ при $j\in N_1$, $x_0[j]=y_0[j]-z_0[j]$ при $j\in N_2$. Нетрудно понять, что x_0 является планом задачи (3.1) и $c[N]\times x_0[N]= =<c_0,\ v_0>$. Теорема доказана.

Из леммы 3.1 следует, в частности, что задачи (3.1) и (3.5) одновременно либо разрешимы, либо нет.

Упражнения

3.1. Доказать, что минимаксная задача

$$\Phi(x):=\max_{i\in I} F_i(x)\to\min_{x\in P}$$

эквивалентна задаче

$$u\to\min,$$
$$F_i(x)\leqslant u,\quad i\in I;\quad x\in P.$$

3.2. Доказать, что экстремальная задача

$$\sum\nolimits_{i\in I}|f_i(x)|\to\min_{x\in P}$$

эквивалентна задаче

$$\sum\nolimits_{i\in I}(u_i+v_i)\to\min,$$
$$f_i(x)=u_i-v_i,\quad u_i\geqslant 0,\quad v_i\geqslant 0,\quad i\in I;\quad x\in P.$$

3.3. Проверить, что у экстремальных задач

$$F(x)\to\max_{x\in P},\qquad -F(x)\to\min_{x\in P}$$

множества оптимальных планов совпадают, а экстремальные значения целевых функций различаются лишь знаком.

§ 4. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Вначале рассмотрим задачу линейного программирования с ограничениями в канонической форме записи:

$$\begin{aligned} f(x):=c\,[N]\times x\,[N]&\to\min,\\ A\,[M,\ N]\times x\,[N]&=b\,[M],\\ x\,[N]&\geqslant 0\,[N]. \end{aligned}\tag{4.1}$$

Множество ее планов Ω может быть неограниченным. Выделим в Ω наиболее существенные планы.

Определение. План x с носителем

$$N_+(x) = \{j \in N \mid x[j] > 0\}$$

называется базисным, если столбцы $A_j = A[M, j]$ при $j \in N_+(x)$ линейно независимы.

При $b = \mathbf{0}$ вектор $x = \mathbf{0}$ является планом. Нулевой план по определению считается базисным.

Ненулевой базисный план x с носителем $N_+ = N_+(x)$ согласно (2.1) удовлетворяет соотношениям

$$\sum\nolimits_{j \in N_+} x[j] A_j = b,$$
$$x[j] > 0, \quad j \in N_+; \quad x[j] = 0, \quad j \in N \setminus N_+,$$

и линейная однородная система

$$\sum\nolimits_{j \in N_+} z[j] A_j = \mathbf{0},$$

которую можно переписать в виде

$$A[M, N_+] \times z[N_+] = \mathbf{0}[M], \tag{4.2}$$

имеет только нулевое решение.

Теорема 4.1. Если множество планов Ω задачи (4.1) непусто и целевая функция ограничена снизу на Ω, то существует оптимальный базисный план.

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 4.1. Пусть выполнены условия теоремы, $b \neq \mathbf{0}$ и x_0 — некоторый план. Тогда существует базисный план y_0, такой, что $\langle c, x_0 \rangle \geqslant \langle c, y_0 \rangle$.

Доказательство. Поскольку $b \neq \mathbf{0}$, то $x_0 \neq \mathbf{0}$. Положим $N_+ = N_+(x_0)$ и рассмотрим систему (4.2). Если она имеет только нулевое решение, то лемма тривиальна — достаточно положить $y_0 = x_0$. Поэтому предположим, что система (4.2) имеет ненулевое решение $z_0[N_+]$. Доопределив $z_0[N \setminus N_+] = \mathbf{0}[N \setminus N_+]$, получим ненулевой вектор $z_0 = z_0[N]$, удовлетворяющий условию $Az_0 = \mathbf{0}$.

Возможны два случая.

I. $c[N] \times z_0[N] = 0$. В силу однородности условий можно считать, что хотя бы одна компонента вектора z_0 положительна (иначе z_0 следует заменить на $-z_0$). Введем новый вектор $x_1 = x_0 - t_0 z_0$, где

$$t_0 := \min\{x_0[j]/z_0[j] \mid j \in N_+, \ z_0[j] > 0\} > 0. \tag{4.3}$$

Нетрудно проверить, что x_1 — план задачи (4.1), $\langle c, x_1 \rangle = \langle c, x_0 \rangle$ и количество ненулевых компонент у x_1 меньше, чем у x_0.

II. $c[N] \times z_0[N] \neq 0$. Можно считать, что $\langle c, z_0 \rangle > 0$. Тогда у z_0 хотя бы одна компонента необходимо положительна. Действительно, в противном случае вектор $x(t)=x_0-tz_0$ при любом $t\geqslant 0$ будет планом, а поскольку

$$\langle c,\ x\ (t)\rangle=\langle c,\ x_0\rangle-t\langle c,\ z_0\rangle,$$

то целевая функция окажется неограниченной снизу на Ω.

Положив $x_1=x(t_0)$, где t_0 определяется формулой (4.3), получим, что x_1 — план задачи (4.1), у которого количество положительных компонент меньше, чем у x_0, и $\langle c,\ x_1\rangle<\langle c,\ x_0\rangle$.

Таким образом, наличие ненулевого решения у системы (4.2) дает возможность построить новый план x_1, такой, что $\langle c,\ x_1\rangle\leqslant\langle c,\ x_0\rangle$ и носитель $N_+(x_1)$ строго содержится в $N_+(x_0)$.

К x_1 можно применить те же рассуждения, что и к x_0. Повторив эту процедуру конечное число раз, придем к требуемому базисному плану y_0. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Если $b=0$, то $\langle c,\ x\rangle\geqslant 0$ при всех $x\in\Omega$ в силу ограниченности снизу целевой функции. В этом случае оптимальным базисным планом является $x_*=0$.

Пусть $b\neq 0$. По лемме 4.1 хотя бы один базисный план существует. Покажем, что их может быть лишь конечное число. Для этого достаточно проверить, что различным базисным планам соответствуют различные носители. Допустим, вопреки утверждению, что найдутся два базисных плана $y_0\neq y_1$ с одинаковыми носителями $N_+(y_0)=N_+(y_1)=N_+$. Тогда

$$\sum\nolimits_{j\in N_+}y_0[j]\,A_j=b,\qquad \sum\nolimits_{j\in N_+}y_1\,[j]\,A_j=b,$$

откуда следует, что

$$\sum\nolimits_{j\in N_+}(y_0\,[j]-y_1\,[j])\,A_j=0.$$

Но это противоречит определению базисного плана, поскольку не все коэффициенты $z[j]=y_0[j]-y_1[j]$, $j\in N_+$, равны нулю.

Показано, что множество Ω содержит лишь конечное число базисных планов $y_0, y_1, \ldots, y_p$. Обозначим x_* тот из них, на котором

$$\langle c,\ x_*\rangle=\min_{k\in 0:p}\langle c,\ y_k\rangle.$$

Согласно лемме 4.1 $\langle c,\ x\rangle\geqslant\langle c,\ x_*\rangle$ при всех $x\in\Omega$, так что x_* — оптимальный базисный план. Теорема доказана.

Более того, установлено, что решение задачи (4.1) можно искать только среди базисных планов; базисный план с наименьшим значением целевой функции является оптимальным. Дальнейшему развитию этой идеи посвящен § II.6.

Обратимся к общей задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} &c[N] \times x[N] \to \min, \\ &A[M_1, N] \times x[N] \geqslant b[M_1], \\ &A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2], \\ &x[N_1] \geqslant 0[N_1]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Теорема 4.2. Задача (4.4) разрешима тогда и только тогда, когда множество ее планов Ω непусто и целевая функция ограничена снизу на Ω.

Доказательство. Необходимость тривиальна. Достаточность следует из теорем 3.1 и 4.1.

Упражнения

4.1. Пусть x — базисный план задачи (4.1) и $N_+(x)$ — его носитель. Показать, что $|N_+(x)| \leqslant |M|$.

4.2. Решить линейную экстремальную задачу

$$\begin{aligned} -x[1] + x[2] - x[3] &\to \min, \\ x[1] + x[2] + 2x[3] &= 2, \\ 2x[1] - x[2] + x[3] &= 1, \\ x[1] \geqslant 0, \ x[2] \geqslant 0, \ x[3] &\geqslant 0. \end{aligned}$$

§ 5. СТРОГАЯ ОТДЕЛИМОСТЬ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Наша очередная цель — получить критерий непустоты множества планов общей задачи линейного программирования. Для этого потребуются некоторые вспомогательные сведения.

Обозначим $\|x\|$ евклидову норму вектора $x = x[N]$. Таким образом,

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum\nolimits_{j \in N} x[j] \times x[j]\right)^{1/2}.$$

Напомним основные свойства евклидовой нормы:

I. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$;

II. $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$ при любом вещественном t;

III. $\langle x, y\rangle \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$;

IV. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Неравенства III, IV называются соответственно неравенством Коши и неравенством треугольника. Полезно отметить, что при ненулевых x, y они обращаются в равенства лишь тогда, когда $x/\|x\| = y/\|y\|$, т. е. когда x и y лежат на одном луче, выходящем из начала координат. Проверим это.

В случае $\|x\| = \|y\| = 1$ имеем

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, \ x - y\rangle = 2 - 2\langle x, y\rangle,$$

откуда

$$\langle x, y\rangle = 1 - \|x - y\|^2/2. \tag{5.1}$$

Пусть x, y — произвольные ненулевые векторы. Тогда, заменив в (5.1) x на $x/\|x\|$ и y на $y/\|y\|$, получим

$$\langle x, y\rangle = (1 - \|x/\|x\| - y/\|y\|\|^2/2)\|x\|\cdot\|y\|. \tag{5.2}$$

Из (5.2) следует как неравенство Коши, так и условие обращения его в равенство.

Что касается неравенства треугольника, то после возведения в квадрат оно становится эквивалентным неравенству Коши.

Сделаем два замечания. Во-первых,

$$-\langle x, y\rangle = \langle -x, y\rangle \leqslant \|-x\|\cdot\|y\| = \|x\|\cdot\|y\|.$$

Объединяя это с III, получаем

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|. \tag{5.3}$$

Во-вторых,

$$\|x\| = \|y + (x - y)\| \leqslant \|y\| + \|x - y\|,$$
$$\|y\| = \|x + (y - x)\| \leqslant \|x\| + \|y - x\|,$$

откуда следует, что

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|. \tag{5.4}$$

Говорят, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ векторов из $\mathbf{R}^N$ сходится к вектору $u \in \mathbf{R}^N$, если имеет место покоординатная сходимость, т. е. $x_k[j] \to u[j]$ при всех $j \in N$. Это эквивалентно условию $\|x_k - u\| \to 0$.

Допустим, что $x_k \to u$, $y_k \to v$. Тогда

$$\langle x_k, y_k\rangle \to \langle u, v\rangle. \tag{5.5}$$

Действительно,

$$|\langle x_k, y_k\rangle - \langle u, v\rangle| = |\langle x_k, y_k - v\rangle + \langle x_k - u, v\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_k\|\cdot\|y_k - v\| + \|v\|\cdot\|x_k - u\|.$$

Остается заметить, что числовая последовательность $\{\|x_k\|\}$ ограничена. Соотношение (5.5) характеризует непрерывность скалярного произведения.

Множество $Q \subset \mathbf{R}^N$ называется замкнутым, если любой вектор, являющийся предельным для некоторой последовательности векторов из Q, принадлежит Q. Множество $H \subset \mathbf{R}^N$ называется ограниченным, если существует постоянная $C > 0$, такая, что $\|x\| \leqslant C$ для всех $x \in H$. Множество $P \subset \mathbf{R}^N$ называется выпуклым, если вместе с любыми своими точками x_0, x_1 оно содержит отрезок $[x_0, x_1]$, их соединяющий. Напомним, что отрезок $[x_0, x_1]$ определяется как совокупность точек, допускающих представление $x(t) = tx_1 + (1-t)x_0 = x_0 + t(x_1 - x_0)$, где $t \in [0, 1]$.

Введем функцию $r(x)=\|x\|$. Согласно (5.4) она непрерывна на $\mathbf{R}^N$. Возьмем непустое множество $D\subset\mathbf{R}^N$ и рассмотрим задачу

$$r(x)\to\min_{x\in D}. \tag{5.6}$$

Лемма 5.1. Если D — замкнутое выпуклое множество, то решение задачи (5.6) существует и единственно.

Доказательство. Зафиксируем $x_0\in D$. Множество $D_0=D\cap B$, где $B=\{x\in\mathbf{R}^N \mid \|x\|\leqslant\|x_0\|\}$, является ограниченным и замкнутым. По теореме Вейерштрасса непрерывная функция r достигает на D минимального значения. Обозначим точку минимума x_*. Тогда $r(x)\geqslant r(x_*)$ при всех $x\in D\cap B$. Вместе с тем $r(x)>r(x_0)\geqslant r(x_*)$ при $x\notin B$. Значит, $r(x)\geqslant r(x_*)$ при всех $x\in D$, так что x_* — решение задачи (5.6).

Положим $\mu=\min\limits_{x\in D} r(x)$ и допустим, что $r(x_1)=r(x_2)=\mu$ в некоторых точках x_1, x_2 из D. Покажем, что $x_1=x_2$.

Если $\mu=0$, то утверждение тривиально, ибо в этом случае $x_1=x_2=0$. Предположим, что $\mu>0$. Поскольку D — выпуклое множество, то точка $(x_1+x_2)/2$ принадлежит D. Учитывая определение функции r и неравенство треугольника, получаем

$$\mu\leqslant\|(x_1+x_2)/2\|\leqslant\|x_1\|/2+\|x_2\|/2=\mu.$$

Отсюда следует равенство $\|x_1+x_2\|=\|x_1\|+\|x_2\|$, которое возможно лишь в случае $x_1/\|x_1\|=x_2/\|x_2\|$. Но $\|x_1\|=\|x_2\|=\mu$, поэтому $x_1=x_2$. Лемма доказана.

Решение x_* задачи (5.6) характеризуется тем, что среди всех точек из D оно имеет наименьшую норму. В связи с этим x_* иногда называют ближайшей к началу координат точкой множества D.

Лемма 5.2. Пусть $D\subset\mathbf{R}^N$ — замкнутое выпуклое множество и x_* — единственная (по лемме 5.1) точка из D с наименьшей нормой. Тогда

$$\langle x_*, x\rangle\geqslant\langle x_*, x_*\rangle \quad \forall x\in D. \tag{5.7}$$

Доказательство. По определению x_*

$$\langle x, x\rangle\geqslant\langle x_*, x_*\rangle \quad \forall x\in D. \tag{5.8}$$

Зафиксируем $x\in D$. В силу (5.8) и выпуклости D при любых $t\in(0,1)$ имеем

$$\langle x_*+t(x-x_*),\ x_*+t(x-x_*)\rangle\geqslant\langle x_*, x_*\rangle.$$

Отсюда следует, что $2t\langle x_*, x-x_*\rangle+t^2\|x-x_*\|^2\geqslant 0$ и

$$\langle x_*, x-x_*\rangle+t\|x-x_*\|^2/2\geqslant 0 \quad \forall t\in(0, 1).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $t\to+0$, получаем $\langle x_*, x-x_*\rangle\geqslant 0$, что равносильно (5.7). Лемма доказана.

Теорема 5.1 (о строгой отделимости). Пусть P и Q — замкнутые выпуклые множества в $\mathbf{R}^N$, не имеющие общих точек, и пусть хотя бы одно из них ограничено. Тогда найдутся вектор $a \in \mathbf{R}^N$, $\|a\|=1$, и число $\Delta>0$, такие, что

$$\langle a, x\rangle \leqslant \langle a, y\rangle - \Delta \quad \forall x \in P, \ \forall y \in Q \tag{5.9}$$

(рис. 1).

Доказательство. Положим

$$D=P-Q=\{z=x-y \mid x\in P, \ y\in Q\}.$$

Нетрудно проверить, что D — замкнутое выпуклое множество. Выпуклость D непосредственно следует из выпуклости P и Q. Установим замкнутость D.

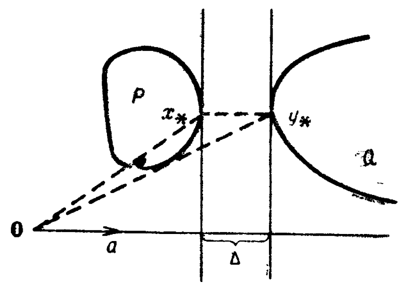


Рис. 1.

Пусть $z_k \to w$, причем $z_k \in D$ при всех $k=1, 2, \ldots$ Требуется показать, что $w \in D$. По определению D имеем $z_k=x_k-y_k$, где $x_k \in P$, $y_k \in Q$. Будем считать, что ограниченным множеством является P. Тогда последовательность $\{x_k\}$ ограничена и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{k_s} \to u$. Поскольку P — замкнутое множество, то $u \in P$.

Далее, $y_{k_s}=x_{k_s}-(x_{k_s}-y_{k_s})=x_{k_s}-z_{k_s}$. Отсюда следует, что $y_{k_s} \to u-w$. В силу замкнутости Q имеем $u-w \in Q$. Введем обозначение $v=u-w$. Тогда $w=u-v$, причем $u \in P$, $v \in Q$. Значит, $w \in D$, и замкнутость D доказана.

Обозначим z_* ближайшую к началу координат точку множества D. Поскольку $P \cap Q=\varnothing$, то $0 \notin D$ и, следовательно, $z_* \neq 0$. Воспользуемся неравенством (5.7), которое в данном случае примет вид $\langle z_*, z\rangle \geqslant \langle z_*, z_*\rangle$ для всех $z \in D$. Положив $a=-z_*/\|z_*\|$, $\Delta=\|z_*\|$, получим

$$\langle a, z\rangle \leqslant -\Delta \quad \forall z \in D. \tag{5.10}$$

Но $D=P-Q$, поэтому (5.10) эквивалентно (5.9). Теорема доказана.

Замечание. Так как z_* принадлежит D, то $z_*=x_*-y_*$, где $x_* \in P$, $y_* \in Q$. Введем обозначения $z_0=(x_*+y_*)/2$, $h=\langle a, z_0\rangle$ и покажем, что гиперплоскость $\langle a, x\rangle=h$ строго разделяет множества P и Q, точнее:

$$\langle a, u\rangle < h \quad \forall u \in P; \quad \langle a, v\rangle > h \quad \forall v \in Q.$$

Действительно (см. рис. 1), вектор z_0 допускает представление $z_0=y_*+z_*/2$. Учитывая (5.10), при всех $u \in P$ получаем

$$\langle a, u\rangle - h = \langle a, u - z_0\rangle = \langle a, u - y_*\rangle - \langle a, z_*\rangle/2 \leqslant$$
$$\leqslant -\Delta + \|z_*\|/2 = -\Delta/2 < 0.$$

При $v \in Q$ нужно воспользоваться другим представлением $z_0 = x_* - z_*/2$. Тогда

$$\langle a, v\rangle - h = \langle a, v - z_0\rangle = -\langle a, x_* - v\rangle + \langle a, z_*\rangle/2 \geqslant \Delta/2 > 0.$$

Утверждение доказано.

Для линейных экстремальных задач наиболее интересным является случай, когда в качестве одного из множеств P или Q берется замкнутый выпуклый конус. Напомним, что множество $K \subset \mathbf{R}^N$ называется конусом (с вершиной в нуле), если из условия $x \in K$ следует, что $tx \in K$ при всех $t > 0$.

Теорема 5.2. Пусть $P \subset \mathbf{R}^N$ — ограниченное замкнутое выпуклое множество и $K \subset \mathbf{R}^N$ — замкнутый выпуклый конус, причем $P \cap K = \varnothing$. Тогда найдутся вектор $a \in \mathbf{R}^N$ и число $\Delta > 0$, такие, что

$$\langle a, x\rangle \leqslant -\Delta \quad \forall x \in P, \tag{5.11}$$

$$\langle a, y\rangle \geqslant 0 \quad \forall y \in K. \tag{5.12}$$

Доказательство. По теореме 5.1 при некоторых $a \in \mathbf{R}^N$ и $\Delta > 0$ выполняется неравенство

$$\langle a, x\rangle \leqslant \langle a, y\rangle - \Delta \quad \forall x \in P, \ \forall y \in K. \tag{5.13}$$

Покажем, что в данном случае из (5.13) следуют соотношения (5.11) и (5.12).

Пусть x_0 — некоторый элемент из P и $y \in K$. Тогда $ty \in K$ при всех $t > 0$. Согласно (5.13)

$$\langle a, ty\rangle \geqslant \langle a, x_0\rangle + \Delta,$$

откуда следует, что $\langle a, y\rangle \geqslant [\langle a, x_0\rangle + \Delta]/t$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $t \to +\infty$, получаем (5.12).

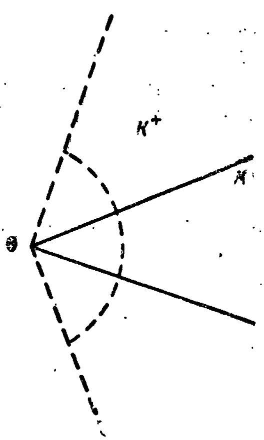


Рис. 2.

Теперь заметим, что $0 \in K$. Действительно, если y_0 — некоторый элемент из K, то $ty_0 \in K$ при всех $t > 0$. Поскольку $t_k y_0 \to 0$ при $t_k \to +0$ и K — замкнутое множество, то $0 \in K$. Подставляя в (5.13) $y = 0$, получаем (5.11). Теорема доказана.

Пусть $K \subset \mathbf{R}^N$ — произвольный конус. Положим

$$K^+ = \{v \in \mathbf{R}^N \mid \langle v, y\rangle \geqslant 0 \quad \forall y \in K\}.$$

Нетрудно проверить, что K^+ является замкнутым выпуклым конусом. Его называют конусом, сопряженным K.

С помощью понятия сопряженного конуса заключение теоремы 5.2 можно переформулировать так: найдутся вектор $a \in K^+$ и число $\Delta > 0$, такие, что $\langle a, x\rangle \leqslant -\Delta$ при всех $x \in P$.

На рис. 2 изображен простейший конус K и сопряженный ему конус K^+. Общий результат о представлении конуса, сопряженного многогранному конусу $K = \{x \in \mathbf{R}^N \mid \langle a_i, x\rangle \geqslant 0, i \in M\}$, будет получен в следующем параграфе (теорема Фаркаша). А пока рассмотрим частный случай.

Теорема 5.3. Пусть $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ — разбиение индексного множества N на три попарно не пересекающихся подмножества. Если

$$K = \{x = x[N] \mid x[N_1] \geqslant \mathbf{0}[N_1],\ x[N_2] = \mathbf{0}[N_2],\ x[N_3] \text{ произволен}\},$$

то

$$K^+ = \{v = v[N] \mid v[N_1] \geqslant \mathbf{0}[N_1],\ v[N_2] \text{ произволен},\ v[N_3] = \mathbf{0}[N_3]\}. \tag{5.14}$$

Доказательство. Обозначим Q множество, стоящее в правой части (5.14). Утверждается, что $K^+ = Q$. Включение $Q \subset K^+$ очевидно. Проверим обратное включение.

Пусть $v_0 \in K^+$. Орт $e_j = e_j[N]$ при любом $j \in N_1$ принадлежит K, поэтому $\langle v_0, e_j\rangle \geqslant 0$. Отсюда следует, что $v_0[N_1] \geqslant \mathbf{0}[N_1]$. Далее, возьмем вектор $x_j = -v_0[j]\, e_j$. При $j \in N_3$ он принадлежит K, поэтому $\langle v_0, x_j\rangle \geqslant 0$, или $-(v_0[j])^2 \geqslant 0$. Значит, $v_0[N_3] = \mathbf{0}[N_3]$. Получили, что $v_0 \in Q$. Теорема доказана.

Следствие 1. Справедливо равенство $(\mathbf{R}^N)^+ = \{\mathbf{0}\}$.

Следствие 2. Положим $\mathbf{R}^N_+ = \{x \in \mathbf{R}^N \mid x[N] \geqslant \mathbf{0}[N]\}$. Тогда $(\mathbf{R}^N_+)^+ = \mathbf{R}^N_+$.

Конус, сопряженный сопряженному конусу K^+, называется вторым сопряженным конусом и обозначается K^{++}.

Теорема 5.4. Если $K \in \mathbf{R}^N$ — замкнутый выпуклый конус, то $K^{++} = K$.

Доказательство. Включение $K \subset K^{++}$ следует из определений. Проверим обратное включение.

Допустим, что существует вектор $x_0 \in K^{++}$, не принадлежащий K. К одноточечному множеству $P = \{x_0\}$ и конусу K можно применить теорему 5.3, согласно которой найдется вектор $a \in K^+$, такой, что $\langle a, x_0\rangle < 0$. Но это противоречит условию $x_0 \in K^{++}$. Теорема доказана.

Упражнения

5.1. Проверить, что шар $U_\delta = \{x \in \mathbf{R}^N \mid \|x\| < \delta\}$, где $\delta > 0$, является выпуклым множеством.

5.2. Показать на примерах, что в теореме о строгой отделимости все предположения о множествах P и Q существенны.

5.3. Привести пример двух замкнутых конусов K_1, K_2, алгебраическая сумма которых $K_1 + K_2$ не замкнута.

5.4. Доказать, что если $K_1, \ldots, K_p$ — замкнутые конусы в $\mathbf{R}^N$, то либо $K_1 + \ldots + K_p$ — замкнутый конус, либо существует нетривиальное представление нуля. Последнее означает, что найдутся $x_i \in K_i$, такие, что $x_1 + \ldots + x_p = 0$, причем не все x_i равны нулю.

5.5. Пусть $K_1, \ldots, K_p$ — замкнутые выпуклые конусы в $\mathbf{R}^N$ и конус $\Gamma = K_1^+ + \ldots + K_p^+$ также замкнут. Доказать справедливость равенства $\left(\bigcap_{i=1}^p K_i\right)^+ = \Gamma$.

§ 6. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В исследовании линейных неравенств важную роль играют выпуклые конические оболочки.

Пусть Q — конечное множество произвольных точек a_i, $i \in M$, из $\mathbf{R}^N$. Выпуклая коническая оболочка множества Q определяется следующим образом:

$$\operatorname{cone} Q = \left\{ y = \sum\nolimits_{i \in M} u[i]\, a_i \mid u[M] \geqslant \mathbf{0}[M] \right\}.$$

Теорема 6.1. Множество $\Gamma = \operatorname{cone} Q$ является замкнутым выпуклым конусом.

Доказательство. То, что Γ — выпуклый конус, очевидно. Проверим его замкнутость. Для этого нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Лемма 6.1. Любой ненулевой вектор $y_0 \in \Gamma$ допускает представление

$$y_0 = \sum\nolimits_{i \in M_0} v_0[i]\, a_i, \tag{6.1}$$

где $M_0 \subset M$, $v_0[M_0] > \mathbf{0}[M_0]$ и векторы a_i, $i \in M_0$, линейно независимы.

Доказательство. По условию

$$y_0 = \sum\nolimits_{i \in M} u[i]\, a_i, \quad u[M] \geqslant \mathbf{0}[M]. \tag{6.2}$$

Из всех представлений y_0 в виде (6.2) выберем то, у которого наименьшее число слагаемых с положительными коэффициентами. Пусть это будет (6.1). Покажем, что векторы a_i, $i \in M_0$, линейно независимы.

При $|M_0| = 1$ утверждение тривиально, ибо $y_0 \neq \mathbf{0}$. Рассмотрим случай $|M_0| > 1$. Допустим, что система

$$\sum\nolimits_{i \in M_0} z[i]\, a_i = \mathbf{0}$$

имеет ненулевое решение $z_0 = z_0[M_0]$. Можно считать, что хотя бы одна компонента у z_0 положительна. Введем новый вектор коэффициентов $v_1 = v_0 - t_0 z_0$, где

$$t_0 := \min \{ v_0[i]/z_0[i] \mid i \in M_0,\ z_0[i] > 0 \} > 0.$$

Нетрудно проверить, что

$$y_0=\sum_{i\in M_0} v_1[i]\,a_i,\quad v_1[M_0]\geqslant 0\,[M_0]$$

и $v_1[i]=0$ при некотором $i\in M_0$. Но это противоречит минимальности представления (6.1). Лемма доказана.

Лемма 6.2. Если у матрицы $A=A[M,\ N]$ строки линейно независимы, то матрица AA^T обратима.

Доказательство. Учитывая (2.1), заключаем, что $uA\neq\mathbf{0}$ при любом $u\neq\mathbf{0}$. Поэтому

$$\langle uAA^T,\ u\rangle=\langle uA,\ A^Tu\rangle=\langle uA,\ uA\rangle=\|uA\|^2>0\quad \forall u\neq\mathbf{0}.$$

Теперь очевидно, что система $uAA^T=\mathbf{0}$ имеет только нулевое решение, откуда и следует обратимость матрицы AA^T. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству замкнутости множества $\Gamma=\operatorname{cone} Q$. Допустим, что $y_k\to y_*$, причем $y_k\in\Gamma$ при всех $k=1,\ 2,\ldots$ Требуется установить, что $y_*\in\Gamma$.

В случае $y_*=\mathbf{0}$ это тривиально. Поэтому будем считать, что y_*, а значит, и y_k при достаточно больших k отличны от нуля. По лемме 6.1 существует представление

$$y_k=\sum_{i\in M_k} v_k[i]\,a_i,$$

где $M_k\subset M$, $v_k[M_k]>\mathbf{0}[M_k]$ и векторы a_i, $i\in M_k$, линейно независимы. Среди индексных множеств M_k имеется по крайней мере одно, которое повторяется бесконечное число раз. Обозначим его M_*. Тогда

$$y_{k_s}=\sum_{i\in M_*} v_{k_s}[i]\,a_i. \tag{6.3}$$

Введем матрицу A_* со строками a_i, $i\in M_*$. Это дает возможность переписать (6.3) в виде $y_{k_s}=v_{k_s}A_*$. Умножив последнее равенство справа на A_*^T, получим

$$y_{k_s}A_*^T=v_{k_s}A_*A_*^T. \tag{6.4}$$

Строки матрицы A_* линейно независимы, поэтому согласно лемме 6.2 матрица $A_*A_*^T$ обратима. Теперь из (6.4) следует представление

$$v_{k_s}=y_{k_s}A_*^T\left(A_*A_*^T\right)^{-1},$$

которое позволяет сделать вывод о том, что последовательность $\{v_{k_s}\}$ имеет предел $v_*=y_*A_*^T(A_*A_*^T)^{-1}$. Перейдем к пределу в равенстве (6.3). Получим

$$y_*=\sum_{i\in M_*} v_*[i]\,a_i,$$

причем $v_*[M_*]\geqslant\mathbf{0}[M_*]$. Значит, $y_*\in\Gamma$. Теорема доказана.

Следующий результат принадлежит Фаркашу.

Теорема 6.2. Если конус K определяется системой линейных однородных неравенств

$$K = \{x \in \mathbf{R}^N \mid \langle a_i, x\rangle \geqslant 0, \quad i \in M\}$$

и Q — множество векторов a_i, $i \in M$, то

$$K^+ = \operatorname{cone} Q.$$

Доказательство. Введем обозначение $\Gamma = \operatorname{cone} Q$ и покажем вначале, что

$$K = \Gamma^+. \tag{6.5}$$

Пусть $x_0 \in K$. Тогда $\langle a_i, x_0\rangle \geqslant 0$ при всех $i \in M$, откуда следует, что $\langle y, x_0\rangle \geqslant 0$ при всех $y \in \Gamma$. Значит, $x_0 \in \Gamma^+$, и включение $K \subset \Gamma^+$ доказано.

Пусть теперь $x_0 \in \Gamma^+$. Это означает, что $\langle y, x_0\rangle \geqslant 0$ при всех $y \in \Gamma$. В частности, $\langle a_i, x_0\rangle \geqslant 0$ при всех $i \in M$, так что $x_0 \in K$. Доказано включение $\Gamma^+ \subset K$, а с ним и равенство (6.5).

Перейдем в (6.5) к сопряженным конусам: $K^+ = \Gamma^{++}$. Согласно теореме 6.1 Γ — замкнутый выпуклый конус, поэтому с учетом теоремы 5.4 получаем $\Gamma^{++} = \Gamma$. Таким образом, $K^+ = \Gamma^{++} = \Gamma$, что и требовалось доказать.

Замечание. Обозначим A матрицу со строками a_i, $i \in M$. Тогда $\operatorname{cone} Q = \{y = uA \mid u \geqslant 0\}$. Это дает возможность так переформулировать теорему Фаркаша: если $K = \{x \mid Ax \geqslant 0\}$, то $K^+ = \{y = uA \mid u \geqslant 0\}$.

Переходим к линейным неравенствам.

Лемма 6.3. Пусть $A = A[M, N]$ — произвольная матрица. Система $Ax = b$ имеет неотрицательное решение $x \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда для любого u, удовлетворяющего условию $uA \geqslant 0$, выполняется неравенство $\langle u, b\rangle \geqslant 0$.

Доказательство. Обозначим Q конечное множество, состоящее из столбцов $A_j = A[M, j]$, $j \in N$, матрицы A, и пусть $\Gamma = \operatorname{cone} Q$. Нетрудно проверить, опираясь на (2.1), что наличие у системы $Ax = b$ неотрицательного решения эквивалентно включению $b \in \Gamma$.

Введем конус

$$K = \{u \in \mathbf{R}^M \mid \langle A_j, u\rangle \geqslant 0, \ j \in N\} = \{u \mid uA \geqslant 0\}.$$

По теореме Фаркаша

$$K^+ = \Gamma. \tag{6.6}$$

Теперь доказательство леммы заканчивается так. Если система

$$Ax = b, \quad x \geqslant 0, \tag{6.7}$$

совместна, то $b \in \Gamma$ и в силу (6.6) $b \in K^+$. Последнее означает, что $\langle u, b\rangle \geqslant 0$ для всех $u \in K$.

Обратно, пусть $b \in K^+$. Тогда $b \in \Gamma$, откуда следует, что система (6.7) совместна. Лемма доказана.

Замечание. Лемму 6.3 можно переформулировать иначе: система (6.7) совместна тогда и только тогда, когда для любого u, удовлетворяющего условию $uA \leqslant 0$, выполняется неравенство $<u, b> \leqslant 0$.

Теорема 6.3. Для того чтобы система

$$\begin{aligned} A[M_1, N] \times x[N] &\geqslant b[M_1], \\ A[M_2, N] \times x[N] &= b[M_2], \\ x[N_1] &\geqslant 0[N_1] \end{aligned} \tag{6.8}$$

была совместной, необходимо и достаточно, чтобы для любого $u = u[M]$, такого, что

$$\begin{aligned} u[M] \times A[M, N_1] &\leqslant 0[N_1], \\ u[M] \times A[M, N_2] &= 0[N_2], \\ u[M_1] &\geqslant 0[M_1], \end{aligned} \tag{6.9}$$

выполнялось неравенство $\langle b, u \rangle \leqslant 0$. Напомним, что $M = M_1 \cup M_2$, $N_2 = N \setminus N_1$.

Доказательство. Согласно теореме 3.1 совместность системы (6.8) эквивалентна совместности следующей системы:

$$A_0 v = b, \quad v \geqslant 0, \tag{6.10}$$

где $A_0 = (A[M, N_1], A[M, N_2], -A[M, N_2], -E[M, M_1])$. Вместе с тем по замечанию к лемме 6.3 система (6.10) совместна тогда и только тогда, когда для любого $u = u[M]$, удовлетворяющего условию $uA_0 \leqslant 0$, выполняется неравенство $<u, b> \leqslant 0$. Нетрудно проверить, что соотношение $uA_0 \leqslant 0$ равносильно (6.9). Теорема доказана.

Тем самым установлен критерий непустоты множества планов общей задачи линейного программирования.

Следствие 1. Система линейных уравнений $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда любое решение u однородной сопряженной системы $uA = 0$ ортогонально b, т. е. $<b, u> = 0$. (Учесть, что вместе с u решением системы $uA = 0$ является и $-u$.)

Следствие 2 (теорема Фань-Цзы). Система линейных неравенств $Ax \geqslant b$ совместна тогда и только тогда, когда любое неотрицательное решение u системы уравнений $uA = 0$ удовлетворяет условию $<b, u> \leqslant 0$.

Упражнения

6.1. Доказать, что для совместности системы строгих неравенств $Ax > b$ необходимо и достаточно, чтобы любое ненулевое решение u системы $uA = 0$, $u \geqslant 0$ удовлетворяло условию $<b, u> < 0$ (теорема Карвера).

6.2. Доказать, что система однородных соотношений

$$A[M_0, N] \times x[N] > 0[M_0],$$
$$A[M_1, N] \times x[N] \geqslant 0[M_1],$$
$$A[M_2, N] \times x[N] = 0[M_2]$$

несовместна тогда и только тогда, когда система уравнений

$$u[M] \times A[M, N] = 0[N], \quad \text{где } M = M_0 \cup M_1 \cup M_2,$$

имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$u[M_0] \geqslant 0[M_0], \quad u[M_0] \neq 0[M_0], \quad u[M_1] \geqslant 0[M_1]$$

(теорема Г. Ф. Вороного).

6.3. Пусть $A = A[N, N]$ — кососимметричная матрица, т. е. $A^T = -A$. Установить наличие у системы линейных однородных неравенств $Ax \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ такого решения x_0, что $Ax_0 + x_0 > 0$.

§ 7. КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Начнем с одного вспомогательного утверждения, которое можно назвать основной леммой линейного программирования.

Лемма 7.1. Допустим, что система

$$\begin{gathered} \langle c, x \rangle = \mu, \\ Ax = b, \quad x \geqslant 0, \end{gathered} \tag{7.1}$$

где $A = A[M, N]$ — произвольная матрица, имеет решение, однако если заменить в ней μ на $\mu - \lambda$, то при любом $\lambda > 0$ она становится несовместной. Тогда совместна следующая система:

$$uA \leqslant c, \quad \langle b, u \rangle = \mu. \tag{7.2}$$

Доказательство. Покажем, что система

$$\begin{gathered} \langle c, x \rangle - t\mu = -1, \\ Ax - tb = 0, \\ x \geqslant 0, \quad t \geqslant 0 \end{gathered} \tag{7.3}$$

несовместна. Действительно, допустим, вопреки утверждению, что найдется пара $\{x_0, t_0\}$, удовлетворяющая (7.3). Возможны два случая.

I. $t_0 = 0$. Тогда $\langle c, x_0 \rangle = -1$, $Ax_0 = 0$, $x_0 \geqslant 0$. Если y_0 — одно из решений системы (7.1), то вектор $x_1 = y_0 + x_0$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} \langle c, x_1 \rangle = \mu - 1, \\ Ax_1 = b, \quad x_1 \geqslant 0, \end{gathered}$$

что противоречит условию леммы.

II. $t_0 > 0$. В этом случае, положив $x_1 = x_0/t_0$, получим

$$\begin{gathered} \langle c, x_1 \rangle = \mu - 1/t_0, \\ Ax_1 = b, \quad x_1 \geqslant 0, \end{gathered}$$

что также невозможно.

Итак, система (7.3) несовместна. По лемме 6.3 найдется пара $\{\gamma_0, u_0\}$, где γ_0 — вещественное число и $u_0 = u_0[M]$, со свойствами

$$\gamma_0 c + u_0 A \geqslant \mathbf{0}, \quad -\gamma_0 \mu - \langle u_0, b\rangle \geqslant 0, \quad -\gamma_0 < 0.$$

Поскольку система (7.1) совместна и $\gamma_0 c + u_0 A \geqslant \mathbf{0}$, то согласно той же лемме 6.3

$$\gamma_0 \mu + \langle u_0, b\rangle \geqslant 0.$$

Теперь очевидно, что вектор $u_* = -u_0/\gamma_0$ удовлетворяет (7.2). Лемма доказана.

Рассмотрим общую задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} &c[N] \times x[N] \to \min, \\ &A[M_1, N] \times x[N] \geqslant b[M_1], \\ &A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2], \\ &x[N_1] \geqslant \mathbf{0}[N_1]. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Теорема 7.1 (критерий оптимальности). Для того чтобы план $x_* = x_*[N]$ задачи (7.4) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $u_* = u_*[M]$, такой, что

$$\begin{aligned} &\langle b, u_*\rangle = \langle c, x_*\rangle, \\ &u_*[M] \times A[M, N_1] \leqslant c[N_1], \\ &u_*[M] \times A[M, N_2] = c[N_2], \\ &u_*[M_1] \geqslant \mathbf{0}[M_1]. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Доказательство. Необходимость. Как известно (теорема 3.1), общая задача линейного программирования (7.4) эквивалентна аналогичной задаче с ограничениями в канонической форме записи

$$\begin{aligned} &\langle c_0, v\rangle \to \min, \\ &A_0 v = b, \quad v \geqslant \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{7.6}$$

где $c_0 = (c[N_1], c[N_2], -c[N_2], \mathbf{0}[M_1])$ и $A_0 = (A[M, N_1], A[M, N_2], -A[M, N_2], -E[M, M_1])$. Поскольку первая задача имеет оптимальный план x_*, то существует оптимальный план v_* и у второй, при этом $\langle c, x_*\rangle = \langle c_0, v_*\rangle$.

По определению оптимального плана имеем $A_0 v_* = b$, $v_* \geqslant \mathbf{0}$ и

$$\min \langle c_0, v\rangle = \langle c_0, v_*\rangle =: \mu.$$

Теперь замечаем, что система

$$\begin{aligned} &\langle c_0, v\rangle = \mu, \\ &A_0 v = b, \quad v \geqslant \mathbf{0} \end{aligned}$$

имеет решение, однако если заменить в ней μ на $\mu - \lambda$, то при любом $\lambda > 0$ она становится несовместной. По лемме 7.1 найдется вектор $u_* = u_*[M]$ со свойствами

$$u_* A_0 \leqslant c_0, \quad \langle b, u_* \rangle = \mu. \tag{7.7}$$

Нетрудно проверить, что соотношения (7.7) равносильны (7.5). Необходимость доказана.

Достаточность. Возьмем произвольный план x задачи (7.4). Согласно (7.5) имеем

$$\begin{gathered}\langle c, x \rangle = c[N_1] \times x[N_1] + c[N_2] \times x[N_2] \geqslant (u_*[M] \times \\ \times A[M, N_1]) \times x[N_1] + (u_*[M] \times A[M, N_2]) \times x[N_2] = \\ = u_*[M] \times (A[M, N_1] \times x[N_1] + A[M, N_2] \times x[N_2]) = \\ = u_*[M] \times (A[M, N] \times x[N]) \geqslant u_*[M_1] \times b[M_1] + \\ + u_*[M_2] \times b[M_2] = \langle u_*, b \rangle = \langle c, x_* \rangle. \end{gathered} \tag{7.8}$$

Таким образом, x_* — оптимальный план задачи (7.4). Теорема доказана.

Замечание. Из (7.5) при условии, что x_* удовлетворяет ограничениям задачи (7.4), следуют равенства

$$\langle u_*, b - Ax_* \rangle = 0, \quad \langle u_* A - c, x_* \rangle = 0. \tag{7.9}$$

Проверим, например, первое из них. Имеем

$$\langle u_*, b - Ax_* \rangle = u_*[M_1] \times (b[M_1] - A[M_1, N] \times x_*[N]) \leqslant 0.$$

Вместе с тем

$$\begin{gathered}\langle u_*, b - Ax_* \rangle = \langle u_*, b \rangle - \langle u_*, Ax_* \rangle = \langle c, x_* \rangle - \langle u_* A, x_* \rangle = \\ = \langle c - u_* A, x_* \rangle = (c[N_1] - u_*[M] \times A[M, N_1]) \times x_*[N_1] \geqslant 0.\end{gathered}$$

Объединяя полученные неравенства, приходим к требуемому равенству. Утверждение доказано.

Упражнение

7.1. Показать, что решение общей задачи линейного программирования (7.4) сводится к решению системы линейных неравенств и равенств.

§ 8. СЕДЛОВАЯ ТОЧКА ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА

Критерию оптимальности, установленному в теореме 7.1, можно придать другую форму. Для этого введем функцию Лагранжа

$$L(x, u) = \langle c, x \rangle + \langle u, b - Ax \rangle$$

и рассмотрим ее на прямом произведении конусов

$$\begin{gathered} K = \{x = x[N] \mid x[N_1] \geqslant 0[N_1]\}, \\ \Gamma = \{u = u[M] \mid u[M_1] \geqslant 0[M_1]\}. \end{gathered}$$

Определение. Пара $\{x_*, u_*\}$ называется седловой точкой функции Лагранжа, если $x_* \in K$, $u_* \in \Gamma$ и

$$L(x_*, u) \leqslant L(x_*, u_*) \leqslant L(x, u_*) \quad \forall x \in K, \ \forall u \in \Gamma. \qquad (8.1)$$

Теорема 8.1. Для того чтобы вектор $x_* = x_*[N]$ был оптимальным планом задачи (7.4), необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $u_* = u_*[M]$, такой, что пара $\{x_*, u_*\}$ являлась бы седловой точкой функции Лагранжа.

Доказательство. Необходимость. Пусть x_* — оптимальный план задачи (7.4). По теореме 7.1 найдется вектор u_* со свойствами (7.5). Покажем, что пара $\{x_*, u_*\}$ является седловой точкой функции Лагранжа.

Прежде всего отметим, что $x_* \in K$, $u_* \in \Gamma$. Перепишем (8.1) в развернутом виде:

$$\langle c, x_*\rangle + \langle u, b - Ax_*\rangle \leqslant \langle c, x_*\rangle + \langle u_*, b - Ax_*\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \langle c, x\rangle + \langle u_*, b - Ax\rangle \quad \forall x \in K, \ \forall u \in \Gamma. \qquad (8.2)$$

Первое из этих неравенств в силу (7.9) равносильно следующему:

$$\langle u, b - Ax_*\rangle \leqslant 0 \quad \forall u \in \Gamma. \qquad (8.3)$$

Справедливость же (8.3) очевидна, ибо

$$\langle u, b - Ax_*\rangle = u[M_1] \times (b[M_1] - A[M_1, N] \times x_*[N]) \leqslant 0.$$

Второе из неравенств (8.2) с учетом (7.9) и равенства $\langle c, x_*\rangle = \langle b, u_*\rangle$ перепишется так:

$$\langle c, x\rangle - \langle u_*, Ax\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K.$$

Но

$$\langle c, x\rangle - \langle u_*, Ax\rangle = \langle c - u_*A, x\rangle =$$
$$= (c[N_1] - u_*[M] \times A[M, N_1]) \times x[N_1] \geqslant 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим, что при некоторых $x_* \in K$, $u_* \in \Gamma$ выполняются неравенства (8.2). Их можно переписать в виде

$$\langle u, b - Ax_*\rangle \leqslant \langle u_*, b - Ax_*\rangle \quad \forall u \in \Gamma, \qquad (8.4)$$

$$\langle c, x\rangle - \langle c, x_*\rangle \geqslant \langle u_*, b - Ax_*\rangle - \langle u_*, b - Ax\rangle \quad \forall x \in K. \qquad (8.5)$$

Покажем, что x_* — решение задачи (7.4).

Вначале проверим, что x_* — план задачи (7.4). По условию $x_*[N_1] \geqslant \mathbf{0}[N_1]$. Далее, вектор $u = Ce_i[M]$, $i \in M$, при любом $C > 0$ принадлежит Γ. Поэтому согласно (8.4)

$$b[i] - A[i, N] \times x_*[N] \leqslant \langle u_*, b - Ax_*\rangle / C \quad \forall i \in M.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $C \to +\infty$, получаем $b[i] - A[i, N] \times x_*[N] \leqslant 0$ при всех $i \in M$, так что

$$A[M, N] \times x_*[N] \geqslant b[M].$$

Отметим, что конусу Γ принадлежит также вектор $u = -Ce_i[M]$,

$i \in M_2$, где C — любое положительное число. Аналогично предыдущему приходим к неравенству

$$A[M_2, N] \times x_*[N] \leqslant b[M_2].$$

Теперь очевидно, что x_* удовлетворяет всем ограничениям задачи (7.4), т. е. является ее планом.

Покажем, что x_* — оптимальный план. Имеем

$$\langle u_*, b - Ax_* \rangle = 0. \tag{8.6}$$

Действительно, поскольку $u_* \in \Gamma$, то $\langle u_*, b - Ax_* \rangle \leqslant 0$. Подставляя $u = 0$ в (8.4), приходим к обратному неравенству $\langle u_*, b - Ax_* \rangle \geqslant 0$, а вместе с ним — и к (8.6).

Возьмем теперь любой план x задачи (7.4). Тогда

$$\langle u_*, b - Ax \rangle \leqslant 0. \tag{8.7}$$

На основании (8.5) — (8.7) получаем $\langle c, x \rangle \geqslant \langle c, x_* \rangle$, что и доказывает оптимальность плана x_*.

Замечание. При доказательстве достаточности мы нигде не пользовались конкретным видом целевой функции. Поэтому наличие седловой точки у функции Лагранжа

$$\mathscr{L}(x, u) = f(x) + \langle u, b - Ax \rangle$$

является достаточным условием оптимальности при минимизации произвольной функции f на многогранном множестве Ω.

Упражнения

8.1. Показать, что условие (8.1), определяющее седловую точку функции Лагранжа, выполняется тогда и только тогда, когда

$$\min_{x \in K} \sup_{u \in \Gamma} L(x, u) = \max_{u \in \Gamma} \inf_{x \in K} L(x, u)$$

и внешний минимум достигается на x_*, а внешний максимум — на u_*.

8.2. Проверить справедливость равенства

$$\sup_{u \in \Gamma} L(x, u) = \begin{cases} \langle c, x \rangle, & \text{если } x \in \Omega, \\ +\infty, & \text{если } x \in K \setminus \Omega. \end{cases}$$

8.3. Найти $\inf_{x \in K} L(x, u)$ при $u \in \Gamma$.

§ 9. ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

По-прежнему рассматриваем общую задачу линейного программирования

$$f(x) := \langle c, x \rangle \to \min_{x \in \Omega}. \tag{9.1}$$

Введем множество $\Lambda \subset \mathbf{R}^M$ векторов, удовлетворяющих ограничениям

$$u[M] \times A[M, N_1] \leqslant c[N_1], \quad u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2],$$
$$u[M_1] \geqslant 0[M_1],$$

и функцию $g(u) = \langle b, u \rangle$. Тогда теорему 7.1 можно переформулировать так: для того чтобы план x_* задачи (9.1) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $u_* \in \Lambda$, такой, что $f(x_*) = g(u_*)$. Выкладка (7.8) делает очевидным также следующее утверждение.

Лемма 9.1. Если x, u — произвольные векторы, принадлежащие Ω, Λ соответственно, то $f(x) \geqslant g(u)$.

Допустим, что задача (9.1) разрешима и x_* — ее оптимальный план. По теореме 7.1 и лемме 9.1 найдется вектор $u_* \in \Lambda$, на котором

$$g(u_*) = f(x_*) \geqslant g(u) \quad \forall u \in \Lambda.$$

Таким образом, u_* доставляет максимум функции g на Λ, т. е. является решением экстремальной задачи

$$g(u) := \langle b, u \rangle \to \max_{u \in \Lambda}. \tag{9.2}$$

Задача (9.2) называется двойственной к (9.1). Запишем ее в развернутом виде:

$$\begin{gathered} b[M] \times u[M] \to \max, \\ u[M] \times A]M, N_1] \leqslant c[N_1], \\ u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2], \\ u[M_1] \geqslant 0[M_1]. \end{gathered} \tag{9.3}$$

Очевидно, что это тоже задача линейного программирования.

По существу, установлено, что из разрешимости задачи (9.1) следуют разрешимость двойственной задачи (9.2) и равенство

$$\min_{x \in \Omega} f(x) = \max_{u \in \Lambda} g(u). \tag{9.4}$$

Докажем обратное утверждение.

Допустим, что задача (9.2), (9.3) разрешима и u_* — ее оптимальный план. Приведем (9.3) к виду (9.1):

$$\begin{gathered} -b[M] \times u[M] \to \min, \\ -A^T[N_1, M] \times u[M] \geqslant -c[N_1], \\ -A^T[N_2, M] \times u[M] = -c[N_2], \\ u[M_1] \geqslant 0[M_1]. \end{gathered} \tag{9.5}$$

Нетрудно понять, что u_* является решением последней задачи. По теореме 7.1 найдется вектор $x_* = x_*[N]$ со свойствами

$$-\langle c, x_*\rangle = -\langle b, u_*\rangle,$$
$$-x_*[N] \times A^T[N, M_1] \leqslant -b[M_1],$$
$$-x_*[N] \times A^T[N, M_2] = -b[M_2],$$
$$x_*[N_1] \geqslant 0[N_1].$$

Замечаем, что $x_* \in \Omega$ и

$$\langle c, x_*\rangle = \langle b, u_*\rangle. \tag{9.6}$$

Согласно теореме 7.1 x_* является оптимальным планом задачи (9.1). Тем самым установлена разрешимость этой задачи. Равенство же (9.6) равносильно (9.4).

Полученный результат называют первой теоремой двойственности. Приведем ее формулировку.

Теорема 9.1. Если одна из двойственных задач (9.1), (9.2) разрешима, то разрешима и другая. При этом выполняется равенство (9.4).

Продолжим изучение пары двойственных задач.

Теорема 9.2. Двойственные задачи (9.1), (9.2) одновременно разрешимы тогда и только тогда, когда множества их планов Ω и Λ непусты.

Доказательство. Необходимость тривиальна. Проверим достаточность. Возьмем $u_0 \in \Lambda$. Согласно лемме 9.1 $f(x) \geqslant g(u_0)$ при всех $x \in \Omega$. Таким образом, множество планов Ω задачи (9.1) непусто и целевая функция f ограничена снизу на Ω. По теореме 4.2 задача (9.1) разрешима. На основании теоремы 9.1 разрешима и двойственная задача. Теорема доказана.

Очередное утверждение является естественным дополнением к первой теореме двойственности.

Теорема 9.3. Пусть $\Omega \neq \varnothing$. Тогда

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = -\infty$$

в том и только том случае, когда $\Lambda = \varnothing$. Если $\Lambda \neq \varnothing$, то

$$\sup_{u \in \Lambda} g(u) = +\infty$$

тогда и только тогда, когда $\Omega = \varnothing$.

Докажем, например, вторую часть теоремы.

Необходимость. Допустив, что $\Omega \neq \varnothing$, придем к противоречию с теоремой 9.2.

Достаточность. Предположим, что $g(u) \leqslant C$ при всех $u \in \Lambda$. В этом случае согласно теореме 4.2 разрешима задача (9.5), а значит, и (9.3). По теореме 9.1 разрешима прямая задача (9.1), что противоречит условию $\Omega = \varnothing$. Теорема доказана.

Используя двойственную задачу, легко указать условия, гарантирующие выполнение неравенства

$$\min_{x\in\Omega} f(x) \geqslant \alpha. \tag{9.7}$$

Теорема 9.4. Пусть $\Omega\neq\varnothing$. Для того чтобы выполнялось неравенство (9.7), необходимо и достаточно, чтобы нашелся план двойственной задачи u_0, такой, что $\langle b, u_0\rangle\geqslant\alpha$.

Доказательство. Необходимость. По теореме 4.2 задача (9.1) разрешима. Обозначим x_* ее оптимальный план. В качестве u_0 возьмем оптимальный план двойственной задачи, которая разрешима в силу теоремы 9.1. Имеем $\langle b, u_0\rangle = \langle c, x_*\rangle\geqslant\alpha$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Согласно лемме 9.1

$$\langle c, x\rangle\geqslant\langle b, u_0\rangle\geqslant\alpha \quad \forall x\in\Omega,$$

откуда и следует неравенство (9.7). Теорема доказана.

Закончим этот параграф второй теоремой двойственности, которая представляет собой новую форму критерия оптимальности.

Теорема 9.5. Для того чтобы планы x_0, u_0 двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия «дополняющей нежесткости»

$$(b[i]-A[i, N]\times x_0[N])\times u_0[i]=0 \quad \forall i\in M_1, \tag{9.8}$$
$$(u_0[M]\times A[M, j]-c[j])\times x_0[j]=0 \quad \forall j\in N_1. \tag{9.9}$$

Доказательство. Необходимость. Аналогично (7.8) получаем

$$\langle c, x_0\rangle\geqslant\langle u_0A, x_0\rangle=\langle u_0, Ax_0\rangle\geqslant\langle u_0, b\rangle.$$

По первой теореме двойственности $\langle c, x_0\rangle=\langle u_0, b\rangle$, так что

$$\langle b-Ax_0, u_0\rangle=0, \quad \langle u_0A-c, x_0\rangle=0. \tag{9.10}$$

Перепишем последние соотношения в развернутом виде:

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i\in M_1}(b[i]-A[i, N]\times x_0[N])\times u_0[i]=0,\\ &\textstyle\sum_{j\in N_1}(u_0[M]\times A[M, j]-c[j])\times x_0[j]=0.\end{aligned} \tag{9.11}$$

Поскольку все слагаемые в обеих суммах неположительны, то из (9.11) следуют (9.8) и (9.9).

Достаточность. В этом случае выполняются соотношения (9.11), а значит, и (9.10). Согласно (9.10)

$$\langle b, u_0\rangle=\langle u_0, Ax_0\rangle=\langle u_0A, x_0\rangle=\langle c, x_0\rangle.$$

По теореме 7.1 x_0 — оптимальный план задачи (9.1). По теореме 9.1 u_0 — оптимальный план двойственной задачи (9.2). Теорема доказана.

Условия (9.8), (9.9) нужно понимать так, что

$$A[i, N]\times x_0[N]=b[i], \text{ если } u_0[i]>0, \quad i\in M_1,$$

$$x_0[j]=0, \text{ если } u_0[M]\times A[M, j]<c[j], \quad j\in N_1,$$
и
$$u_0[M]\times A[M, j]=c[j], \text{ если } x_0[j]>0, \quad j\in N_1,$$
$$u_0[i]=0, \text{ если } A[i, N]\times x_0[N]>b[i], \quad i\in M_1.$$

Здесь равенства являются следствием строгих неравенств («дополняющая нежесткость»). При этом не исключается, что в (9.8), (9.9) оба сомножителя могут обратиться в нуль.

В заключение сделаем важное замечание. Двойственная задача была введена нами формально, на основе анализа критерия оптимальности. Однако если прямая задача носит экономический характер, то двойственная допускает содержательную экономическую интерпретацию. На этом вопросе мы не останавливаемся, отсылая читателя к соответствующей литературе [1, 3, 13, 18, 27].

Упражнения

9.1. Записать задачу, двойственную к задаче линейного программирования с двусторонними ограничениями:

$$\langle c, x\rangle \to \min,$$
$$Ax=b, \quad d\leqslant x\leqslant h.$$

9.2. Линейная экстремальная задача вида

$$\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} C[i, j]\times X[i, j]\to \min,$$
$$\sum_{i\in M} X[i, N]=a[N],$$
$$\sum_{j\in N} X[M, j]=b[M],$$
$$X[M, N]\geqslant \mathbf{0}[M, N]$$

называется транспортной задачей. Записать к ней двойственную.

9.3. Привести пример пары двойственных задач линейного программирования с пустыми множествами планов.

9.4. Рассмотреть пару экстремальных задач

$$\begin{aligned} &\langle c, x\rangle \to \min, && \langle b, u\rangle \to \max,\\ &Ax=b,\ x\in K, && c-uA\in K^+, \end{aligned} \tag{9.12}$$

где K — конус, а K^+ — сопряженный ему конус. Доказать следующее утверждение: если существуют планы x_0, u_0 этих задач, такие, что $\langle c, x_0\rangle=\langle b, u_0\rangle$, то x_0, u_0 — оптимальные планы.

Отметим, что при $K=\mathbf{R}_+^N$ согласно следствию 2 из теоремы 5.3 задачи (9.12) принимают вид

$$\begin{aligned} &\langle c, x\rangle \to \min, && \langle b, u\rangle \to \max,\\ &Ax=b,\ x\geqslant 0, && uA\leqslant c. \end{aligned}$$

9.5. Допустив, что множества планов двойственных задач

(9.1), (9.2) непусты, доказать существование оптимальных планов x_*, u_*, удовлетворяющих условиям «сильной дополняющей нежесткости»:

$$(A[M_1, N] \times x_*[N] - b[M_1]) + u_*[M_1] > 0[M_1],$$
$$(c[N_1] - u_*[M] \times A[M, N_1]) + x_*[N_1] > 0[N_1].$$

§ 10. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

В этом параграфе дается изящное приложение первой теоремы двойственности к матричным играм.

Матричная игра заключается в следующем. Имеются два игрока и произвольная матрица $A = A[M, N]$, которая называется матрицей платежей. Первый игрок выбирает номер строки $i \in M$, а второй, независимо, — номер столбца $j \in N$, после чего второй игрок выплачивает первому сумму $A[i, j]$ (если $A[i, j] < 0$, то первый игрок выплачивает второму сумму $-A[i, j]$). Игра повторяется бесконечное число раз.

Стратегия первого игрока в этой бесконечной игре определяется вектором $p = p[M]$ со свойствами

$$\sum\nolimits_{i \in M} p[i] = 1, \quad p[M] \geqslant 0[M]. \tag{10.1}$$

Величина $p[i]$ есть вероятность выбора i-й строки. В дальнейшем для простоты сам вектор p будем называть стратегией первого игрока. Множество таких стратегий обозначим P. Аналогично вектор $q = q[N]$ со свойствами

$$\sum\nolimits_{j \in N} q[j] = 1, \quad q[N] \geqslant 0[N] \tag{10.2}$$

называется стратегией второго игрока. Величина $q[j]$ есть вероятность выбора j-го столбца. Множество стратегий второго игрока обозначим Q. Векторы $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i[M]$, $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j[N]$ называются чистыми стратегиями.

Если игроки используют чистые стратегии $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$, то очевидно, что среднее значение платежа в каждой партии равно $A[i, j]$. Допустим, что первый игрок использует чистую стратегию $\mathbf{e}_i$, а второй — смешанную стратегию q. Тогда среднее значение платежа станет равным

$$\sum\nolimits_{j \in N} A[i, j] \times q[j] = A[i, N] \times q[N].$$

В общем случае, когда оба игрока используют смешанные стратегии p, q, математическое ожидание платежа вычисляется по формуле

$$a(p, q) = \sum\nolimits_{i \in M} p[i] \times (A[i, N] \times q[N]) =$$
$$= p[M] \times A[M, N] \times q[N].$$

Правила игры побуждают первого игрока максимизировать величину a по $p \in P$, а второго—минимизировать ее же по $q \in Q$. Как согласовать эти противоположные интересы?

Если первый игрок применяет стратегию p, то среднее значение его выигрыша в каждой партии не меньше

$$\varphi(p) = \min_{q \in Q} a(p, q).$$

Представляется естественным выбрать $p_* \in P$ так, чтобы

$$\varphi(p_*) = \max_{p \in P} \varphi(p).$$

Аналогично второй игрок может выбрать стратегию $q_* \in Q$, на которой величина

$$\psi(q) = \max_{p \in P} a(p, q)$$

принимает наименьшее значение

$$\psi(q_*) = \min_{q \in Q} \psi(q).$$

Справедлива следующая замечательная теорема, установленная Дж. фон Нейманом.

Теорема 10.1. Стратегии p_*, q_* существуют, а их пара $\{p_*, q_*\}$ образует ситуацию равновесия, т. е.

$$a(p, q_*) \leqslant a(p_*, q_*) \leqslant a(p_*, q) \quad \forall p \in P, \ \forall q \in Q. \tag{10.3}$$

Таким образом, когда второй игрок применяет стратегию q_*, наилучшей стратегией для первого является p_*, и наоборот, когда первый игрок применяет стратегию p_*, наилучшей стратегией для второго является q_*.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\varphi(p) = \min_{j \in N} a(p, \mathbf{e}_j) \quad \forall p \in P, \tag{10.4}$$

$$\psi(q) = \max_{i \in M} a(\mathbf{e}_i, q) \quad \forall q \in Q. \tag{10.5}$$

Действительно, неравенства

$$\min_{q \in Q} a(p, q) \leqslant \min_{j \in N} a(p, \mathbf{e}_j); \quad \max_{p \in P} a(p, q) \geqslant \max_{i \in M} a(\mathbf{e}_i, q)$$

тривиальны. Обратные неравенства получим, используя (10.1), (10.2) и равенства

$$a(p, \mathbf{e}_j) = p[M] \times A[M, j], \quad a[\mathbf{e}_i, q] = A[i, N] \times q[N].$$

Например,

$$\min_{q \in Q} a(p, q) = \min_{q \in Q} \sum\nolimits_{j \in N} (p[M] \times A[M, j]) \times q[j] \geqslant$$
$$\geqslant \min_{j \in N} p[M] \times A[M, j] = \min_{j \in N} a(p, \mathbf{e}_j).$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\max_{i \in M} a(\mathbf{e}_i,\ q) \to \min_{q \in Q}. \tag{10.6}$$

Она эквивалентна задаче линейного программирования

$$\begin{gathered} t \to \min, \\ -A[i,\ N] \times q[N] + t \geqslant 0, \quad i \in M, \\ \sum\nolimits_{j \in N} q[j] = 1, \\ q[N] \geqslant \mathbf{0}[N]. \end{gathered} \tag{10.7}$$

Матрица ограничений в (10.7) имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & -A[M,\ N] & & \vdots \\ & & & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Аналогично экстремальная задача

$$\min_{j \in N} a(p,\ \mathbf{e}_j) \to \max_{p \in P} \tag{10.8}$$

эквивалентна задаче

$$\begin{aligned} & s \to \max, \\ & -p[M] \times A[M,\ j] + s \leqslant 0, \quad j \in N, \\ & \sum\nolimits_{i \in M} p[i] = 1, \\ & p[M] \geqslant \mathbf{0}[M]. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Нетрудно проверить (и это основной момент доказательства), что задачи (10.7), (10.9) образуют пару двойственных задач линейного программирования. Так как множества их планов непусты, то по теореме 9.2 они разрешимы. Оптимальные планы обозначим $\{q_*,\ t_*\}$ и $\{p_*,\ s_*\}$. По первой теореме двойственности $t_* = s_*$, а поскольку

$$t_* = \max_{i \in M} A[i,\ N] \times q_*[N], \quad s_* = \min_{j \in N} p_*[M] \times A[M,\ j],$$

то и

$$\max_{i \in M} a(\mathbf{e}_i,\ q_*) = \min_{j \in N} a(p_*,\ \mathbf{e}_j). \tag{10.10}$$

Учитывая определение функций φ и ψ, а также формулы (10.4), (10.5), (10.10), получаем

$$\begin{aligned} a(p_*,\ q_*) &\leqslant \max_{p \in P} a(p,\ q_*) = \psi(q_*) = \max_{i \in M} a(\mathbf{e}_i,\ q_*) = \\ &= \min_{j \in N} a(p_*,\ \mathbf{e}_j) = \varphi(p_*) = \min_{q \in Q} a(p_*,\ q) \leqslant a(p_*,\ q_*). \end{aligned}$$

Отсюда следуют соотношения

$$\max_{p\in P} a(p,\ q_*) = a(p_*,\ q_*) = \min_{q\in Q} a(p_*,\ q), \tag{10.11}$$

равносильные (10.3).

То, что p_* доставляет максимум функции φ на P, связано с эквивалентностью задач (10.8) и (10.9). Можно дать независимое доказательство, опирающееся на (10.11).

Действительно, при любом $p\in P$ имеем

$$\varphi(p) = \min_{q\in Q} a(p,\ q) \leqslant a(p,\ q_*) \leqslant a(p_*,\ q_*) =$$
$$= \min_{q\in Q} a(p_*,\ q) = \varphi(p_*).$$

Аналогично проверяется, что $\psi(q) \geqslant \psi(q_*)$ при всех $q\in Q$. Теорема доказана.

Упражнения

10.1. Показать, что

$$\max_{p\in P}\min_{q\in Q} a(p,\ q) = \min_{q\in Q}\max_{p\in P} a(p,\ q).$$

10.2. Пусть $A = A[M,\ N]$ — произвольная матрица. Проверить справедливость неравенства

$$\max_{i\in M}\min_{j\in N} A[i,\ j] \leqslant \min_{j\in N}\max_{i\in M} A[i,\ j]. \tag{10.12}$$

Привести пример, когда в (10.12) неравенство строгое.

§ 11. ЛИНЕЙНЫЕ ЧЕБЫШЕВСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Задача наилучшего равномерного приближения непрерывной функции обобщенными полиномами, к которой мы переходим, имеет многочисленные приложения. Ее формальная постановка такова:

$$\max_{t\in Q}\left|\sum\nolimits_{j=1}^{p-1} x[j]\,u_j(t) - f(t)\right| \to \min, \tag{11.1}$$

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{j=1}^{p-1} C[i,\ j]\times x[j] \geqslant d[i], \quad i\in 1:m_1,\\ &\sum\nolimits_{j=1}^{p-1} C[i,\ j]\times x[j] = d[i], \quad i\in m_1+1:m. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Здесь $Q\subset \mathbf{R}^S$ — ограниченное замкнутое (компактное) множество; $u_1,\ \ldots,\ u_{p-1},\ f$ — непрерывные на Q функции. Знаковые ограничения на $x[j]$ обычно не выделяются. Таким образом, ищется обобщенный полином $\sum_{j=1}^{p-1} x[j]\,u_j(t)$ с коэффициентами, удовлетворяющими соотношениям (11.2), максимальное уклонение которого от функции f на множество Q минимально. Наша цель — доказать разрешимость этой задачи в случае непротиворечивости ограничений.

Прежде всего приведем задачу (11.1), (11.2) к канонической форме. В качестве первого шага положим

$$u_p(t) = -f(t), \quad C[i, p] = -d[i], \quad i \in 1:m.$$

Тогда исходную задачу можно записать в виде

$$\max_{t \in Q} \left| \sum_{j=1}^{p} x[j]\, u_j(t) \right| \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{p} C[i, j] \times x[j] \geqslant 0, \quad i \in 1:m_1,$$

$$\sum_{j=1}^{p} C[i, j] \times x[j] = 0, \quad i \in m_1+1:m,$$

$$x[p] = 1.$$

После этого, как обычно (см. § 3), заменим $x[j]$ на $x[j] - x[p+j]$, где $x[j] \geqslant 0$, $x[p+j] \geqslant 0$, $j \in 1:p-1$, и вычтем из левой части i-го ограничения-неравенства переменную $x[2p-1+i] \geqslant 0$, $i \in 1:m_1$, превратив его в равенство. Положим $n = 2p + m_1$, $N = 1:n-1$,

$$u_{p+j}(t) = -u_j(t), \quad j \in 1:p-1; \quad u_{2p-1+i}(t) \equiv 0, \quad i \in 1:m_1.$$

Теперь исходная задача приобретает каноническую форму

$$\max_{t \in Q} \left| \sum_{j \in N} x[j]\, u_j(t) \right| \to \min, \qquad (11.3)$$

$$A[M, N] \times x[N] = b[M], \quad x[N] \geqslant \mathbf{0}[N],$$

где $b = (0, \ldots, 0, 1)$,

$$A = \begin{pmatrix} C & C[1:m, p] & -C & -E[1:m, 1:m_1] \\ 0\ldots0 & 1 & 0\ldots0 & 0 \quad \ldots \quad 0 \end{pmatrix}$$

и $C = C[1:m, 1:p-1]$. Поскольку $b \neq \mathbf{0}$, то вектор $x = \mathbf{0}$ не может быть планом последней задачи.

Множество планов задачи (11.3) обозначим Ω. Если $x \in \Omega$, то полином

$$P(x, t) = \sum_{j \in N} x[j]\, u_j(t)$$

называется допустимым, а если x_* — оптимальный план, то полином $P(x_*, t)$ называется наименее уклоняющимся от нуля на Q. Как обычно, $N_+(x)$ обозначает носитель плана x, а A_j — j-й столбец матрицы A.

Определение. Допустимый полином $P(x, t)$ называется базисным, если система

$$\sum_{j\in N_+(x)} z[j]\, u_j(t) = 0 \quad \forall t \in Q,$$
$$\sum_{j\in N_+(x)} z[j]\, A_j = 0 \qquad (11.4)$$

имеет только нулевое решение.

Понятие базисного полинома связано с понятием базисного плана. Чтобы разобраться в этом, допустим, что Q — конечное множество, т. е. $Q=\{t_1, \ldots, t_q\}$. Тогда задача (11.3) эквивалентна задаче линейного программирования, ограничения которой мы сразу приведем к канонической форме

$$\begin{gathered} x[n] \to \min, \\ -\sum_{j=1}^{n-1} x[j]\, u_j(t_k) + x[n] - x[n+k] = 0, \quad k \in 1:q, \\ \sum_{j=1}^{n-1} x[j]\, u_j(t_k) + x[n] - x[n+q+k] = 0, \quad k \in 1:q, \\ \sum_{j=1}^{n-1} x[j]\, A_j = b; \quad x[j] \geqslant 0, \quad j \in 1:n+2q. \end{gathered} \qquad (11.5)$$

Возьмем базисный план $x_0[1:n+2q]$ последней задачи и положим $x_0=x_0[1:n-1]$. Тогда полином $P(x_0, t)$ будет базисным. Действительно, допустив, что система (11.4) при $x=x_0$ имеет нетривиальное решение, получим, что столбцы матрицы ограничений задачи (11.5) с номерами $j\in N_+(x_0)$ линейно зависимы. Но это противоречит определению базисного плана. Итак, базисный план задачи (11.5) порождает базисный полином.

Лемма 11.1. Если множество планов Ω задачи (11.3) непусто и Q — конечное множество, то существует базисный полином, наименее уклоняющийся от нуля на Q.

Доказательство. В силу эквивалентности задач (11.3) и (11.5) множество планов последней будет непустым. К тому же целевая функция ограничена снизу ($x[n]\geqslant 0$). По теореме 4.1 задача (11.5) имеет оптимальный базисный план. Остается снова воспользоваться эквивалентностью задач (11.3) и (11.5) и замечанием о связи между базисным планом и базисным полиномом. Лемма доказана.

Переходим к общему случаю, когда Q — произвольное компактное множество в $\mathbf{R}^s$.

Теорема 11.1. Если $\Omega\neq\varnothing$, то у задачи (11.3) существует базисный полином, наименее уклоняющийся от нуля на Q.

Доказательство. Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, стремящуюся к нулю. При каждом k в множестве Q имеется конечная ε_k-сеть Q_k, обладающая тем свойством, что для любого $t\in Q$ найдется точка из Q_k, расстояние которой до t меньше ε_k. Действительно, совокупность открытых шаров $\{z\in\mathbf{R}^s \mid \|z-t\| < \varepsilon_k\}$, порожденных всеми точками $t\in Q$, образует открытое покрытие компактного множества Q. По лемме Бореля существует конечное покрытие. Множество центров тех шаров, которые входят в конечное покрытие, и является ε_k-сетью. Условие $\varepsilon_k\to 0$ гарантирует, что для любого $t \in Q$ найдется последовательность $\{t_k\}$, $t_k \in Q_k$, сходящаяся к t.

По лемме 11.1 задача (11.3) при $Q = Q_k$ имеет базисный полином $P(x_k, t)$, наименее уклоняющийся от нуля на Q_k. Положим

$$\mu = \inf_{x \in \Omega} \max_{t \in Q} |P(x, t)|.$$

Тогда при всех $k = 1, 2, \ldots$

$$|P(x_k, t_k)| \leqslant \mu \qquad \forall t_k \in Q_k. \tag{11.6}$$

Это следует из очевидного неравенства

$$\max_{t_k \in Q_k} |P(x, t_k)| \leqslant \max_{t \in Q} |P(x, t)|,$$

если в нем сначала слева, а затем справа перейти к инфимуму по $x \in \Omega$.

Среди носителей $N_+(x_k)$ по крайней мере один повторяется бесконечное число раз. Пусть $N_+(x_{k_l}) = N_+$ при всех $l = 1, 2, \ldots$ Покажем, что последовательность векторов $\{x_{k_l}\}$ ограничена. В противном случае числовая последовательность $\gamma_{k_l} = \sum_{j \in N_+} x_{k_l}[j]$ будет неограниченной. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, добьемся того, что $\gamma_{k_l} \to +\infty$. Введем векторы $z_{k_l} = x_{k_l}/\gamma_{k_l}$. На основании (11.6) и определения множества Ω имеем

$$\left|\sum_{j \in N_+} z_{k_l}[j]\, u_j(t_{k_l})\right| \leqslant \mu/\gamma_{k_l} \qquad \forall t_{k_l} \in Q_{k_l},$$
$$\sum_{j \in N_+} z_{k_l}[j]\, A_j = b/\gamma_{k_l}, \tag{11.7}$$
$$\sum_{j \in N_+} z_{k_l}[j] = 1, \quad z_{k_l}[N_+] > 0\,[N_+].$$

Из ограниченной последовательности $\{z_{k_l}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для простоты будем считать, что $z_{k_l} \to z_*$. Зафиксируем $t \in Q$ и возьмем последовательность $\{t_{k_l}\}$, $t_{k_l} \in Q_{k_l}$, сходящуюся к t. Тогда $u_j(t_{k_l}) \to u_j(t)$ при всех $j \in N_+$ в силу непрерывности функций u_j на Q. Переходя в (11.7) к пределу при $k_l \to \infty$, получаем

$$\sum_{j \in N_+} z_*[j]\, u_j(t) = 0 \qquad \forall t \in Q,$$
$$\sum_{j \in N_+} z_*[j]\, A_j = 0,$$
$$\sum_{j \in N_+} z_*[j] = 1, \quad z_*[N_+] \geqslant 0\,[N_+].$$

Отсюда следует, вопреки условию, что $P(x_{k_l}, t)$ не являются базисными полиномами на Q_{k_l}.

Итак, последовательность $\{x_{k_l}\}$ ограничена. Из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не умаляя общности, будем считать, что $x_{k_l} \to x_*$. Очевидно, что $x_* \in \Omega$ и $N_+(x_*) \subset N_+$. Снова зафиксируем $t \in Q$ и возьмем последовательность $\{t_{k_l}\}$, $t_{k_l} \in Q_{k_l}$, сходящуюся к t. Переходя в (11.6) к пределу по подпоследовательности индексов $\{k_l\}$, получаем

$$|P(x_*, t)| \leqslant \mu \quad \forall t \in Q,$$

так что $\max_{t \in Q} |P(x_*, t)| \leqslant \mu$. Обратное неравенство справедливо в силу определения μ. Таким образом, $P(x_*, t)$ — полином, наименее уклоняющийся от нуля на Q. Поскольку $N_+(x_*) \subset N_+$, то $P(x_*, t)$ — базисный полином. Теорема доказана.

Попутно установлена сходимость сеточного метода. Сформулируем этот результат.

Теорема 11.2. Пусть Q_k — конечная ε_k-сеть компактного множества Q и $P(x_k, t)$ — базисный полином, наименее уклоняющийся от нуля на Q_k. Тогда при $\varepsilon_k \to 0$ из последовательности $\{x_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{k_l} \to x_*$. Полином $P(x_*, t)$ будет базисным и наименее уклоняющимся от нуля на Q.

Закончим параграф теоремой существования решения для общей линейной задачи чебышевского приближения.

Теорема 11.3. В случае непротиворечивости ограничений (11.2) задача (11.1), (11.2) разрешима.

Это утверждение является очевидным следствием эквивалентности задач (11.1), (11.2) и (11.3) и теоремы 11.1.

В § III.6 будет получен критерий оптимальности для задачи (11.1), (11.2).

Упражнение

11.1. Показать, что экстремальная задача

$$\max_{t \in [\alpha, \beta]} \left| \sum_{j \in N} x[j]\, v_j(t) - g(t) \right| \to \min_{x \in \mathbf{R}^N},$$

где g и v_j — непрерывные на $[\alpha, \beta]$ комплекснозначные функции, сводится к линейной вещественной задаче чебышевского приближения.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей главе заметную роль играла теория линейных неравенств. В этой главе на передний план выходит геометрия выпуклых многогранных множеств. Задача читателя заключается в том, чтобы, с одной стороны, приобрести некоторую «многомерную» интуицию, а с другой — овладеть алгебраическим языком, используемым для описания геометрических объектов.

В § 2 вводятся понятия грани, вершины и ребра выпуклого многогранного множества. Основной результат этого параграфа — теорема 2.3 о представлении: если выпуклое многогранное множество Ω непусто и не содержит прямых, то любую его точку можно представить в виде суммы двух слагаемых, из которых первое принадлежит выпуклой оболочке множества вершин Ω, а второе — выпуклой конической оболочке множества направляющих векторов неограниченных ребер Ω.

В § 3 доказаны еще две теоремы о представлении — для конуса рецессивных направлений и опорного конуса.

В § 4 мы возвращаемся к задаче линейного программирования и вводим понятие оценки ребра множества планов Ω. Показывается, что вершина Ω оптимальна тогда и только тогда, когда оценки всех ребер, выходящих из этой вершины, неотрицательны. Если же существует ребро с отрицательной оценкой, то при движении плана вдоль такого ребра целевая функция строго убывает. С использованием понятия оценки ребра получено представление множества оптимальных планов (теорема 4.2) и установлен критерий единственности решения (теорема 4.4).

В § 5 изучается метод последовательного улучшения плана для решения общей задачи линейного программирования. Описание метода в геометрических терминах просто и наглядно. Однако для практического применения нужно перевести это описание на алгебраический язык. В невырожденном случае перевод осуществляется элементарно в связи с тем, что направляющими векторами ребер, выходящих из невырожденной вершины Ω, служат столбцы обратной базисной матрицы. Серьезные трудности возникают при наличии вырожденных вершин. Их удается преодолеть в результате тщательного и непростого анализа.

В § 6 дано описание метода последовательного улучшения плана применительно к задаче с ограничениями в канонической форме записи. К такому виду часто сводят произвольную задачу линейного программирования для ее решения.

Вторая половина главы (§ 7—10) посвящена параметрическому линейному программированию. В § 7 рассмотрен вопрос об устойчивости. Основной результат здесь лежит на поверхности и имеет качественный характер. Показано, что устойчивым объектом является строго оптимальный невырожденный базис.

В § 8 изучается задача со скалярным параметром θ, линейно входящим в целевую функцию. Установлено, что множество T значений параметра, при которых исходная задача имеет решение, есть замкнутый промежуток и существует разбиение этого промежутка, такое, что в интервалах между соседними точками разбиения множество оптимальных базисов не меняется. Отмечается также, что графиком функции

$$\mu(\theta) = \min_{x \in \Omega} \langle c(\theta),\ x \rangle$$

является непрерывная вогнутая ломаная. Описывается метод решения рассматриваемой задачи при всех $\theta \in T$.

Аналогичные результаты для задачи с параметром θ, линейно входящим в правые части ограничений, получены в § 9.

Читателю полезно разобраться в различии механизмов смены оптимальных базисов в последних двух задачах. Если смена происходит при значении параметра $\theta = \theta_0$, то оба базиса — сменяемый и сменяющий — оказываются оптимальными при $\theta = \theta_0$. В задаче с параметром в целевой функции опорная гиперплоскость $\langle c(\theta),\ x\rangle = \mathrm{const}$, соответствующая минимальному значению целевой функции, перекатывается по (неизменному) множеству планов Ω. Переход с одной вершины на другую совершается тогда, когда обе вершины и соединяющий их отрезок лежат в опорной гиперплоскости. При этом упомянутые оптимальные базисы отвечают двум *разным* вершинам.

В задаче с параметром в правых частях ограничений происходит параллельное перемещение гиперплоскостей $A[i, N] \times x[N] = b(\theta)[i]$, на пересечении которых лежит множество планов $\Omega(\theta)$. Если два базиса допустимы при изменении параметра θ в некотором промежутке, то отрезок, соединяющий соответствующие вершины, передвигается параллельно самому себе. Поэтому две вершины, оптимальные при каком-нибудь значении θ, при других значениях θ могут быть оптимальными лишь одновременно. Перекатывание здесь невозможно. Переключение с одного оптимального базиса на другой происходит, как правило, тогда, когда опорная гиперплоскость касается $\Omega(\theta)$ в *одной* вырожденной вершине, которой соответствуют оба базиса.

Общей параметрической задаче с параметром во всех данных посвящен § 10. Полученные здесь результаты довольно скромны: доказано наличие конечного числа точек «переключения» и выяснены свойства функции

$$\varphi(\theta) = \min_{x \in \Omega(\theta)} \langle c(\theta), x \rangle.$$

Достаточно эффективного метода для решения общей параметрической задачи линейного программирования пока нет.

§ 2. СТРУКТУРА ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННОГО МНОЖЕСТВА

Рассмотрим выпуклое многогранное множество

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbf{R}^N \middle| \begin{array}{l} A[M_1, N] \times x[N] \geqslant b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \end{array} \right\}. \tag{2.1}$$

Знаковые ограничения на переменные включены в общие ограничения-неравенства. С геометрической точки зрения множество Ω является пересечением конечного числа полупространств и гиперплоскостей. Оказывается, что для Ω существует другое представление, использующее более тонкие геометрические понятия. К изучению этого вопроса мы и переходим. В дальнейшем предполагается, что Ω непусто.

Обозначим $M = M_1 \cup M_2$. Возьмем произвольное индексное множество I, такое, что $M_2 \subset I \subset M$ (при $M_2 = \varnothing$ допускается $I = \varnothing$). Множество

$$\Omega(I) = \left\{ x \in \mathbf{R}^N \middle| \begin{array}{l} A[I, N] \times x[N] = b[I] \\ A[M \setminus I, N] \times x[N] > b[M \setminus I] \end{array} \right\} \tag{2.2}$$

называется гранью Ω. Для получения грани нужно в формуле (2.1) каждое неравенство заменить равенством или строгим неравенством. Таким образом, общее количество граней равно $2^{|M_1|}$. Среди них могут быть и пустые. Очевидно, что $\Omega(I) \subset \Omega$ и

$$\Omega = \bigcup_{M_2 \subset I \subset M} \Omega(I). \tag{2.3}$$

Из определения также следует, что при разных I грани не пересекаются.

Приведем пример. У треугольника, задаваемого неравенствами

$$-x[1] - x[2] \geq -1, \quad x[1] \geq 0, \quad x[2] \geq 0,$$

имеется восемь граней: его внутренность, три вершины, три открытых стороны и пустая грань, которая появляется при замене всех трех неравенств равенствами.

Наряду с непустой гранью $\Omega(I)$ будем рассматривать ее аффинную оболочку

$$\operatorname{aff}\Omega(I)=\{x\in\mathbf{R}^N \mid A[I,\ N]\times x[N]=b[I]\}.$$

Напомним, что множество $P\subset Q$ называется открытым в Q (относительно открытым), если для каждой точки $x\in P$ найдется ее окрестность $U(x)=\{y\in\mathbf{R}^N \mid \|y-x\|<\delta\}$, где $\delta>0$ зависит от x, такая, что $U(x)\cap Q\subset P$. Открытое в $\mathbf{R}^N$ множество является открытым в обычном смысле. Нетрудно проверить, что любая непустая грань открыта в своей аффинной оболочке. При $I=\varnothing$ грань $\Omega(I)$ открыта в обычном смысле. Если она непустая, то естественно считать, что ее аффинная оболочка совпадает с $\mathbf{R}^N$.

Обозначим $\overline{P}$ замыкание множества P, т. е. совокупность всех предельных точек для последовательностей из P. Положим также

$$\eta(x)[M]=A[M,\ N]\times x[N]-b[M].$$

Лемма 2.1. Если $\Omega(I)\neq\varnothing$, то

$$\overline{\Omega(I)}=\left\{x\in R^N \,\middle|\, \begin{array}{l}\eta(x)[I]=0[I]\\ \eta(x)[M\setminus I]\geqslant 0[M\setminus I]\end{array}\right\}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Множество, стоящее в правой части формулы (2.4), обозначим D. Нужно показать, что $\overline{\Omega(I)}=D$. Включение $\overline{\Omega(I)}\subset D$ очевидно. Проверим обратное включение.

Пусть $x_0\in D$, но $x_0\notin\Omega(I)$. Возьмем $x_1\in\Omega(I)$ и рассмотрим интервал $(x_0,\ x_1)$, состоящий из точек $x(t)=tx_1+(1-t)x_0$, $t\in(0,\ 1)$. Имеем

$$\eta(x(t))=t\eta(x_1)+(1-t)\eta(x_0).$$

Учитывая определение $\Omega(I)$ и D (см. (2.2) и (2.4)), получаем $(x_0,\ x_1)\subset\Omega(I)$. Значит, точка x_0 является предельной для точек из $\Omega(I)$, т. е. $x_0\in\overline{\Omega(I)}$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что

$$\overline{\Omega(I)}=\bigcup_{J\supset I}\Omega(J). \tag{2.5}$$

Множество $\partial\Omega(I)=\overline{\Omega(I)}\setminus\Omega(I)$ называется относительной границей грани $\Omega(I)$. Согласно (2.5) при $\Omega(I)\neq\varnothing$ справедлива формула

$$\partial\Omega(I)=\bigcup_{J\supset I,\ J\neq I}\Omega(J). \tag{2.6}$$

Лемма 2.2. Если $\Omega(I)\neq\varnothing$ и $\Omega(I)\neq\operatorname{aff}\Omega(I)$, то $\partial\Omega(I)\neq\varnothing$.

Доказательство. Возьмем $x_0\in\operatorname{aff}\Omega(I)\setminus\Omega(I)$, $x_1\in\Omega(I)$.

и покажем, что на отрезке $[x_0, x_1]$ найдется точка $x(t)=x_0+ t(x_1-x_0)$, принадлежащая $\partial\Omega(I)$. Прежде всего отметим, что $\eta(x_0)[i]\leqslant 0$ при некотором $i\in M\setminus I$. Далее, $\eta(x(t))= =\eta(x_0)+t[\eta(x_1)-\eta(x_0)]$. Положим

$$t_0=\max_{\{i\in M\setminus I\mid \eta(x_0)[i]<0\}}\frac{-\eta(x_0)[i]}{\eta(x_1)[i]-\eta(x_0)[i]}. \tag{2.7}$$

В этом случае $t_0\in[0, 1)$, $\eta(x(t_0))[I]=0[I]$, $\eta(x(t_0))[M\setminus I]\geqslant \geqslant 0[M\setminus I]$ и существует индекс $i\in M\setminus I$ (на нем достигается максимум в (2.7)), такой, что $\eta(x(t_0))[i]=0$. Согласно (2.6) $x(t_0)\in\partial\Omega(I)$. Лемма доказана.

Введем понятие размерности грани. Напомним, что размерностью выпуклого множества $G\subset\mathbf{R}^N$ (она обозначается $\dim G$) называется число, равное максимальному количеству линейно независимых векторов вида $z=x_1-x_2$, где x_1, x_2 принадлежат G. Пустое множество размерности не имеет. Размерность одноточечного множества равна нулю.

Легко определить размерность аффинной оболочки $\mathrm{aff}\,\Omega(I)$. Она совпадает с максимальным числом линейно независимых решений однородной системы

$$A[I, N]\times z[N]=0[I]. \tag{2.8}$$

Из линейной алгебры известно, что это число равно разности между количеством переменных и рангом матрицы $A[I, N]$. Таким образом,

$$\dim(\mathrm{aff}\,\Omega(I))=|N|-\mathrm{rank}\,A[I,N]. \tag{2.9}$$

Линейно независимые решения системы (2.8) обозначим $z_1, \ldots, z_s$.

Пусть x_1 — произвольная точка из $\Omega(I)$. Тогда $\mathrm{aff}\,\Omega(I)$ допускает представление

$$\mathrm{aff}\,\Omega(I)=\left\{x=x_1+\sum\nolimits_{i=1}^{s}u[i]z_i\,\middle|\,-\infty<u[i]<\infty,\ i\in 1:s\right\}. \tag{2.10}$$

Учитывая (2.10) и открытость $\Omega(I)$ в $\mathrm{aff}\,\Omega(I)$, нетрудно показать, что размерности $\Omega(I)$ и $\mathrm{aff}\,\Omega(I)$ совпадают.

Лемма 2.3. Если $\Omega(I_1)$ и $\Omega(I_2)$ — непустые грани Ω, причем $I_1\subset I_2$, $I_1\neq I_2$, то $\dim\Omega(I_1)>\dim\Omega(I_2)$.

Доказательство. Согласно (2.9) $\dim\Omega(I_1)\geqslant\dim\Omega(I_2)$. Допустим, что $\dim\Omega(I_1)=\dim\Omega(I_2)$. Тогда $\mathrm{rank}\,A[I_1, N]= =\mathrm{rank}\,A[I_2, N]$. При $i_0\in I_2\setminus I_1$ имеем

$$A[i_0, N]=\sum\nolimits_{i\in I_1}\lambda[i]\times A[i, N].$$

После умножения этого равенства справа на $x_0\in\Omega(I_2)$ получим

$$b[i_0] = \sum_{i \in I_1} \lambda[i] \times b[i].$$

Значит, для $x_1 \in \Omega(I_1)$

$$A[i_0, N] \times x_1[N] = \sum_{i \in I_1} \lambda[i] \times b[i] = b[i_0],$$

что противоречит определению $\Omega(I_1)$. Лемма доказана.

Объединяя леммы 2.2 и 2.3, приходим к следующему результату.

Теорема 2.1. Если $\Omega(I) \neq \varnothing$ и $\Omega(I) \neq \operatorname{aff} \Omega(I)$, то относительная граница $\partial\Omega(I)$ непуста и все непустые слагаемые в ее представлении (2.6) имеют размерность меньшую, чем размерность $\Omega(I)$.

Рассмотрим грань нулевой размерности $\Omega(I)$. Для нее $\operatorname{rank} A[I, N] = |N|$, и потому $\Omega(I)$ состоит из одной точки. Грань нулевой размерности называется вершиной многогранного множества. Если $|I| = |N|$, то вершина называется невырожденной. В противном случае говорят о вырожденной вершине. Легко видеть, что для вершины $\Omega(I)$ справедливы равенства

$$\Omega(I) = \overline{\Omega(I)} = \operatorname{aff} \Omega(I).$$

Не всякое многогранное множество имеет вершины. Например, у полуплоскости их нет. В следующей теореме указано условие, гарантирующее существование хотя бы одной вершины.

Теорема 2.2. Для того чтобы непустое многогранное множество имело хотя бы одну вершину, необходимо и достаточно, чтобы оно не содержало прямых.

Вначале докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2.4. Многогранное множество Ω вида (2.1) не содержит прямых тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} A[M, N] = |N|$.

Доказательство. Если $\operatorname{rank} A[M, N] < |N|$, то существует ненулевой вектор $z[N]$, такой, что $A[M, N] \times z[N] = \mathbf{0}[M]$. В этом случае прямая $x = x_0 + tz$, где x_0 — произвольная точка из Ω и $-\infty < t < \infty$, содержится в Ω. Обратно, пусть прямая $x = x_0 + tz$, где $x_0 \in \Omega$ и $z \neq \mathbf{0}$, содержится в Ω. Если допустить, что $A[i_0, N] \times z[N] \neq \mathbf{0}$ при некотором $i_0 \in M$, то найдется точка $x(t_0) = x_0 + t_0 z$ на указанной прямой, в которой ограничение с номером i_0 будет нарушаться. Значит, $Az = \mathbf{0}$. Поскольку $z \neq \mathbf{0}$, то $\operatorname{rank} A[M, N] < |N|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Необходимость легко следует из определения вершины и леммы 2.4. Проверим достаточность.

Возьмем какую-нибудь непустую грань $\Omega(I)$. Ее размерность может оказаться нулевой. Тогда она и будет вершиной. Допустим, что $\dim \Omega(I) > 0$. Поскольку Ω не содержит прямых, то $\Omega(I)\neq\operatorname{aff}\Omega(I)$. Это связано с тем, что согласно (2.10) аффинная оболочка содержит прямую. На основании теоремы 2.1 в относительной границе $\partial\Omega(I)$ найдется грань $\Omega(J)$ меньшей размерности. К $\Omega(J)$ применяем те же рассуждения. Через конечное число шагов придем к вершине. Теорема доказана.

Напомним, что многогранное множество имеет лишь конечное число граней, поэтому конечным же будет и число его вершин.

Грань $\Omega(I)$ размерности 1 называется ребром Ω. Аффинная оболочка ребра согласно (2.10) имеет вид

$$\operatorname{aff}\Omega(I)=\{x=x_1+uz_1\,|\,-\infty<u<\infty\},$$

где $x_1\in\Omega(I)$. Если $\Omega(I)=\operatorname{aff}\Omega(I)$, то прямая $\operatorname{aff}\Omega(I)$ является гранью Ω.

Допустим, что $\Omega(I)\neq\operatorname{aff}\Omega(I)$. Тогда согласно теореме 2.1 относительная граница ребра $\Omega(I)$ содержит грань нулевой размерности $\Omega(I_0)$, где $I_0\supset I$, $I_0\neq I$. Грань $\Omega(I_0)$ состоит из единственной точки x_0, которая является вершиной Ω. Эта вершина называется концом ребра. Очевидно, что $x_0\notin\Omega(I)$, но $x_0\in\overline{\Omega(I)}$.

Поскольку $x_0\in\operatorname{aff}\Omega(I)$, то $x_0=x_1+u_0z_1$. Если $u_0>0$, то заменим z_1 на $-z_1$; иначе z_1 оставим без изменения. Тогда $x_1=x_0+t_0z_1$, где $t_0=|u_0|>0$. Вектор z_1 называется направляющим вектором ребра $\Omega(I)$. Нетрудно проверить, что он удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}&A[I,\ N]\times z_1[N]=0[I],\\&A[I_0\setminus I,\ N]\times z_1[N]>0[I_0\setminus I].\end{aligned}\tag{2.11}$$

Действительно, равенство следует из определения z_1, а строгое неравенство — из выкладки

$$b[I_0\setminus I]<A[I_0\setminus I,\ N]\times x_1[N]=A[I_0\setminus I,\ N]\times x_0[N]+$$
$$+t_0A[I_0\setminus I,\ N]\times z_1[N]=b[I_0\setminus I]+t_0A[I_0\setminus I,\ N]\times z_1[N].$$

Чтобы подчеркнуть связь между z_1 и x_0, будем говорить, что ребро $\Omega(I)$ с направляющим вектором z_1 выходит из вершины x_0.

По определению x_0 имеем

$$A[M\setminus I_0,\ N]\times x_0[N]>b[M\setminus I_0].$$

Если наряду с (2.11) выполняется неравенство

$$A[M\setminus I_0,\ N]\times z_1[N]\geqslant 0[M\setminus I_0],\tag{2.12}$$

то ребро $\Omega(I)$ совпадает с лучом $x=x_0+tz_1$, $t>0$, и потому называется неограниченным ребром Ω. При нарушении условия (2.12) ребро оказывается ограниченным. Проверим это.

Введем обозначения $x(t)=x_0+tz_1$, $w_1=Az_1$ и отметим, что $\eta(x(t))=\eta(x_0)+tw_1$. По условию у вектора w_1 существует отрицательная компонента $w_1[i]$ при $i\in M\setminus I_0$. Положив

$$t_1:=\min_{\{i\in M\setminus I_0\mid w_1[i]<0\}}\eta(x_0)[i]/(-w_1[i])>0,$$
$$x_2=x_0+t_1z_1,$$

получим $(x_0,\ x_2)\subset\Omega(I)$, $x_2\in\partial\Omega(I)$. В силу выпуклости $\Omega(I)$ имеем $(x_0,\ x_2)=\Omega(I)$. Точка x_2 является вершиной Ω и вторым концом ребра $\Omega(I)$. Само ребро $\Omega(I)$ можно считать выходящим из вершины x_2, если в качестве его направляющего вектора взять $z_2=-z_1$.

На этом мы заканчиваем техническую подготовку и переходим к вопросу о структуре выпуклого многогранного множества Ω вида (2.1). Допустим, что Ω не содержит прямых. Согласно предыдущему у Ω имеется конечное число вершин x_0, x_1, ..., x_p $(p\geqslant0)$ и не более чем конечное число неограниченных ребер с направляющими векторами z_1, ..., z_q $(q\geqslant0)$. Обозначим L выпуклую оболочку, натянутую на вершины, т. е.

$$L=\left\{x=\textstyle\sum_{i=0}^{p}\alpha[i]\,x_i\mid\alpha[i]\geqslant0,\ \sum_{i=0}^{p}\alpha[i]=1\right\}.$$

Нетрудно показать, что L — ограниченное замкнутое выпуклое множество. Обозначим K выпуклую коническую оболочку, натянутую на направляющие векторы неограниченных ребер, т. е.

$$K=\left\{x=\textstyle\sum_{j=1}^{q}\beta[j]\,z_j\mid\beta[j]\geqslant0,\ j\in1:q\right\}.$$

При $q=0$ полагаем $K=\{\mathbb{O}\}$. По теореме I.6.1 K — замкнутый выпуклый конус. Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2.3. Если выпуклое многогранное множество Ω не содержит прямых, то $\Omega=L+K$.

Доказательство. Справедливость включения $L+K\subset\Omega$ следует из определения вершины и (2.11), (2.12). Проверим обратное включение.

Возьмем $y_0\in\Omega$. Согласно (2.3) y_0 принадлежит некоторой грани $\Omega(I)$. В случае $\dim\Omega(I)=0$ соотношение $y_0\in L+K$ тривиально, поэтому считаем, что $\dim\Omega(I)>0$. Если $\dim\Omega(I)=1$, то $\Omega(I)$ является ребром, так что $y_0=x_*+t_0z_*$, $t_0>0$, где x_* — вершина Ω, а z_* — направляющий вектор ребра. Ребро $\Omega(I)$ может быть неограниченным. Тогда $y_0\in L+K$. Если же ребро $\Omega(I)$ ограничено, то y_0 лежит на отрезке, соединяющем две вершины — концы ребра. В этом случае также $y_0\in L\subset L+K$.

Предположим, что $\dim\Omega(I)\geqslant2$, или, что равносильно, $\operatorname{rank}A[I,\ N]\leqslant|N|-2$. По условию теоремы и лемме 2.4 $\operatorname{rank}A[M,\ N]=|N|$. Поэтому у матрицы A найдутся две строки $A[i_1,\ N]$ и $A[i_2,\ N]$, i_1, i_2 принадлежат $M\setminus I$, такие, что система уравнений

$$A[I, N]\times z[N]=0[I],$$
$$A[i_1, N]\times z[N]=1,$$
$$A[i_2, N]\times z[N]=-1$$

будет иметь решение $z_0=z_0[N]$. Для нас важно, что у вектора $w_0=Az_0$ существуют как положительные, так и отрицательные компоненты.

Рассмотрим прямую, проходящую через точку y_0 с направляющим вектором z_0: $y=y_0+tz_0$, $-\infty<t<\infty$. Положим

$$t_1 := \min_{\{i\in M\setminus I \mid w_0[i]>0\}} \eta(y_0)[i]/w_0[i]>0,$$
$$t_2 := \min_{\{i\in M\setminus I \mid w_0[i]<0\}} \eta(y_0)[i]/(-w_0[i])>0,$$
$$y_1=y_0-t_1 z_0, \quad y_2=y_0+t_2 z_0.$$

Как обычно, проверяется, что $(y_1, y_2)\subset\Omega(I)$, $y_1\in\partial\Omega(I)$, $y_2\in\partial\Omega(I)$. Кроме того,

$$y_0=\frac{t_2}{t_1+t_2}y_1+\frac{t_1}{t_1+t_2}y_2.$$

Получили, что y_0 лежит на отрезке $[y_1, y_2]$, концы которого принадлежат граням меньшей размерности.

К y_1 и y_2 можно применить те же рассуждения. Через конечное число шагов придем к представлению

$$y_0=\sum_{i=0}^{p}\alpha[i]x_i+\sum_{j=1}^{q}\beta[j]z_j,$$

где все $\alpha[i]$ и $\beta[j]$ неотрицательны и $\sum_{i=0}^{p}\alpha[i]=1$. Значит, $y_0\in L+K$. Теорема доказана.

Ограниченное многогранное множество называется многогранником. Из теоремы 2.3 следует, что для выпуклого многогранника Ω справедлива формула $\Omega=L$.

Упражнения

2.1. Пусть многогранное множество Ω задано в канонической форме

$$\Omega=\left\{x\in\mathbf{R}^N \,\middle|\, \begin{matrix} A[M, N]\times x[N]=b[M] \\ x[N]\geqslant 0[N] \end{matrix}\right\}.$$

Показать, что для Ω понятия базисного плана и вершины совпадают.

2.2. Доказать, что непустое многогранное множество, заданное в канонической форме, имеет хотя бы одну вершину.

2.3. Точка выпуклого множества, которую нельзя представить в виде полусуммы двух различных точек того же множества, называется его крайней точкой. Проверить, что для выпуклого многогранного множества Ω вида (2.1) понятия вершины и крайней точки совпадают.

2.4. Пусть матрица $A=A[M, N]$, где $M=M_1\cup M_2$, входящая в описание (2.1) множества Ω, имеет ранг r. Показать, что у Ω существует грань размерности $|N|-r$.

§ 3. КОНУС РЕЦЕССИВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ И ОПОРНЫЙ КОНУС

По-прежнему рассматриваем непустое многогранное множество вида

$$\Omega=\left\{x\in\mathbf{R}^N \,\middle|\, \begin{matrix} A[M_1, N]\times x[N]\geqslant b[M_1] \\ A[M_2, N]\times x[N]=b[M_2] \end{matrix}\right\}.$$

Ненулевой вектор $h\in\mathbf{R}^N$ называется рецессивным направлением множества Ω, если при любом $x_0\in\Omega$ луч $x=x_0+th$, $t>0$, принадлежит Ω. Совокупность всех рецессивных направлений обозначим K_0. Очевидно, что K_0 — конус.

Теорема 3.1. Справедливо представление

$$K_0=\left\{h\in\mathbf{R}^N \,\middle|\, \begin{matrix} A[M_1, N]\times h[N]\geqslant 0[M_1], \\ A[M_2, N]\times h[N]=0[M_2], \end{matrix}\quad h\neq 0\right\}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Множество, стоящее в правой части (3.1), обозначим D. Включение $D\subset K_0$ очевидно. Проверим обратное включение.

Пусть $h\in K_0$. Зафиксируем $x_0\in\Omega$. По определению рецессивного направления при всех $t>0$ имеем

$$A[M_1, N]\times x_0[N]+tA[M_1, N]\times h[N]\geqslant b[M_1],$$
$$A[M_2, N]\times x_0[N]+tA[M_2, N]\times h[N]=b[M_2].$$

Поделив эти соотношения на $t>0$ и устремив t к $+\infty$, получим

$$A[M_1, N]\times h[N]\geqslant 0[M_1],$$
$$A[M_2, N]\times h[N]=0[M_2].$$

Значит, $h\in D$. Теорема доказана.

Попутно установлено, что ненулевой вектор h будет рецессивным направлением множества Ω, когда луч $x=x_0+th$, $t>0$, принадлежит Ω хотя бы при одном $x_0\in\Omega$.

Конус K_0 называется конусом рецессивных направлений. Он обладает тем свойством, что $x_0+K_0\subset\Omega$ при всех $x_0\in\Omega$ (рис. 3).

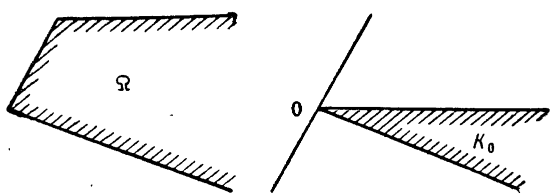


Рис. 3.

Лемма 3.1. Для того чтобы многогранное множество Ω было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы $K_0=\varnothing$.

Доказательство. Необходимость тривиальна. Проверим достаточность.

Допустим, рассуждая от противного, что Ω не ограничено. Тогда найдется бесконечная последовательность попарно различных точек $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ из Ω, такая, что $\|x_k-x_0\|\to\infty$ при $k\to\infty$. Имеем $x_k=x_0+t_kh_k$, $k=1, 2, \ldots$, где $t_k=\|x_k-x_0\|$, $h_k=(x_k-x_0)/\|x_k-x_0\|$. Последовательность $\{h_k\}$ ограничена, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что вся последовательность $\{h_k\}$ сходится: $h_k\to h^*$. Покажем, что h^* — рецессивное направление.

Зафиксируем $t>0$ и положим $x_k(t)=x_0+th_k$. При больших k точка $x_k(t)$ лежит на отрезке $[x_0, x_k]$. В силу выпуклости Ω имеем $x_k(t)\in\Omega$. Далее, $x_k(t)\to x_0+th^*$ при $k\to\infty$. Учитывая замкнутость Ω, получаем $x_0+th^*\in\Omega$ при любом $t>0$. Значит, $h^*\in K_0$, что противоречит условию $K_0=\varnothing$. Лемма доказана.

Теорема 3.2. Если Ω — неограниченное многогранное множество, не содержащее прямых, то $K_0\cup\{0\}=K$, где K — выпуклая коническая оболочка, натянутая на направляющие векторы всех неограниченных ребер Ω.

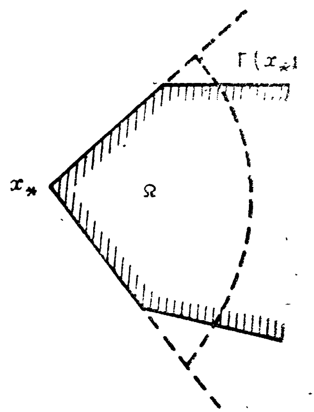


Рис. 4.

Доказательство. Включение $K\subset K_0\cup\{0\}$ следует из соотношений (2.11), (2.12), определения выпуклой конической оболочки и теоремы 3.1. Проверим обратное включение.

Пусть $h\in K_0$ — рецессивное направление и x_0 — точка из Ω. Тогда луч $x=x_0+th$, $t>0$, принадлежит Ω. По теореме 2.3

$$x_0+th=u(t)+v(t)\quad \forall t>0, \qquad (3.2)$$

где $u(t)\in L$, $v(t)\in K$. Предположим, что $h\notin K$. Поскольку K — замкнутый выпуклый конус, то по теореме о строгой отделимости найдется вектор a, такой, что $\langle a, h\rangle>0$ и $\langle a, v\rangle\leqslant 0$ при всех $v\in K$. Умножая (3.2) скалярно на a и учитывая ограниченность множества L, получаем

$$t\langle a, h\rangle\leqslant\langle a, u(t)-x_0\rangle\leqslant\|a\|(\|u(t)\|+\|x_0\|)\leqslant C\quad \forall t>0.$$

Но это невозможно. Теорема доказана.

Следствие. В условиях теоремы 3.2

$$K=\left\{h\in\mathrm{R}^N \,\middle|\, \begin{array}{l} A[M_1, N]\times h[N]\geqslant 0[M_1] \\ A[M_2, N]\times h[N]=0[M_2] \end{array}\right\},$$

так что K есть выпуклый многогранный конус.

Переходим к изучению понятия опорного конуса. Пусть x_* — вершина Ω. Это значит, что $\{x_*\}=\Omega(I_*)$, $\operatorname{rank} A[I_*, N]=|N|$ и

$$\begin{aligned} &A[M\setminus I_*, N]\times x_*[N]>b[M\setminus I_*],\\ &A[I_*, N]\times x_*[N]=b[I_*]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Отбрасывая неактивные в точке x_* ограничения, определим **множество** (рис. 4)

$$\Gamma(x_*)=\left\{x\in\mathbf{R}^N \,\middle|\, \begin{array}{c} A[I_*\setminus M_2, N]\times x[N]\geqslant b[I_*\setminus M_2]\\ A[M_2, N]\times x[N]=b[M_2] \end{array}\right\}.$$

Очевидно, что $\Omega\subset\Gamma(x_*)$. Поскольку

$$\Gamma(x_*)-x_*=\left\{x\in\mathbf{R}^N \,\middle|\, \begin{array}{c} A[I_*\setminus M_2, N]\times x[N]\geqslant \mathbf{0}[I_*\setminus M_2]\\ A[M_2, N]\times x[N]=\mathbf{0}[M_2] \end{array}\right\},$$

то $\Gamma(x_*)$ есть выпуклый многогранный конус с вершиной в **точке** x_*. Он называется конусом, опорным к множеству Ω **в точке** x_*.

Теорема 3. 3. Справедливо представление

$$\Gamma(x_*)=\left\{x=x_*+\sum_{j=1}^r\beta[j]z_j \mid \beta[j]\geqslant 0,\quad j\in 1:r\right\},$$

где $z_1, \ldots, z_r$ — направляющие векторы всех ребер Ω, выходящих из x_*.

Доказательство. Нетрудно понять, что многогранное **множество** $\Gamma(x_*)$ имеет единственную вершину x_*. Поэтому **все его** ребра, если они существуют, не ограничены. Заключение теоремы будет следовать из теоремы 2.3, если удастся **установить,** что $z_1, \ldots, z_r$ — направляющие векторы всех ребер $\Gamma(x_*)$.

Возьмем ребро l_j множества $\Gamma(x_*)$ с направляющим вектором h_j. Согласно (2.11) h_j является единственным с точностью до положительного множителя решением системы вида

$$\begin{aligned} &A[I_j, N]\times z[N]=\mathbf{0}[I_j],\\ &A[I_*\setminus I_j, N]\times z[N]>\mathbf{0}[I_*\setminus I_j], \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$M_2\subset I_j\subset I_*,\ \operatorname{rank} A[I_j, N]=|N|-1. \tag{3.5}$$

Учитывая это, а также (3.3), замечаем, что вектор $x=x_*+th_j$ **при малых** $t>0$ принадлежит грани $\Omega(I_j)$ множества Ω. В силу **(3.5) грань** $\Omega(I_j)$ будет ребром Ω, а поскольку h_j удовлетворяет (3.4), то это ребро выходит из вершины x_* и имеет h_j своим направляющим вектором. Таким образом, h_j с точностью до положительного множителя совпадает с одним из векторов $z_1, \ldots, z_r$.

Наоборот, направляющий вектор z_j ребра $\Omega(I_j)$, выходящего из вершины x_* множества Ω, удовлетворяет условиям (3.4), (3.5). Отсюда следует, что z_j является направляющим вектором одного из ребер $\Gamma(x_*)$. Теорема доказана.

Упражнение

3.1. Описать множество всех решений однородной системы

$$A[M_1, N] \times x[N] \geqslant 0[M_1],$$
$$A[M_2, N] \times x[N] = 0[M_2]$$

в случае, когда $\operatorname{rank} A[M_1 \cup M_2, N] = |N|$.

§ 4. ГЕОМЕТРИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} f(x) &:= \langle c, x \rangle \to \min, \\ A[M_1, N] \times x[N] &\geqslant b[M_1], \\ A[M_2, N] \times x[N] &= b[M_2]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Предположим, что множество ее планов Ω непусто и не содержит прямых. Согласно лемме 2.4 последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} A[M, N] = |N|$.

Введем важное понятие оценки ребра Ω. Пусть z_1 — направляющий вектор ребра $\Omega(I)$, выходящего из вершины x_0. В этом случае справедливы соотношения (2.11). До сих пор нам была безразлична длина направляющих векторов. Теперь будем считать, что все они нормированы, т. е. имеют единичную длину. Величина $\Delta(z_1) = \langle c, z_1 \rangle$ называется оценкой ребра $\Omega(I)$ относительно вершины x_0. Поскольку $\Delta(z_1) = \langle f'(x_0), z_1 \rangle$, то $\Delta(z_1)$ есть производная целевой функции f в точке x_0 по направлению z_1.

Лемма 4.1. Допустим, что множество Ω либо ограничено, либо не ограничено, но оценки всех его неограниченных ребер неотрицательны. Тогда задача (4.1) разрешима. Более того,

$$\min_{x \in \Omega} f(x) = f(x_i),$$

где x_i — одна из вершин Ω.

Доказательство. Обозначим $x_0, x_1, \ldots, x_p$ все вершины Ω, а $z_1, \ldots, z_q$ — направляющие векторы всех неограниченных ребер. Согласно теореме 2.3 для произвольного $x \in \Omega$ имеем

$$x = \sum_{i=0}^{p} \alpha[i]\, x_i + \sum_{j=1}^{q} \beta[j]\, z_j, \tag{4.2}$$
$$\alpha[i] \geqslant 0, \quad \beta[j] \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{p} \alpha[i] = 1.$$

Умножая (4.2) скалярно на c и учитывая неотрицательность оценок $\Delta(z_j)$, получаем

$$f(x) \geqslant \sum_{i=0}^{p} \alpha[i] f(x_i) \geqslant \min_{i \in 0:p} f(x_i).$$

Отсюда очевидным образом следует заключение леммы. Лемма доказана.

Теорема 4.1. Задача (4.1) разрешима тогда и только тогда, когда все неограниченные ребра Ω, если они существуют, имеют неотрицательные оценки.

Доказательство. Допустим, рассуждая от противного, что задача (4.1) разрешима, но нашлось неограниченное ребро $\Omega(I_j)$, состоящее из точек $x(t)=x_i+tz_j$, $t>0$, оценка которого $\Delta(z_j)=\langle c, z_j\rangle$ отрицательна. Поскольку

$$f(x(t))=f(x_i)+t\Delta(z_j),$$

то $\lim_{t\to+\infty} f(x(t))=-\infty$, что противоречит разрешимости задачи (4.1). Таким образом, из разрешимости задачи (4.1) следует неотрицательность оценок всех неограниченных ребер Ω. Справедливость обратного утверждения установлена в лемме 4.1. Теорема доказана.

Предположим, что задача (4.1) разрешима. Введем обозначение $\mu=\min_{x\in\Omega} f(x)$. Выделим x_i, $i \in I_*$, — оптимальные вершины Ω и z_j, $j \in J_*$, — направляющие векторы неограниченных ребер, ортогональные c. В этом случае

$$\begin{aligned} &f(x_i)=\mu, \quad i \in I_*; \quad f(x_i)>\mu, \quad i \in 0:p \setminus I_*;\\ &\Delta(z_j)=0, \quad j \in J_*; \quad \Delta(z_j)>0, \quad j \in 1:q \setminus J_*. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Теорема 4. 2. Множество решений Ω_* задачи (4.1) допускает представление

$$\begin{aligned} \Omega_* = \{x = \textstyle\sum_{i\in I_*} \alpha[i]\, x_i + \sum_{j\in J_*} \beta[j]\, z_j \mid \alpha[i] \geqslant 0,\\ \beta[j] \geqslant 0,\ \textstyle\sum_{i \in I_*} \alpha[i]=1\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Доказательство. Обозначим Ω^* множество, стоящее в правой части (4.4). Включение $\Omega^* \subset \Omega_*$ очевидно. Проверим обратное включение.

Пусть $x \in \Omega_*$, т. е. $x \in \Omega$ и $f(x)=\mu$. Как всякий план, x можно представить в виде (4.2). Умножая (4.2) скалярно на c, получаем

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha[i](f(x_i)-\mu)+\sum_{j=1}^{q} \beta[j]\,\Delta(z_j)=0.$$

Согласно (4.3) все слагаемые в левой части этого равенства неотрицательны и, значит, равны нулю. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\alpha[i]=0, \quad \text{если } f(x_i)>\mu,\\ &\beta[j]=0, \quad \text{если } \Delta(z_j)>0. \end{aligned}$$

Выбрасывая из правой части (4.2) слагаемые с нулевыми коэффициентами, приходим к требуемому представлению для x. Теорема доказана.

Установим критерий оптимальности вершины.

Теорема 4.3. Для того чтобы вершина x_* множества Ω была оптимальным планом задачи (4.1), необходимо и достаточно, чтобы все ребра Ω, выходящие из x_*, имели неотрицательные оценки.

Доказательство. Необходимость очевидна. Проверим достаточность.

Возьмем произвольный план x. Поскольку Ω содержится в опорном конусе $\Gamma(x_*)$, то по теореме 3.3 вектор x можно представить в виде

$$x = x_* + \sum_{j=1}^{r} \beta[j] z_j; \quad \beta[j] \geqslant 0, \quad j \in 1:r, \tag{4.5}$$

где $z_1, \ldots, z_r$ — направляющие векторы всех ребер Ω, выходящих из вершины x_*. Умножая (4.5) скалярно на c и учитывая неотрицательность оценок $\Delta(z_j)$, получаем $f(x) \geqslant f(x_*)$. Значит, x_* — оптимальный план. Теорема доказана.

Теорема 4.4 (критерий единственности). Для того чтобы вершина x_* была единственным решением задачи (4.1), необходимо и достаточно, чтобы все ребра Ω, выходящие из x_*, имели положительные оценки.

Доказательство. Необходимость. Согласно теореме 4.3 оценки $\Delta(z_j)$ всех ребер Ω, выходящих из x_*, неотрицательны. Допустим, что $\Delta(z_j) = 0$ при некотором $j \in 1:r$. Тогда при малых $t > 0$

$$x_* + tz_j \in \Omega \quad \text{и} \quad f(x_* + tz_j) = f(x_*) + t\Delta(z_j) = f(x_*).$$

Но это противоречит единственности решения.

Достаточность. Возьмем $x \in \Omega$, $x \neq x_*$. В этом случае в представлении (4.5) не все $\beta[j]$ равны нулю. Умножая (4.5) скалярно на c и учитывая положительность всех оценок $\Delta(z_j)$, получаем $f(x) > f(x_*)$. Таким образом, x_* — единственное решение задачи (4.1). Теорема доказана.

Замечание. В данном параграфе направляющие векторы z_j ребер Ω считались нормированными, что позволяло интерпретировать оценки $\Delta(z_j)$ как производные целевой функции по направлениям. Однако в лемме 4.1 и теоремах 4.1, 4.3, 4.4 учитывались не конкретные значения оценок $\Delta(z_j)$, а только их знаки. В дальнейшем мы будем использовать другие нормировки направляющих векторов. Знаки оценок $\Delta(z_j) = \langle c, z_j \rangle$ от этого не изменятся.

Упражнения

4.1. Предположим, что множество Ω содержит прямые. Доказать, что в этом случае задача (4.1) разрешима тогда и только тогда, когда вектор c принадлежит конусу, сопряженному конусу рецессивных направлений Ω.

4.2. Доказать следующее утверждение о строгой единственности: если все ребра Ω, выходящие из вершины x_*, имеют положительные оценки, то найдется $\gamma>0$, такое, что

$$f(x)-f(x_*)\geqslant\gamma\|x-x_*\| \quad \forall x\in\Omega.$$

§ 5. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ПЛАНА. ОБЩАЯ СХЕМА

Обратимся к методу решения задачи линейного программирования (4.1). Предположение о том, что множество планов Ω непусто и не содержит прямых, остается в силе.

Суть метода заключается в последовательном переходе от одной вершины Ω к соседней по ребру, вдоль которого целевая функция убывает. Иногда этот метод называют методом соседних вершин. Опишем его подробнее.

Возьмем вершину x_0. Если среди ребер, выходящих из x_0, нет ребра с отрицательной оценкой, то согласно теореме 4.3 x_0 — решение задачи (4.1). В противном случае находим ребро с отрицательной оценкой. Если оно не ограничено, то задача (4.1) не имеет решения $\left(\inf\limits_{x\in\Omega} f(x)=-\infty\right)$. Допустим, что ребро с отрицательной оценкой ограничено. Тогда второй его конец x_1 берем в качестве очередного приближения. Точка x_1 является вершиной Ω, и $f(x_1)<f(x_0)$. С вершиной x_1 поступаем аналогично, и т. д.

Этот метод конечен, поскольку конечно число вершины Ω и целевая функция на последовательных приближениях строго убывает. Через конечное число шагов либо придем к оптимальной вершине, либо установим неограниченность снизу целевой функции на множестве планов.

Реализация указанного метода связана с нахождением направляющих векторов ребер, выходящих из заданной вершины Ω. Получим для них явную формулу.

Допустим сначала, что $\{x_*\}=\Omega(I_*)$ — невырожденная вершина. Имеем

$$M_2\subset I_*\subset M, \quad |I_*|=|N|, \ \operatorname{rank} A[I_*,\ N]=|N|.$$

В частности, $A[I_*.\ N]$ — квадратная неособенная матрица. Направляющие векторы всех ребер, выходящих из x_*, определяются как решение системы

$$\begin{aligned} &A[I,\ N]\times z[N]=\mathbf{0}[I],\\ &A[I_*\setminus I,\ N]\times z[N]>\mathbf{0}[I_*\setminus I]\end{aligned} \tag{5.1}$$

при различных I, таких, что

$$M_2\subset I\subset I_*, \ \operatorname{rank} A[I,\ N]=|N|-1.$$

В данном случае I необходимо имеют вид $I=I_*\setminus\{j\}$, где $j\in I_*\setminus M_2$.

Заменим строгое неравенство в (5.1) равенством

$$A[j, N] \times z[N] = 1. \qquad (5.2)$$

Тогда систему (5.1) можно переписать в виде

$$A[I_*, N] \times z[N] = e_j[I_*].$$

Решение этой системы z_j существует и единственно. Если обозначить $B[N, I_*]$ матрицу, обратную к $A[I_*, N]$, то

$$z_j[N] = B[N, I_*] \times e_j[I_*] = B[N, j], \quad j \in I_* \setminus M_2.$$

Таким образом, из невырожденной вершины x_* выходит $|I_*| - |M_2| = |N| - |M_2|$ ребер, направляющие векторы которых совпадают со столбцами матрицы $B[N, I_* \setminus M_2]$. Условие (5.2) можно воспринимать как новую нормировку направляющих векторов.

Рассмотрим теперь общий случай $|I_*| \geqslant |N|$.

Определение. Строчным базисом вершины x_* называется индексное множество J, такое, что

$$M_2 \subset J \subset I_*, \ |J| = |N|, \ \operatorname{rank} A[J, N] = |N|. \qquad (5.3)$$

Для существования строчного базиса необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank} A[M_2, N] = |M_2|. \qquad (5.4)$$

В дальнейшем это условие считается выполненным.

Важно отметить, что у невырожденной вершины строчный базис единствен. Он совпадает с I_*.

Возьмем один из строчных базисов J вершины x_*. Матрицу $A[J, N]$ называют базисной, а обратную к ней матрицу $B[N, J] = (A[J, N])^{-1}$ — обратной базисной. Напомним, что в случае невырожденной вершины x_* столбцы обратной базисной матрицы $B[N, j]$, $j \in I_* \setminus M_2$, являлись направляющими векторами всех ребер, выходящих из x_*. Выясним геометрический смысл столбцов матрицы $B[N, J \setminus M_2]$ в случае вырожденной вершины x_*.

Если из ограничений

$$A[M_1, N] \times x[N] \geqslant b[M_1],$$
$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$$

исключить неравенства с индексами $i \in I_* \setminus J$, то оставшиеся ограничения определят множество Ω_J. Очевидно, что $\Omega \subset \Omega_J$ и x_* — невырожденная вершина Ω_J. Столбцы матрицы $B[N, J \setminus M_2]$ являются направляющими векторами всех ребер Ω_J, выходящих из x_*.

Лемма 5.1. Пусть $j_0 \in J \setminus M_2$. Для того чтобы столбец $B[N, j_0]$ был направляющим вектором ребра Ω, выходящего из x_*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$w[I_*\setminus J] := A[I_*\setminus J,\ N] \times B[N,\ j_0] \geqslant \mathbf{0}[I_*\setminus J]. \qquad (5.5)$$

Доказательство. Необходимость очевидным образом следует из (2.11). Проверим достаточность. Введем индексное множество

$$I_0 = \{i \in I_* \mid A[i,\ N] \times B[N,\ j_0] = 0\}.$$

Поскольку

$$A[J,\ N] \times B[N,\ j_0] = e_{j_0}[J], \qquad (5.6)$$

то $J\setminus\{j_0\} \subset I_0$. В частности, $M_2 \subset I_0 \subset I_*$ и $\operatorname{rank} A[I_0,\ N] \geqslant \geqslant |N|-1$. Согласно определению I_0 $\operatorname{rank} A[I_0, N] < |N|$. Значит, $\operatorname{rank} A[I_0,\ N] = |N| - 1$.

Объединив (5.5) и (5.6), придем к соотношению $A[I_*, N] \times \times B[N,\ j_0] \geqslant \mathbf{0}[I_*]$, которое с учетом определения I_0 можно переписать в виде

$$A[I_0,\ N] \times B[N,\ j_0] = \mathbf{0}[I_0],$$
$$A[I_*\setminus I_0,\ N] \times B[N,\ j_0] > \mathbf{0}[I_*\setminus I_0].$$

Получили, что $B[N,\ j_0]$ — направляющий вектор ребра $\Omega(I_0)$, выходящего из вершины x_*. Лемма доказана.

У Ω_J могут появиться ребра, внешние к Ω. Поясним это на примере.

На рис. 5 изображена пирамида Ω с вырожденной вершиной x_*. Боковые двумерные грани помечены номерами ограничений, их определяющих. Очевидно, что индексы активных в точке x_* ограничений образуют множество $I_* = 1:4$, и любой из наборов $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 4\}$, $\{1,\ 3,\ 4\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$ будет строчным базисом вершины x_*.

Возьмем $J = \{1,\ 2,\ 3\}$. Исключив из плоскостей, ограничивающих Ω, плоскость с номером 4, получим многогранное множество Ω_J, изображенное на рис. 6. Точка x_* стала невырожден-

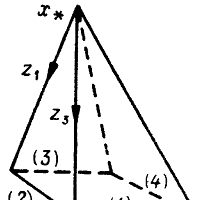


Рис. 5.

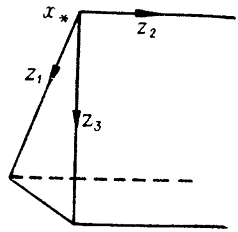


Рис. 6.

ной вершиной Ω_J. Из нее выходят три ребра с направляющими векторами z_1, z_2, z_3. Ребра, соответствующие z_1, z_3, совпадают с ребрами Ω, а ребро с направляющим вектором z_2 будет внешним к Ω.

Следующее утверждение является в определенном смысле обратным к лемме 5.1.

Лемма 5.2. Для каждого ребра $\Omega(I)$, выходящего из вершины x_*, найдется строчный базис J (вообще говоря, не единственный), такой, что один из столбцов $B[N, j_0]$, $j_0 \in J \setminus M_2$, обратной базисной матрицы будет направляющим вектором этого ребра.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{rank} A[I, N] = |N| - 1$ и выполнено условие (5.4), то существует индексное множество $I_0 \subset I$ со свойствами

$$M_2 \subset I_0, \quad |I_0| = |N| - 1, \ \operatorname{rank} A[I_0, N] = |N| - 1$$

(может оказаться, что $I_0 = I$). Положим $J = I_0 \cup \{j_0\}$, где j_0 — индекс из $I_* \setminus I$, обеспечивающий равенство $\operatorname{rank} A[J, N] = |N|$. По построению J — строчный базис вершины x_*. Покажем, что столбец $B[N, j_0]$ обратной базисной матрицы $B[N, J]$ является направляющим вектором ребра $\Omega(I)$.

Для этого заметим, что $B[N, j_0]$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} A[I_0, N] \times z[N] &= 0[I_0], \\ A[j_0, N] \times z[N] &= 1. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Направляющий вектор z_0 ребра $\Omega(I)$ после соответствующей нормировки также удовлетворяет этой системе. Учитывая, что матрица $A[J, N]$ системы (5.7) неособенная, получаем $z_0[N] = B[N, j_0]$. Лемма доказана.

Из леммы 5.2 и теоремы 4.3 следует, что в процессе перебора строчных базисов неоптимальной вырожденной вершины Ω будет найдено ребро Ω с отрицательной оценкой. Полного перебора базисов, вообще говоря, не потребуется. Покажем, что и при проверке вырожденной вершины на оптимальность, как правило, можно избежать полного перебора базисов.

Назовем строчный базис J вершины x_* оптимальным, если

$$\Delta[J \setminus M_2] := c[N] \times B[N, J \setminus M_2] \geqslant 0[J \setminus M_2]. \tag{5.8}$$

Лемма 5.3. Если у вершины x_* множества Ω существует оптимальный строчный базис J, то она является оптимальной, т. е. доставляет минимум функции $\langle c, x \rangle$ на Ω.

Доказательство. Как уже отмечалось, x_* — невырожденная вершина множества Ω_J. Согласно (5.8) все ребра Ω_J, выходящие из x_*, имеют неотрицательные оценки. Значит, x_* — оптимальный план задачи

$$f(x) := \langle c, x \rangle \to \min_{x \in \Omega_J}.$$

Имеем $f(x) \geqslant f(x_*)$ при любом $x \in \Omega_J$. Поскольку $\Omega \subset \Omega_J$, то $f(x) \geqslant f(x_*)$ при всех $x \in \Omega$. Получили, что x_* — оптимальный план исходной задачи (4.1). Лемма доказана.

Лемма 5.4. У оптимальной вершины существует оптимальный строчный базис.

Доказательство. Для невырожденной вершины утверждение очевидно, поэтому считаем, что оптимальная вершина x_* является вырожденной.

Рассмотрим опорный конус

$$\Gamma(x_*) = \left\{ x \in \mathbf{R}^N \,\middle|\, \begin{matrix} A[I_* \setminus M_2, N] \times x[N] \geqslant b[I_* \setminus M_2] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \end{matrix} \right\}.$$

Из оптимальности x_* и теорем 3.3, 4.3 следует, что x_* есть решение задачи

$$\langle c, x \rangle \to \min_{x \in \Gamma(x_*)}. \tag{5.9}$$

Введем еще одну задачу линейного программирования

$$\langle c, x \rangle \to \min_{x \in \Gamma_\varepsilon}, \tag{5.10}$$

где

$$\Gamma_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbf{R}^N \,\middle|\, \begin{matrix} A[I_* \setminus M_2, N] \times x[N] \geqslant b_\varepsilon[I_* \setminus M_2] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b_\varepsilon[M_2] \end{matrix} \right\}.$$

Вектор $b_\varepsilon[I_*]$ определим следующим образом. Пусть $I_* \setminus M_2 = \{i_1, \ldots, i_s\}$ и $a_\varepsilon[i_p] = \varepsilon^p$, $p \in 1:s$; $a_\varepsilon[i] = 0$, $i \in M_2$. Тогда $b_\varepsilon[I_*] = b[I_*] - a_\varepsilon[I_*]$. Отметим, что $b_\varepsilon[M_2] = b[M_2]$.

При $\varepsilon > 0$ справедливо включение $\Gamma(x_*) \subset \Gamma_\varepsilon$. В частности, Γ_ε — непустое множество. Далее, $\operatorname{rank} A[I_*, N] = |N|$, так как x_* — вершина Ω. Отсюда следует, что и Γ_ε имеет хотя бы одну вершину. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$, при котором все вершины Γ_ε будут невырожденными.

Зафиксируем индексное множество J, удовлетворяющее условиям (5.3). Возьмем $i_k \in I_* \setminus J$ и рассмотрим алгебраический полином

$$P_k(\varepsilon) = \varepsilon^k - A[i_k, N] \times B[N, J \setminus M_2] \times a_\varepsilon[J \setminus M_2] = \\ = \varepsilon^k - \sum_{\{p \mid i_p \in J \setminus M_2\}} d[p]\,\varepsilon^p.$$

Поскольку $i_k \notin J$, то коэффициент при ε^k равен 1. Для нас важно, что $P_k(\varepsilon)$ не равен тождественно нулю. Обозначим ε_k наименьший положительный корень $P_k(\varepsilon)$ (если положительных корней нет, то $\varepsilon_k = +\infty$). В этом случае $P_k(\varepsilon) \neq 0$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_k)$. Пусть $\varepsilon(J) = \min\limits_{\{k \mid i_k \in I_* \setminus J\}} \varepsilon_k$ и ε_* — минимум $\varepsilon(J)$ по всем J, удовлетворяющим условиям (5.3). Тогда в качестве требуемого ε можно выбрать любое число из интервала $(0, \varepsilon_*)$. Проверим это.

Возьмем вершину x_ε множества Γ_ε. Она имеет строчный базис J, который удовлетворяет условиям (5.3). Учитывая равенство

$$A[J, N] \times x_\varepsilon[N] = b_\varepsilon[J], \tag{5.11}$$

получаем

$$x_\varepsilon[N] = B[N, J] \times b_\varepsilon[J] = B[N, J] \times b[J] - B[N, J] \times a_\varepsilon[J] = \\ = x_*[N] - B[N, J\setminus M_2] \times a_\varepsilon[J\setminus M_2].$$

Отсюда следует, что при $i_k \in I_* \setminus J$

$$A[i_k, N] \times x_\varepsilon[N] - b_\varepsilon[i_k] = \varepsilon^k - A[i_k, N] \times B[N, J\setminus M_2] \times \\ \times a_\varepsilon[J\setminus M_2] = P_k(\varepsilon).$$

В силу выбора ε имеем $P_k(\varepsilon) > 0$. Таким образом,

$$A[I_* \setminus J, N] \times x_\varepsilon[N] > b_\varepsilon[I_* \setminus J]. \tag{5.12}$$

На основании (5.11) и (5.12) заключаем, что x_ε — невырожденная вершина Γ_ε. Тем самым доказано, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ любая вершина Γ_ε является невырожденной. На рис. 7 иллюстрируется связь между множествами Ω, $\Gamma(x_*)$ и Γ_ε.

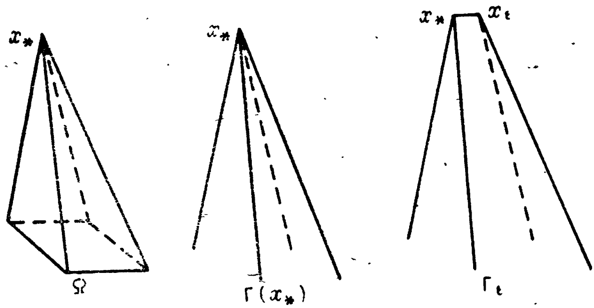


Рис. 7.

Вернемся к задачам (5.9), (5.10). Согласно теореме 3.1 множества их планов имеют один и тот же конус рецессивных направлений. Поскольку первая из этих задач разрешима, то по теореме 4.1 разрешима и вторая. Обозначим $\overset{*}{x}_\varepsilon$ ее оптимальную вершину. Как и все вершины Γ_ε, она невырожденная. Единственный строчный базис J вершины $\overset{*}{x}_\varepsilon$ удовлетворяет условиям (5.3). Кроме того, в силу оптимальности $\overset{*}{x}_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$c[N] \times B[N, J\setminus M_2] \geqslant 0\,[J\setminus M_2].$$

Но это, с другой стороны, означает, что J есть оптимальный строчный базис вершины x_* множества Ω. Лемма доказана.

Теперь методу последовательного улучшения плана решения задачи (4.1) можно придать более конструктивную форму. Метод сводится к частичному перебору строчных базисов вершин Ω до появления либо оптимального строчного базиса, либо неограниченного ребра Ω с отрицательной оценкой. Перебор базисов осуществляется так, что каждый новый базис J_{k+1} отличается от предыдущего J_k лишь одним индексом. Опишем детально одну итерацию метода.

Исходными данными итерации являются: вершина x_k, ее строчный базис J_k и обратная базисная матрица $B_k[N, J_k]$. Итерация разбивается на ряд элементарных шагов.

I. Базис J_k проверяется на оптимальность. Для этого вычисляется вектор оценок

$$\Delta_k[J_k\diagdown M_2]=c[N]\times B_k[N, J_k\diagdown M_2].$$

Если $\Delta_k[J_k\diagdown M_2]\geqslant 0[J_k\diagdown M_2]$, то J_k — оптимальный строчный базис. По лемме 5.3 x_k — решение исходной задачи. Процесс закончен.

В противном случае выбирается один из индексов $j_k\in J_k\diagdown M_2$, на котором $\Delta_k[j_k]<0$.

II. Вычисляется вектор

$$w_k[M\diagdown J_k]=A[M\diagdown J_k, N]\times B_k[N, j_k],$$

где $M=M_1\cup M_2$. Предположим, что $w_k[M\diagdown J_k]\geqslant 0[M\diagdown J_k]$. Тогда на основании леммы 5.1 и соответствующих определений из § 2 столбец $B_k[N, j_k]$ является направляющим вектором неограниченного ребра Ω, выходящего из вершины x_k. Поскольку оценка этого ребра $\Delta_k[j_k]$ отрицательна, то исходная задача не имеет решения. Процесс закончен.

Остается рассмотреть случай, когда у вектора $w_k[M\diagdown J_k]$ есть отрицательные компоненты.

III. Находим величину

$$t_k=\min_{\{i\in M\diagdown J_k \mid w_k[i]<0\}}\left\{\frac{A[i, N]\times x_k[N]-b[i]}{-w_k[i]}\right\}.$$

Очевидно, что $t_k\geqslant 0$. Обозначим l_k один из индексов, на котором достигается указанный минимум.

IV. Определяем $x_{k+1}=x_k+t_kB_k[N, j_k]$, $J_{k+1}=J_k\diagdown\{j_k\}\cup\{l_k\}$. Нужно проверить, что x_{k+1} — вершина Ω, а J_{k+1} — ее строчный базис.

Возможны два случая.

1. $t_k=0$. Имеем

$$A[l_k, N]\times x_k[N]=b[l_k],$$
$$w_k[l_k]<0,\quad x_{k+1}=x_k.$$

Ограничения в точке x_k на индексном множестве J_{k+1} активны (выполняются как равенства). Покажем, что матрица $A[J_{k+1}, N]$ неособенная. Допустив противное, придем к представлению

$$A[l_k, N] = \sum_{i \in J_k \setminus \{j_k\}} v[i] \times A[i, N]. \tag{5.13}$$

Поскольку

$$A[J_k, N] \times B_k[N, j_k] = e_{j_k}[J_k], \tag{5.14}$$

то после скалярного умножения (5.13) на $B_k[N, j_k]$ получим $w_k[l_k] = 0$, что противоречит условию $w_k[l_k] < 0$. Таким образом, $\operatorname{rank} A[J_{k+1}, N] = |N|$.

В рассматриваемом случае осуществляется переход к другому базису той же вершины.

2. $t_k > 0$. Согласно определению t_k имеем $w_k[i] \geqslant 0$ при всех $i \in M \setminus J_k$, соответствующих активным в точке x_k ограничениям. По лемме 5.1 столбец $B_k[N, j_k]$ будет направляющим вектором ребра Ω, выходящего из вершины x_k. Это ребро ограничено, поскольку $w_k[l_k] < 0$. Точка x_{k+1} является вторым его концом. Учитывая (5.14) и определение l_k, замечаем, что ограничения в точке x_{k+1} на индексном множестве J_{k+1} активны. Выполнение же условия $w_k[l_k] \neq 0$, как и в предыдущем случае, гарантирует неособенность матрицы $A[J_{k+1}, N]$. Установлено, что x_{k+1} есть новая вершина Ω со строчным базисом J_{k+1}. Более того, $f(x_{k+1}) = f(x_k) + t_k \Delta_k[j_k] < f(x_k)$.

V. Строим обратную базисную матрицу $B_{k+1}[N, J_{k+1}]$. Пусть $n = |N|$, $J_k = \{j_1, \ldots, j_{k-1}, j_k, j_{k+1}, \ldots, j_n\}$, $J_{k+1} = \{j_1, \ldots, j_{k-1}, l_k, j_{k+1}, \ldots, j_n\}$. Вычисляем

$$\alpha_k[J_k] = A[l_k, N] \times B_k[N, J_k].$$

Поскольку $\alpha_k[J_k] \times A[J_k, N] = A[l_k, N]$, то $\alpha_k[j_s]$ есть коэффициенты разложения новой строки $A[l_k, N]$ по старому базису $A[j_s, N]$, $s \in 1:n$. Отметим, что $\alpha_k[j_k] = w_k[l_k] < 0$.

Введем вектор $\beta_k[J_{k+1}]$ с компонентами

$$\beta_k[l_k] = 1/\alpha_k[j_k],$$
$$\beta_k[j_s] = -\alpha_k[j_s]/\alpha_k[j_k], \quad s \in 1:n \setminus \{k\},$$

и матрицу $L_k[J_k, J_{k+1}]$, отличающуюся от единичной только j_k-й строкой:

$$L_k[J_k, J_{k+1}] = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_k[j_1] & \ldots & \beta_k[j_{k-1}] & \beta_k[l_k] & \beta_k[j_{k+1}] & \ldots & \beta_k[j_n] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что

$$B_{k+1}[N, J_{k+1}] = B_k[N, J_k] \times L_k[J_k, J_{k+1}]. \tag{5.15}$$

При $s \in 1:n \setminus \{k\}$ имеем

$$A[j_s, N] \times B_k[N, J_k] \times L_k[J_k, J_{k+1}] = \\ = e_{j_s}[J_k] \times L_k[J_k, J_{k+1}] = e_{j_s}[J_{k+1}].$$

Далее,

$$A[l_k, N] \times B_k[N, J_k] \times L_k[J_k, J_{k+1}] = \\ = \alpha_k[J_k] \times L_k[J_k, J_{k+1}] = e_{l_k}[J_{k+1}].$$

Таким образом, $A[J_{k+1}, N] \times (B_k[N, J_k] \times L_k[J_k, J_{k+1}]) = E[J_{k+1}, J_{k+1}]$. Формула (5.15) доказана.

Матрица $L_k[J_k, J_{k+1}]$ называется мультипликатором.

На этом описание одной итерации метода последовательного улучшения плана завершается.

Вопрос о нахождении начальной вершины x_0, ее строчного базиса J_0 и обратной базисной матрицы $B_0[N, J_0]$ в общем случае не является простым. Мы на нем не будем останавливаться.

З а м е ч а н и е. В приведенном выше описании допускаются два неоднозначных выбора. Первый — это выбор индекса j_k с отрицательной оценкой $\Delta_k[j_k]$; второй — выбор индекса l_k, на котором достигается минимум при вычислении t_k. Имеются различные правила однозначного выбора j_k и l_k. По существу, эти правила определяют политику перебора базисов вершин и, в частности, политику перебора базисов одной и той же вырожденной вершины.

При некоторых правилах однозначного выбора, принятых на практике, возможен повторный выход на уже проверенный базис. Это приводит к повторению вычислений и называется зацикливанием. Однако, как показывает опыт, зацикливание встречается крайне редко.

Разумеется, существуют такие правила выбора индексов j_k и l_k, которые исключают зацикливание. Они несколько усложняют алгоритм и потому используются лишь в тех случаях, когда это необходимо.

Важно понять, что зацикливание может происходить только от несовершенства алгоритма перебора базисов вырожденной вершины.

Из описанной в этом параграфе общей схемы следуют все численные реализации метода последовательного улучшения плана для решения задач линейного программирования с различными ограничениями.

Упражнения

5.1. Привести пример, когда ни одно ребро Ω_J не совпадает с ребром Ω.

5.2. Привести пример, когда оптимальная вырожденная вершина имеет неоптимальный строчный базис.

5.3. Пусть G — совокупность всех строчных базисов вершины x_*. Показать, что $\Omega = \bigcap_{J \in G} \Omega_J$.

§ 6. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Применим метод последовательного улучшения плана к решению задачи линейного программирования с ограничениями в канонической форме записи

$$\begin{aligned} f(x) := \langle c, x\rangle \to \min, \\ A\,]M, N] \times x[N] = b[M], \\ x[N] \geqslant 0[N]. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Множество планов Ω этой задачи можно представить в виде (2.1):

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbf{R}^N \,\middle|\, \begin{matrix} E[N, N] \times x[N] \geqslant \mathbf{0}[N] \\ A[M, N] \times x[N] = b[M] \end{matrix} \right\}.$$

Будем считать, что Ω непусто и

$$\operatorname{rank} A[M, N] = |M|. \tag{6.2}$$

Поскольку $\Omega \subset \mathbf{R}_+^N$, то Ω не содержит прямых. Условие же (6.2), аналогичное (5.4), гарантирует наличие у каждой вершины Ω хотя бы одного строчного базиса.

Возьмем вершину x_* множества Ω и один из ее строчных базисов $J = M \cup N_0$. Имеем $x_*[N_0] = \mathbf{0}[N_0]$ и $|N| = |J| = |M| + |N_0|$.

Определение. Индексное множество $N_* = N \setminus N_0$ называется столбцовым базисом вершины x_*.

Отметим, что $|N_*| = |N| - |N_0| = |M|$. В частности, матрица $A[M, N_*]$ является квадратной.

Запишем базисную матрицу. После соответствующей перестановки строк и столбцов она примет вид

$$\begin{pmatrix} A[M, N_*] & A[M, N_0] \\ \mathbf{0}[N_0, N_*] & E[N_0, N_0] \end{pmatrix}.$$

По определению эта матрица неособенная. Неособенной же будет и матрица $A[M, N_*]$. Обозначим

$$D[N_*, M] = (A[M, N_*])^{-1}.$$

Покажем, что для обратной базисной матрицы справедливо представление

$$B[N, J] = \begin{pmatrix} D[N_*, M] & -Y[N_*, N_0] \\ \mathbf{0}[N_0, M] & E[N_0, N_0] \end{pmatrix},$$

где $Y[N_*, N_0]=D[N_*, M]\times A[M, N_0]$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} D[N_*, M] & -Y[N_*, N_0] \\ 0\,[N_0, M] & E[N_0, N_0] \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} A[M, N_*] & A[M, N_0] \\ 0\,[N_0, N_*] & E[N_0, N_0] \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} E[N_*, N_*] & 0\,[N_*, N_0] \\ 0\,[N_0, N_*] & E[N_0, N_0] \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что направляющими векторами всех ребер Ω, выходящих из x_*, являются столбцы

$$B[N, j]=\begin{pmatrix} -Y[N_*, j] \\ e_j[N_0] \end{pmatrix},\quad j\in N_0. \tag{6.3}$$

Найдем вектор оценок. Имеем

$$\Delta[N_0]:=c[N]\times B[N, N_0]=c[N_0]-c[N_*]\times Y[N_*, N_0].$$

Если $\Delta[N_0]\geqslant 0[N_0]$, то столбцовый базис N_* называется оптимальным. Согласно лемме 5.3 вершина x_*, у которой существует оптимальный столбцовый базис, является решением задачи (6.1).

Пусть $j\in N_0$. При проверке ребра с направляющим вектором $B[N, j]$ на неограниченность используется вектор w. В данном случае он будет таким:

$$w[N_*]:=E[N_*, N]\times B[N, j]=B[N_*, j]=-Y[N_*, j].$$

Теперь метод последовательного улучшения плана решения задачи (6.1) можно свести к частичному перебору столбцовых базисов вершин Ω. Опишем одну итерацию метода.

Исходными данными итерации являются: вершина x_k, ее столбцовый базис $N_*^{(k)}$ и обратная матрица $D_k[N_*^{(k)}, M]=(A[M, N_*^{(k)}])^{-1}$. Итерация разбивается на следующие элементарные шаги.

I. Базис $N_*^{(k)}$ проверяется на оптимальность. Для этого вычисляется вектор оценок

$$\Delta_k[N_0^{(k)}]=c[N_0^{(k)}]-c[N_*^{(k)}]\times Y_k[N_*^{(k)}, N_0^{(k)}],$$

где $N_0^{(k)}=N\setminus N_*^{(k)}$ и $Y_k[N_*^{(k)}, N_0^{(k)}]=D_k[N_*^{(k)}, M]\times A[M, N_0^{(k)}]$. Если $\Delta_k[N_0^{(k)}]\geqslant 0\,[N_0^{(k)}]$, то $N_*^{(k)}$ — оптимальный столбцовый базис. Вершина x_k есть решение задачи (6.1). Процесс закончен.

В противном случае выбирается один из индексов $j_k\in N_0^{(k)}$, на котором $\Delta_k[j_k]<0$.

II. При выполнении неравенства

$$y_k[N_*^{(k)}]:=Y_k[N_*^{(k)}, j_k]\leqslant 0\,[N_*^{(k)}]$$

заключаем, что задача (6.1) не имеет решения ($\inf_{x\in\Omega}f(x)=-\infty$). Процесс закончен.

Допустим, что у вектора $y_k[N_*^{(k)}]$ хотя бы одна компонента положительна.

III. Находим величину

$$t_k = \min_{\{j \in N_*^{(k)} \mid y_k[j]>0\}} \{x_k[j]/y_k[j]\}.$$

Обозначим l_k один из индексов, на котором достигается указанный минимум.

IV. В качестве очередного приближения берем $x_{k+1} = x_k + t_k B_k[N, j_k]$. Учитывая (6.3) и определение l_k, получаем

$$x_{k+1}[j] = x_k[j] - t_k y_k[j], \ j \in N_*^{(k)} \setminus \{l_k\}; \ x_{k+1}[j_k] = t_k;$$
$$x_{k+1}[j] = 0, \quad j \in N_0^{(k)} \setminus \{j_k\} \cup \{l_k\}.$$

Поскольку $J_{k+1} = J_k \setminus \{j_k\} \cup \{l_k\}$, то

$$N_*^{(k+1)} = N \setminus J_{k+1} = N_*^{(k)} \setminus \{l_k\} \cup \{j_k\}.$$

V. Строим обратную матрицу

$$D_{k+1}[N_*^{(k+1)}, M] = (A[M, N_*^{(k+1)}])^{-1}.$$

Пусть $m = |M|$, $N_*^{(k)} = \{l_1, \ldots, l_{k-1}, l_k, l_{k+1}, \ldots, l_m\}$, $N_*^{(k+1)} = \{l_1, \ldots, l_{k-1}, j_k, l_{k+1}, \ldots, l_m\}$. Заметим, что

$$D_k[N_*^{(k)}, M] \times A[M, j_k] = Y_k[N_*^{(k)}, j_k] = y_k[N_*^{(k)}].$$

Таким образом, $y_k[l_s]$ есть коэффициенты разложения нового столбца $A[M, j_k]$ по старому базису $A[M, l_s]$, $s \in 1:m$.

Введем вектор $\beta_k[N_*^{(k+1)}]$ с компонентами

$$\beta_k[j_k] = 1/y_k[l_k],$$
$$\beta_k[l_s] = -y_k[l_s]/y_k[l_k], \quad s \in 1:m \setminus \{k\},$$

и матрицу $L_k[N_*^{(k)}, N_*^{(k+1)}]$, отличающуюся от единичной только l_k-й строкой:

$$L_k[N_*^{(k)}, N_*^{(k+1)}] = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_k[l_1] & \ldots & \beta_k[l_{k-1}] & \beta_k[j_k] & \beta_k[l_{k+1}] & \ldots & \beta_k[l_m] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущем параграфе, показывается, что

$$D_{k+1}[N_*^{(k+1)}, M] = L_k^T[N_*^{(k+1)}, N_*^{(k)}] \times D_k[N_*^{(k)}, M]. \tag{6.4}$$

На этом описание одной итерации метода завершается.

Вопрос о нахождении начальной вершины x_0, ее столбцового базиса $N_*^{(0)}$ и обратной матрицы $D_0[N_*^{(0)}, M]$ хорошо освещен в литературе. Мы не будем на нем останавливаться.

Приведенный вариант метода последовательного улучшения плана решения задачи линейного программирования с ограничениями в канонической форме записи называется симплекс-методом. Иногда для краткости и общую схему метода последовательного улучшения плана называют симплекс-методом.

В § 8 нам понадобятся формулы преобразования вектора оценок $\Delta_k[N_0^{(k)}]$ в $\Delta_{k+1}[N_0^{(k+1)}]$. Получим их.

Прежде всего отметим, что $N_0^{(k+1)} = N \setminus N_*^{(k+1)} = N_0^{(k)} \setminus \{j_k\} \cup \{l_k\}$. Согласно (6.4) имеем

$$\Delta_{k+1}[N_0^{(k+1)}] = c[N_0^{(k+1)}] - c[N_*^{(k+1)}] \times D_{k+1}[N_*^{(k+1)}, M] \times \times A[M, N_0^{(k+1)}] = c[N_0^{(k+1)}] - c[N_*^{(k+1)}] \times L_k^T[N_*^{(k+1)}, N_*^{(k)}] \times \times D_k[N_*^{(k)}, M] \times A[M, N_0^{(k+1)}].$$

Но

$$c[N_*^{(k+1)}] \times L_k^T[N_*^{(k+1)}, N_*^{(k)}] = c[N_*^{(k)}] + + (c[N_*^{(k+1)}] \times \beta_k[N_*^{(k+1)}] - c[l_k])\, e_{l_k}[N_*^{(k)}].$$

При этом

$$c[N_*^{(k+1)}] \times \beta_k[N_*^{(k+1)}] - c[l_k] = (-\textstyle\sum_{s \neq k} c[l_s] \times y_k[l_s] + + c[j_k] - c[l_k] \times y_k[l_k])/y_k[l_k] = (c[j_k] - c[N_*^{(k)}] \times \times Y_k[N_*^{(k)}, j_k])/y_k[l_k] = \Delta_k[j_k]/y_k[l_k].$$

Значит,

$$\Delta_{k+1}[N_0^{(k+1)}] = c[N_0^{(k+1)}] - (c[N_*^{(k)}] + (\Delta_k[j_k]/y_k[l_k])\, e_{l_k}[N_*^{(k)}]) \times \times D_k[N_*^{(k)}, M] \times A[M, N_0^{(k+1)}].$$

Пусть $j \in N_0^{(k)} \setminus \{j_k\}$. Тогда

$$\Delta_{k+1}[j] = c[j] - c[N_*^{(k)}] \times Y_k[N_*^{(k)}, j] - - (\Delta_k[j_k]/y_k[l_k])\, e_{l_k}[N_*^{(k)}] \times Y_k[N_*^{(k)}, j] = = \Delta_k[j] - \Delta_k[j_k]\, Y_k[l_k, j]/y_k[l_k]. \tag{6.5}$$

Кроме того,

$$\Delta_{k+1}[l_k] = c[l_k] - c[N_*^{(k)}] \times e_{l_k}[N_*^{(k)}] - - \Delta_k[j_k]/y_k[l_k] = -\Delta_k[j_k]/y_k[l_k]. \tag{6.6}$$

Формулы (6.5), (6.6) и есть требуемые формулы пересчета.

Упражнения

6.1. Пусть у квадратной неособенной матрицы $A[M, N_*]$ столбец с номером $j \in N_*$ равен $e_i[M]$. Показать, что у обратной матрицы $D[N_*, M]$ столбец с номером i равен $e_j[N_*]$.

6.2. Найти матрицу, обратную к $L_k[N_*^{(k)}, N_*^{(k+1)}]$.

§ 7. УСТОЙЧИВОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Понятие столбцового базиса, введенное в предыдущем параграфе, можно расширить, не связывая его непосредственно с понятием вершины. Будем называть столбцовым базисом любое индексное множество $N_* \subset N$, такое, что

$$|N_*| = |M|, \; \det A[M, N_*] \neq 0$$

($\det A[M, N_*]$ обозначает определитель матрицы $A[M, N_*]$).

Пусть $D[N_*, M] = (A[M, N_*])^{-1}$. Если

$$D[N_*, M] \times b[M] \geqslant 0[N_*], \tag{7.1}$$

то базис N_* называется допустимым. Допустимому базису N_* соответствует вершина x_* множества Ω с компонентами

$$\begin{aligned} x_*[N_*] &= D[N_*, M] \times b[M], \\ x_*[N \setminus N_*] &= 0[N \setminus N_*]. \end{aligned} \tag{7.2}$$

При этом N_* — столбцовый базис x_* (может быть, не единственный).

Допустимый базис N_* называется невырожденным, если неравенство (7.1) выполняется как строгое. Невырожденному базису соответствует невырожденная вершина Ω, для которой он является единственным столбцовым базисом.

Допустимый базис N_* называется оптимальным, если

$$\Delta[N \setminus N_*] := c[N \setminus N_*] - c[N_*] \times D[N_*, M] \times \\ \times A[M, N \setminus N_*] \geqslant 0[N \setminus N_*],$$

и строго оптимальным, если $\Delta[N \setminus N_*] > 0[N \setminus N_*]$. Оптимальный базис порождает оптимальную вершину Ω, а строго оптимальный базис — единственное решение задачи (6.1) (см. лемму 5.3 и теорему 4.4).

Строго оптимальный невырожденный базис в случае его существования единствен.

Наряду с задачей (6.1) рассмотрим возмущенную задачу

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{c}, x \rangle \to \min, \\ &\tilde{A}[M, N] \times x[N] \geqslant \tilde{b}[M], \\ &x[N] \geqslant 0[N]. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Теорема 7.1 (об устойчивости). Предположим, что задача (6.1) имеет строго оптимальный невырожденный базис N_*. Если данные $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ задачи (7.3) достаточно близки к соответствующим данным A, b, c задачи (6.1), то N_* — строго оптимальный невырожденный базис и в возмущенной задаче (7.3).

Доказательство. Поскольку N_* — строго оптимальный невырожденный базис, то

$$\begin{gathered}\det A[M,\ N_*]\neq 0,\quad (A[M,\ N_*])^{-1}\times b[M]>\mathbf{0}[N_*],\\ c[N\setminus N_*]-c[N_*]\times(A[M,\ N_*])^{-1}\times\\ \times A[M,\ N\setminus N_*]>\mathbf{0}[N\setminus N_*].\end{gathered}\tag{7.4}$$

Остается заметить, что при малом изменении элементов матрицы A и компонент векторов b, c соотношения (7.4) не нарушатся. Теорема доказана.

На практике редко оценивают близость $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ к A, b, c. Если есть основания на нее рассчитывать, поступают так. Проверяют справедливость соотношений типа (7.4) с заменой A, b, c на $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$. При их выполнении заключают, что N_* является строго оптимальным невырожденным базисом задачи (7.3). Единственное решение $\tilde{x}_*$ возмущенной задачи (7.3) находят по формулам, аналогичным (7.2):

$$\begin{gathered}\tilde{x}_*[N_*]=(\tilde{A}[M,\ N_*])^{-1}\times\tilde{b}[M],\\ \tilde{x}_*[N\setminus N_*]=\mathbf{0}[N\setminus N_*].\end{gathered}$$

Упражнения

7.1. Привести пример, когда у задачи (6.1) имеется несколько строго оптимальных базисов.

7.2. Привести пример, когда у задачи (6.1) существует единственный невырожденный оптимальный базис, который, однако, не будет строго оптимальным.

§ 8. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ В ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $c(\theta)=c_0+\theta c_\infty$, где $c_\infty\neq\mathbf{0}$ и θ — любое вещественное число. Рассмотрим параметрическую задачу

$$\begin{gathered}\langle c(\theta),\ x\rangle\to\min,\\ A[M,\ N]\times x[N]=b[M],\\ x[N]\geqslant\mathbf{0}[N].\end{gathered}\tag{8.1}$$

Предполагаем, что множество ее планов Ω непусто и $\operatorname{rank}A[M,\ N]=|M|$. При $\theta=\theta_0$ задача (8.1) разрешима в том и только том случае, когда целевая функция $\langle c(\theta_0),\ x\rangle$ ограничена снизу на Ω.

Запишем ограничения двойственной к (8.1) задачи (см. § I.9):

$$u[M]\times A[M,\ N]\leqslant c_0[N]+\theta c_\infty[N].$$

Их можно представить в виде

$$A^T[N, M] \times u[M] - \theta c_\infty[N] \leqslant c_0[N]. \qquad (8.2)$$

Обозначим T множество тех θ, при которых задача (8.1) имеет решение, а W — множество пар $\{u, \theta\}$, удовлетворяющих (8.2). Согласно теоремам I.9.1 и I.9.2 $T \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $W \neq \varnothing$. Учитывая это замечание и теорему Фань-Цзы (следствие 2 из теоремы I.6.3), получаем такой результат.

Лемма 8.1. Для того чтобы $T \neq \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы для любого неотрицательного решения h системы $Ah = \mathbf{O}$, $\langle c_\infty, h\rangle = 0$ выполнялось неравенство $\langle c_0, h\rangle \geqslant 0$.

Другими словами, $T \neq \varnothing$ в том и только том случае, когда скалярное произведение $\langle c_0, h\rangle$ неотрицательно на любом рецессивном направлении h множества Ω, ортогональном c_∞.

В дальнейшем считаем, что $T \neq \varnothing$. Условие $\theta_0 \in T$ выполняется тогда и только тогда, когда найдется вектор u_0, такой, что $\{u_0, \theta_0\} \in W$. Поскольку W — выпуклое множество, то выпуклым является и T.

Введем две вспомогательные задачи линейного программирования:

$$\theta \to \min, \qquad \theta \to \max,$$
$$A^T u - \theta c_\infty \leqslant c_0, \qquad A^T u - \theta c_\infty \leqslant c_0.$$

Экстремальные значения их целевых функций обозначим соответственно θ_* и θ^*. Если θ_* и θ^* конечны, то они принадлежат T. Более того, в силу определения θ_*, θ^* и выпуклости T имеем $T = [\theta_*, \theta^*]$. Далее, $T = (-\infty, \theta^*]$ при $\theta_* = -\infty$, $\theta^* < +\infty$; $T = [\theta_*, +\infty)$ при $\theta_* > -\infty$, $\theta^* = +\infty$; $T = (-\infty, \infty)$ при $\theta_* = -\infty$, $\theta^* = +\infty$. Таким образом, во всех случаях множество T является замкнутым промежутком. Точки θ_*, θ^* назовем концами этого промежутка.

Приведем пример, показывающий, что возможно равенство $\theta_* = \theta^*$. Параметрическая задача

$$x[1] - \theta x[2] + \theta x[3] \to \min,$$
$$x[1] = 1,$$
$$x[1] \geqslant 0,\ x[2] \geqslant 0,\ x[3] \geqslant 0$$

разрешима при $\theta = 0$. При $\theta > 0$ ее целевая функция не ограничена снизу на планах $x = (1, x[2], 0)$, а при $\theta < 0$ — на планах $x = (1, 0, x[3])$. Это значит, что у рассматриваемой задачи $T = \{0\}$ или $\theta_* = \theta^* = 0$.

Дальнейший анализ связан с предположением $\theta_* < \theta^*$. Обозначим $H(\theta)$ совокупность оптимальных столбцовых базисов задачи (8.1) при фиксированном $\theta \in T$.

Теорема 8.1. Существует конечное разбиение промежутка T

$$\theta_* = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p < \tau_{p+1} = \theta^*,$$

такое, что на каждом интервале (τ_i, τ_{i+1}) множество $H(\theta)$ не меняется.

Доказательство. Зафиксируем допустимый базис N_* и положим, как и раньше, $N_0=N\setminus N_*$, $Y[N_*, N_0]=D[N_*, M]\times \times A[M, N_0]$. Для вектора оценок $\Delta(\theta)[N_0]$ справедливо представление

$$\Delta(\theta)[N_0]=c(\theta)[N_0]-c(\theta)[N_*]\times Y[N_*, N_0]=c_0[N_0]-$$
$$-c_0[N_*]\times Y[N_*, N_0]+\theta\{c_\infty[N_0]-c_\infty[N_*]\times Y[N_*, N_0]\}=$$
$$=\Delta_0[N_0]+\theta\Delta_\infty[N_0]. \quad (8.3)$$

Каждая компонента $\Delta(\theta)[j]$ является линейной по θ функцией и потому имеет не более одной перемены знака. Отсюда следует, что неравенство $\Delta(\theta)[N_0]\geqslant\mathbf{0}[N_0]$ либо вообще не выполняется ни при каком θ, либо выполняется на некотором замкнутом (ограниченном или неограниченном) промежутке $T(N_*)$, содержащемся в T. Этот промежуток естественно назвать промежутком оптимальности базиса N_*. Концы $T(N_*)$ обозначим $\theta_0(N_*)$, $\theta_1(N_*)$.

Рассмотрим все точки $\theta_0(N_*)$, $\theta_1(N_*)$, соответствующие различным допустимым базисам N_* с непустым $T(N_*)$. Упорядочим их по возрастанию, предварительно объединив совпавшие точки. В результате придем к требуемому разбиению промежутка T. Теорема доказана.

Множество оптимальных базисов $H(\theta)$ при $\theta\in(\tau_i, \tau_{i+1})$ не зависит от θ, поэтому его можно обозначить H_i. Согласно (8.3) имеем

$$\begin{aligned} &H_i\cup H_{i-1}\subset H(\tau_i), \quad i\in 1:p,\\ &H_0\subset H(\theta_*), \quad H_p\subset H(\theta^*). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Вместе с $H(\theta)$ при $\theta\in(\tau_i, \tau_{i+1})$ не меняется и множество оптимальных вершин задачи (8.1).

Определим на T функцию $\mu(\theta)=\min\limits_{x\in\Omega}\langle c(\theta), x\rangle$.

Теорема 8.2. График функции μ является непрерывной ломаной с узлами в точках τ_i, $i\in 1:p$. Кроме того, μ — вогнутая функция, т. е. при всех θ_0, θ_1 из T и $t\in[0, 1]$ выполняется неравенство

$$\mu(t\theta_1+(1-t)\theta_0)\geqslant t\mu(\theta_1)+(1-t)\mu(\theta_0). \quad (8.5)$$

Доказательство. Возьмем $N_*^{(i)}\in H_i$ и найдем оптимальную вершину $x_*^{(i)}$ множества Ω, соответствующую $N_*^{(i)}$:

$$\begin{aligned} x_*^{(i)}[N_*^{(i)}]&=(A[M, N_*^{(i)}])^{-1}\times b[M],\\ x_*^{(i)}[N\setminus N_*^{(i)}]&=\mathbf{0}[N\setminus N_*^{(i)}]. \end{aligned}$$

Выше отмечалось, что вершина $x_*^{(i)}$ является оптимальной при всех $\theta\in(\tau_i, \tau_{i+1})$, поэтому при указанных θ

$$\mu(\theta)=\langle c(\theta), x_*^{(i)}\rangle=\langle c_0, x_*^{(i)}\rangle+\theta\langle c_\infty, x_*^{(i)}\rangle.$$

Установлено, что функция μ линейна на (τ_i, τ_{i+1}), $i \in 0:p$. Из (8.4) следует ее непрерывность в точках τ_i, $i \in 0:p+1$.

Проверим вогнутость μ. Зафиксируем θ_0, θ_1 из T и $t \in [0, 1]$. При любом $x \in \Omega$ имеем

$$\langle c(t\theta_1 + (1-t)\theta_0), x\rangle = t\langle c(\theta_1), x\rangle + (1-t)\langle c(\theta_0), x\rangle \geqslant$$
$$\geqslant t\mu(\theta_1) + (1-t)\mu(\theta_0),$$

а это немедленно приводит к (8.5). Теорема доказана.

На рис. 8 демонстрируется типичное поведение функции μ.

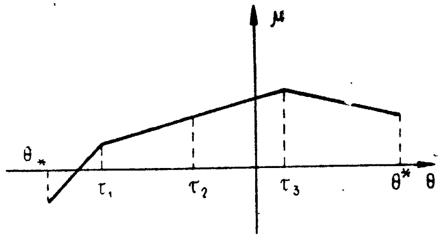


Рис. 8.

Переходим к методу решения параметрической задачи (8.1). Наша цель — найти оптимальный базис при каждом $\theta \in T$. Чтобы выделить параметрический эффект в чистом виде, сделаем дополнительные предложения, обеспечивающие в первую очередь то, что множество $H(\theta)$ при каждом $\theta \in T$ состоит из минимально возможного количества базисов:

1) $H_i = \{N_*^{(i)}\}$, $i \in 0:p$, причем $N_*^{(i)}$ является *строго* оптимальным базисом при всех $\theta \in (\tau_i, \tau_{i+1})$;

2) $N_*^{(i)} \neq N_*^{(i-1)}$, $i \in 1:p$;

3) $H(\tau_i) = \{N_*^{(i)}\} \cup \{N_*^{(i-1)}\}$, $i \in 1:p$,
$H(\theta_*) = \{N_*^{(0)}\}$, $H(\theta^*) = \{N_*^{(p)}\}$.

Возьмем $\theta_0 \in (\theta_*, \theta^*)$ и решим симплекс-методом задачу (8.1) при $\theta = \theta_0$. В частности, найдем оптимальный базис N_*. Положим $N_0 = N \setminus N_*$. Возможны два случая.

I. $\Delta(\theta_0)[N_0] > 0[N_0]$. Согласно (8.3) имеем

$$\Delta(\theta)[N_0] = \Delta(\theta_0)[N_0] + (\theta - \theta_0)\Delta_\infty[N_0]. \tag{8.6}$$

Отсюда следует, что $\Delta(\theta)[N_0] > 0[N_0]$ в некоторой окрестности U точки θ_0, т. е. N_* — строго оптимальный базис при всех $\theta \in U$. Учитывая условие 2), заключаем, что θ_0 не совпадает ни с одной точкой переключения τ_i. Значит, $\theta_0 \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ при некотором $k \in 0:$ р.

Будем искать решение задачи (8.1) при $\theta > \theta_0$. Случай $\theta < \theta_0$ рассматривается аналогично.

I.1. Обозначим $J_\infty = \{j \in N_0 \mid \Delta_\infty[j] < 0\}$. Если $J_\infty = \varnothing$, то $\Delta(\theta)[N_0] > 0[N_0]$ при всех $\theta > \theta_0$. Таким образом, N_* является строго оптимальным базисом при $\theta \in [\theta_0, +\infty)$. Процесс закончен.

Предположим, что $J_\infty \neq \varnothing$.

I.2. Опираясь на (8.6), определим правый конец τ_{k+1} промежутка оптимальности базиса N_*:

$$\tau_{k+1} = \theta_0 + \min_{j \in J_\infty} \{\Delta(\theta_0)[j]/(-\Delta_\infty[j])\}.$$

Обозначим j_k один из индексов, на которых достигается последний минимум. Имеем $j_k \in N_0$, $\Delta(\tau_{k+1})[j_k]=0$ и $\Delta(\theta)[j_k]<0$ при всех $\theta > \tau_{k+1}$. Заметим также, что в соответствии с условием 1) будет $N_* = N_*^{(k)}$.

I.3. Вычислим вектор

$$y_k[N_*^{(k)}] = D_k[N_*^{(k)}, M] \times A[M, j_k],$$

где $D_k[N_*^{(k)}, M] = (A[M, N_*^{(k)}])^{-1}$. Если $y_k[N_*^{(k)}] \leqslant \mathbf{0}[N_*^{(k)}]$, то при $\theta > \tau_{k+1}$ задача (8.1) не имеет решения. Это значит, что $\tau_{k+1} = \theta^*$. Процесс закончен.

Допустим, что у вектора $y_k[N_*^{(k)}]$ хотя бы одна компонента положительна.

I.4. Обозначим l_k один из индексов, на которых достигается следующий минимум:

$$\min_{\{j \in N_*^{(k)} \mid y_k[j]>0\}} \{D_k[j, M] \times b[M]/y_k[j]\}.$$

Как установлено в § 6, индексное множество $\widetilde{N}_* = N_*^{(k)} \setminus \{l_k\} \cup \cup \{j_k\}$ является допустимым базисом.

Согласно (8.4) $N_*^{(k)}$ — оптимальный базис при $\theta = \tau_{k+1}$. Покажем, что при том же θ оптимальным будет и базис $\widetilde{N}_*$.

Воспользуемся формулами (6.5), (6.6) для пересчета вектора оценок $\Delta(\tau_{k+1}, N_*^{(k)})[N \setminus N_*^{(k)}]$ в $\Delta(\tau_{k+1}, \widetilde{N}_*)[N \setminus \widetilde{N}_*]$. Учитывая равенство $\Delta(\tau_{k+1}, N_*^{(k)})[j_k] = 0$, получаем

$$\Delta(\tau_{k+1}, \widetilde{N}_*)[j] = \Delta(\tau_{k+1}, N_*^{(k)})[j] \geqslant 0, \quad j \in N \setminus N_*^{(k)} \setminus \{j_k\},$$
$$\Delta(\tau_{k+1}, \widetilde{N}_*)[l_k] = -\Delta(\tau_{k+1}, N_*^{(k)})[j_k]/y_k[l_k] = 0.$$

Таким образом, $\Delta(\tau_{k+1}, \widetilde{N}_*)[N \setminus \widetilde{N}_*] \geqslant \mathbf{0}[N \setminus \widetilde{N}_*]$, т. е. действительно $\widetilde{N}_*$ — оптимальный при $\theta = \tau_{k+1}$ базис.

Согласно условию 3) $\tau_{k+1} < \theta^*$ (множество $H(\theta^*)$ состоит из единственного оптимального базиса) и $\widetilde{N}_* = N_*^{(k+1)}$.

I.5. В силу условия 1) базис $N_*^{(k+1)}$ — строго оптимальный на (τ_{k+1}, τ_{k+2}). Положим $N_0^{(k+1)} = N \setminus N_*^{(k+1)}$ и запишем равенство, аналогичное (8.6):

$$\Delta(\theta, N_*^{(k+1)})[N_0^{(k+1)}] = \Delta(\tau_{k+1}, N_*^{(k+1)})[N_0^{(k+1)}] + \\ + (\theta - \tau_{k+1})\Delta_\infty(N_*^{(k+1)})[N_0^{(k+1)}].$$

Отметим, что $\Delta\left(\tau_{k+1}, N_*^{(k+1)}\right)[j] > 0$ на тех индексах $j \in N_0^{(k+1)}$, на которых $\Delta_\infty\left(N_*^{(k+1)}\right)[j] \leqslant 0$.

Теперь, по существу, цикл повторяется, начиная с п. I.1.

Осталось рассмотреть второй случай.

II. $\Delta(\theta_0)[N_0] \geqslant 0[N_0]$ и множество $J_0 = \{j \in N_0 \mid \Delta(\theta_0)[j] = 0\}$ непусто. Согласно условию 1) $\theta_0 = \tau_{k+1}$ при некотором $k \in 0:p-1$. Нужно выяснить, какое из равенств $N_* = N_*^{(k)}$ или $N_* = N_*^{(k+1)}$ имеет место.

Если $\Delta_\infty[J_0] \geqslant 0[J_0]$, то $N_* = N_*^{(k+1)}$, и следует перейти к п. I.5. В противном случае $N_* = N_*^{(k)}$, причем существует индекс $j_k \in N_0^{(k)}$, такой, что $\Delta(\tau_{k+1})[j_k] = 0$ и $\Delta(\theta)[j_k] < 0$ при всех $\theta > \tau_{k+1}$. Переходим к п. I.3.

Описание метода решения параметрической задачи (8.1) при выполнении условий 1) — 3) завершено. Его основная особенность состоит в том, что при $\theta = \tau_{k+1}$ переход от оптимального базиса $N_*^{(k)}$ к оптимальному базису $N_*^{(k+1)}$ осуществляется с помощью одного шага симплекс-метода.

Упражнения

8.1. Привести пример, когда у задачи (8.1) $T = \varnothing$.

8.2. Привести пример, когда у задачи (8.1) $T = (-\infty, +\infty)$.

8.3. Пусть $T \neq \varnothing$. Показать, что $\theta_* = -\infty$ при $c_\infty \leqslant 0$ и $\theta_* = +\infty$ при $c_\infty \geqslant 0$.

8.4. Построить график функции

$$\mu(\theta) = \min_{x \in \Omega} \{-(1+\theta)x[2] + (1-\theta)x[3]\},$$

где множество Ω определяется неравенствами

$$x[1] + x[2] \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant x[1] \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x[3] \leqslant 1.$$

§ 9. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ В ПРАВОЙ ЧАСТИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Пусть $b(\theta) = b_0 + \theta b_\infty$, где $b_\infty \neq 0$ и θ — любое вещественное число. Рассмотрим параметрическую задачу

$$\begin{aligned} &\langle c, x\rangle \to \min, \\ &A[M, N] \times x[N] = b(\theta)[M], \\ &x[N] \geqslant 0[N]. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Запишем к ней двойственную:

$$\begin{aligned} &\langle b(\theta), u\rangle \to \max, \\ &u[M] \times A[M, N] \leqslant c[N]. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Обозначим $\Omega(\theta)$ и Λ множества планов задач (9.1) и (9.2) соответственно. Предполагаем, что $\operatorname{rank} A[M, N] = |M|$ и $\Lambda \neq \varnothing$. Согласно теореме I.9.2 задача (9.1) при $\theta=\theta_0$ разрешима в том и только том случае, когда $\Omega(\theta_0) \neq \varnothing$.

Представим ограничения задачи (9.1) в виде

$$Ax - \theta b_\infty' = b_0, \quad x \geqslant \mathbf{0}. \tag{9.3}$$

Множество тех θ, при которых задача (9.1) имеет решение, обозначим T, а множество пар $\{x, \theta\}$, удовлетворяющих (9.3), — V. Очевидно, что $T \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $V \neq \varnothing$. Учитывая теорему I.6.3, получаем следующий результат

Лемма 9.1. Для того чтобы $T \neq \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения h системы $hA \leqslant \mathbf{0}$, $\langle b_\infty, h\rangle = 0$ выполнялось неравенство $\langle b_0, h\rangle \leqslant 0$.

В дальнейшем считаем, что $T \neq \varnothing$. Введем две вспомогательные задачи линейного программирования:

$$\begin{array}{cc} \theta \to \min, & \theta \to \max, \\ Ax - \theta b_\infty = b_0, & Ax - \theta b_\infty = b_0, \\ x \geqslant \mathbf{0}, & x \geqslant \mathbf{0}. \end{array} \tag{9.4}$$

Экстремальные значения их целевых функций обозначим соответственно θ_* и θ^*. Нетрудно понять, что $T = [\theta_*, \theta^*]$ при конечных θ_*, θ^*; $T = (-\infty, \theta^*]$ при $\theta^* = -\infty$, $\theta^* < +\infty$; $T = [\theta_*, +\infty)$ при $\theta_* > -\infty$, $\theta^* = +\infty$ и $T = (-\infty, +\infty)$ при $\theta_* = -\infty$, $\theta^* = +\infty$. Таким образом, во всех случаях множество T является замкнутым промежутком с концами в точках θ_*, θ^*.

Предположим, что $\theta_* < \theta^*$, и обозначим $H(\theta)$ совокупность оптимальных столбцовых базисов задачи (9.1) при фиксированном $\theta \in T$.

Теорема 9.1. Существует конечное разбиение промежутка T

$$\theta_* = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_r < \sigma_{r+1} = \theta^*,$$

такое, что на каждом интервале (σ_i, σ_{i+1}) множество $H(\theta)$ не меняется.

Доказательство. Введем множество P столбцовых базисов N_*, удовлетворяющих условию
$c[N \setminus N_*] - c[N_*] \times D[N_*, M] \times A[M, N \setminus N_*] \geqslant \mathbf{0}[N \setminus N_*]$, где, как обычно, $D[N_*, M] = (A[M, N_*])^{-1}$. Оптимальные базисы принадлежат P.

Зафиксируем $N_* \in P$ и сопоставим ему вектор

$$\begin{aligned} x_*(\theta)[N_*] &= D[N_*, M] \times b(\theta)[M] = D[N_*, M] \times b_0[M] + \\ &+ \theta D[N_*, M] \times b_\infty[M] = x_0^*[N_*] + \theta x_\infty^*[N_*]. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Каждая компонента $x_*(\theta)[j]$ является линейной по θ функцией и потому имеет не более одной перемены знака. Отсюда следует, что неравенство $x_*(\theta)[N_*] \geqslant \mathbf{0}[N_*]$ либо вообще не выполняется ни при каком θ, либо выполняется на некотором замкнутом промежутке $T(N_*)$ с концами $\theta_0(N_*)$, $\theta_1(N_*)$, содержащемся в T. Этот промежуток есть промежуток оптимальности базиса N_*.

Рассмотрим все точки $\theta_0(N_*)$, $\theta_1(N_*)$, соответствующие различным $N_* \in P$ с непустым $T(N_*)$. Упорядочим их по возрастанию, предварительно объединив совпавшие точки. В результате придем к требуемому разбиению промежутка T. Теорема доказана.

Множество оптимальных базисов $H(\theta)$ при $\theta \in (\sigma_i, \sigma_{i+1})$ не зависит от θ, поэтому его можно обозначить H_i. Согласно (9.5) имеем

$$\begin{aligned} &H_i \cup H_{i-1} \subset H(\sigma_i), \quad i \in 1:r; \\ &H_0 \subset H(\theta_*), \quad H_r \subset H(\theta^*). \end{aligned} \tag{9.6}$$

Определим на T функцию $\varkappa(\theta) = \min\limits_{x \in \Omega(\theta)} \langle c, x\rangle$.

Теорема 9.2. График функции $\varkappa$ является непрерывной ломаной с узлами в точках σ_i, $i \in 1:r$. Кроме того, $\varkappa$ — выпуклая функция, т. е. при всех θ_0, θ_1 из T и $t \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\varkappa(t\theta_1 + (1-t)\theta_0) \leqslant t\varkappa(\theta_1) + (1-t)\varkappa(\theta_0).$$

Доказательство. Возьмем базис $N_* \in H_i$. Тогда вектор $x_*(\theta)[N]$ с компонентами

$$\begin{aligned} &x_*(\theta)[N_*] = x_0^*[N_*] + \theta x_\infty^*[N_*], \\ &x_*(\theta)[N \setminus N_*] = 0[N \setminus N_*] \end{aligned}$$

будет оптимальной вершиной для задачи (9.1) при всех $\theta \in \in (\sigma_i, \sigma_{i+1})$. При указанных θ имеем

$$\varkappa(\theta) = \langle c, x_*(\theta)\rangle = c[N_*] \times x_0^*[N_*] + \theta c[N_*] \times x_\infty^*[N_*].$$

Это значит, что функция $\varkappa$ линейна на (σ_i, σ_{i+1}), $i \in 0:r$. Из (9.6) следует ее непрерывность в точках σ_i, $i \in 0:r+1$.

Проверим выпуклость $\varkappa$. Зафиксируем θ_0, θ_1 из T, $t \in [0,1]$ и положим $\theta(t) = t\theta_1 + (1-t)\theta_0$. Обозначим $x_*(\theta_0)$, $x_*(\theta_1)$ оптимальные вершины задачи (9.1) при $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$ соответственно. Отметим, что вектор $\tilde{x} = tx_*(\theta_1) + (1-t)x_*(\theta_0)$ принадлежит $\Omega(\theta(t))$, поэтому

$$\begin{aligned} \varkappa(\theta(t)) = \min_{x \in \Omega(\theta(t))} \langle c, x\rangle \leqslant \langle c, \tilde{x}\rangle = t\langle c, x_*(\theta_1)\rangle + \\ + (1-t)\langle c, x_*(\theta_0)\rangle = t\varkappa(\theta_1) + (1-t)\varkappa(\theta_0). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

На рис. 9 демонстрируется типичное поведение функции $\varkappa$. Обратимся к методу решения параметрической задачи (9.1).

В отличие от предыдущего параграфа не будем делать никаких дополнительных предположений.

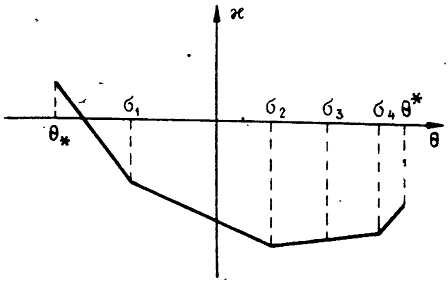


Рис. 9.

Прежде всего вычислим θ_* и θ^*. Для этого необходимо решить задачи линейного программирования (9.4). Если $\theta_*=\theta^*$, то процесс заканчивается решением задачи (9.1) при $\theta=\theta_*$.

Пусть $\theta_*<\theta^*$. Возьмем $\theta_0\in(\theta_*, \theta^*)$ и решим задачу (9.1) при $\theta=\theta_0$. В частности, найдем оптимальный базис N_* и соответствующий оптимальный план $x_*(\theta_0)$ с неотрицательными компонентами. Дальнейшее описание проведем для $\theta>\theta_0$. Случай $\theta<\theta_0$ рассматривается аналогично.

1. Согласно (9.5) имеем

$$x_*(\theta)[N_*]=x_*(\theta_0)[N_*]+(\theta-\theta_0)x^*_\infty[N_*]. \qquad (9.7)$$

Обозначим $J_\infty=\{j\in N_* \mid x^*_\infty[j]<0\}$. Если $J_\infty=\varnothing$, то N_* — оптимальный базис при всех $\theta>\theta_0$. Процесс закончен.

Предположим, что $J_\infty\neq\varnothing$.

2. Опираясь на (9.7), определим правый конец σ_{k+1} промежутка оптимальности базиса N_*:

$$\sigma_{k+1}=\theta_0+\min_{j\in J_\infty}\{x_*(\theta_0)[j]/(-x^*_\infty[j])\}. \qquad (9.8)$$

Если $\sigma_{k+1}=\theta^*$, то процесс закончен.

Допустим, что $\sigma_{k+1}<\theta^*$. Обозначим j_k один из индексов, на которых достигается минимум в (9.8). Имеем $j_k\in N_*$, $x_*(\sigma_{k+1})[j_k]=0$ и $x_*(\theta)[j_k]<0$ при всех $\theta>\sigma_{k+1}$. Для удобства положим $N_*=N_*^{(k)}$.

3. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\langle b(\theta), u\rangle\to\min,\\ A^T[N, M]\times u[M]\geqslant -c[N],\end{gathered} \qquad (9.9)$$

очевидным образом связанную с (9.2). Множество ее планов Λ_0 совпадает с $-\Lambda$. Нетрудно проверить, что точка

$$u_k[M]=-D_k^T[M, N_*^{(k)}]\times c[N_*^{(k)}],$$

где $D_k[N_*^{(k)}, M]=(A[M, N_*^{(k)}])^{-1}$, является вершиной Λ_0, а индексное множество $N_*^{(k)}$ — ее строчным базисом. Обратная базисная матрица имеет вид $B_k[M, N_*^{(k)}]=D_k^T[M, N_*^{(k)}]$.

Применим метод последовательного улучшения плана из § 5 к задаче (9.9) при $\theta=\sigma_{k+1}$. В качестве исходных данных возьмем u_k, $N_*^{(k)}$, $B_k[M, N_*^{(k)}]$.

3.1. Найдем вектор оценок

$$\Delta_k\left[N_*^{(k)}\right]=b\left(\sigma_{k+1}\right)[M]\times B_k\left[M,\ N_*^{(k)}\right]=$$
$$=D_k\left[N_*^{(k)},\ M\right]\times b\left(\sigma_{k+1}\right)[M]=x_*\left(\sigma_{k+1}\right)\left[N_*^{(k)}\right].$$

По построению $x_*\left(\sigma_{k+1}\right)\left[N_*^{(k)}\right]\geqslant\mathbf{0}\left[N_*^{(k)}\right]$, поэтому вершина u_k является оптимальной. Тем не менее продолжим вычисления.

3.2. Найдем вектор

$$w_k\left[N\setminus N_*^{(k)}\right]=A^T\left[N\setminus N_*^{(k)},\ M\right]\times B_k\left[M,\ j_k\right]=$$
$$=D_k\left[j_k,\ M\right]\times A\left[M,\ N\setminus N_*^{(k)}\right]$$

(индекс j_k определен в п. 2). Покажем, что у этого вектора хотя бы одна компонента отрицательна. Допустим противное: $w_k[N\setminus N_*^{(k)}]\geqslant 0[N\setminus N_*^{(k)}]$. Поскольку оценка $x_*(\theta)[j_k]$ при $\theta>\sigma_{k+1}$ отрицательна, то целевая функция задачи (9.9) при указанных θ не ограничена снизу на Λ_0. Согласно теореме I.9.3 множество планов $\Omega(\theta)$ задачи (9.1) при $\theta>\sigma_{k+1}$ пусто, что противоречит неравенству $\sigma_{k+1}<\theta^*$. Таким образом, действительно вектор $w_k[N/N_*^{(k)}]$ имеет по крайней мере одну отрицательную компоненту.

3.3. Обозначим l_k один из индексов, на которых достигается следующий минимум:

$$\min_{\left\{j\in N\setminus N_*^{(k)}\ \middle|\ w_k[j]<0\right\}}\frac{A^T[j,\ M]\times u_k[M]+c[j]}{-w_k[j]}=$$
$$=\min_{\left\{j\in N\setminus N_*^{(k)}\ \middle|\ w_k[j]<0\right\}}\left\{\left(c[j]-c\left[N_*^{(k)}\right]\times D_k\left[N_*^{(k)},\ M\right]\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times A[M,\ j]\right)/\left(-w_k[j]\right)\right\}.$$

Положим $N_*^{(k+1)}=N_*^{(k)}\setminus\{j_k\}\cup\{l_k\}$. Нетрудно понять, что $N_*^{(k+1)}$ — другой строчный базис оптимальной вершины u_k. В частности,

$$c\left[N\setminus N_*^{(k+1)}\right]-c\left[N_*^{(k+1)}\right]\times D_{k+1}\left[N_*^{(k+1)},\ M\right]\times$$
$$\times A\left[M,\ N\setminus N_*^{(k+1)}\right]\geqslant\mathbf{0}\left[N\setminus N_*^{(k+1)}\right].\qquad(9.10)$$

Найдем новый вектор оценок. Учитывая (5.15), запишем

$$x_*\left(\sigma_{k+1},\ N_*^{(k+1)}\right)\left[N_*^{(k+1)}\right]=b\left(\sigma_{k+1}\right)[M]\times B_{k+1}\left[M,\ N_*^{(k+1)}\right]=$$
$$=b\left(\sigma_{k+1}\right)[M]\times B_k\left[M,\ N_*^{(k)}\right]\times L_k\left[N_*^{(k)},\ N_*^{(k+1)}\right]=$$
$$=x_*\left(\sigma_{k+1},\ N_*^{(k)}\right)\left[N_*^{(k)}\right]\times L_k\left[N_*^{(k)},\ N_*^{(k+1)}\right].$$

Но $x_*\left(\sigma_{k+1},\ N_*^{(k)}\right)[j_k]=0$, поэтому

$$x_*\left(\sigma_{k+1},\ N_*^{(k+1)}\right)[l_k]=x_*\left(\sigma_{k+1},\ N_*^{(k)}\right)[j_k]/w_k[l_k]=0,$$
$$x_*\left(\sigma_{k+1},\ N_*^{(k+1)}\right)[j]=x_*\left(\sigma_{k+1},\ N_*^{(k)}\right)[j]\geqslant 0,\quad j\in N_*^{(k)}\setminus\{j_k\}.$$

Поскольку

$$x_* \left(\sigma_{k+1}, N_*^{(k+1)}\right) \left[N_*^{(k+1)}\right] \geqslant 0 \left[N_*^{(k+1)}\right], \qquad (9.11)$$

то $N_*^{(k+1)}$ — оптимальный строчный базис вершины u_k. Вместе с тем на основании (9.10), (9.11) заключаем, что $N_*^{(k+1)}$ — оптимальный столбцовый базис для задачи (9.1) при $\theta = \sigma_{k+1}$.

Теперь цикл повторяется. Следует перейти к п. 1, предварительно заменив θ_0 на σ_{k+1} и N_* на $N_*^{(k+1)}$.

Описание метода решения параметрической задачи (9.1) завершено.

Замечание. При реализации этого метода необходимо учитывать возможность зацикливания, так как в точках переключения происходит перебор оптимальных базисов вырожденной оптимальной вершины задачи (9.9).

Упражнение

9.1. Привести примеры, когда у задачи (9.1) $T = \varnothing$; T состоит из одной точки; $T = (-\infty, +\infty)$.

§ 10. ОБЩАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим вкратце тот общий случай, когда все данные задачи линейного программирования

$$\begin{gathered} \langle c, x \rangle \to \min, \\ A[M, N] \times x[N] = b[M], \\ x[N] \geqslant 0[N] \end{gathered} \qquad (10.1)$$

линейно зависят от параметра θ, т. е. $c = c(\theta) = c_0 + \theta c_\infty$, $b = b(\theta) = b_0 + \theta b_\infty$, $A = A(\theta) = A_0 + \theta A_\infty$, и θ пробегает всю вещественную ось.

Обозначим G совокупность индексных множеств N_*, таких, что $N_* \subset N$, $|N_*| = |M|$. Положим, далее,

$$q(\theta, N_*) = \det A(\theta)[M, N_*].$$

Так как $q(\theta, N_*)$ есть полином от θ при каждом $N_* \in G$, то либо $q(\theta, N_*) \equiv 0$, либо $q(\theta, N_*)$ имеет конечное число корней. Обозначим G_0 множество тех N_*, для которых $q(\theta, N_*) \equiv 0$, а G_1 — разность $G \setminus G_0$. Предположим, что $G_1 \neq \varnothing$. Ясно, что столбцовым базисом в задаче (10.1) при каком-нибудь значении θ может быть лишь $N_* \in G_1$.

В силу конечности G_1 существует конечная последовательность чисел

$$-\infty = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_s < \gamma_{s+1} = +\infty,$$

обладающая тем свойством, что в каждом интервале (γ_i, γ_{i+1}), $i\in 0:s$, при всех $N_*\in G_1$ полином $q(\theta, N_*)$ отличен от нуля.

Обозначим $D(\theta, N_*)[N_*, M]=(A(\theta)[M, N_*])^{-1}$. Тогда для θ, не принадлежащих последовательности $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, каждое множество $N_*\in G_1$ является столбцовым базисом и определены векторы

$$x(\theta, N_*)[N_*]=D(\theta, N_*)[N_*, M]\times b(\theta)[M], \tag{10.2}$$

$$\Delta(\theta, N_*)[N\setminus N_*]=c(\theta)[N\setminus N_*]-c(\theta)[N_*]\times \times D(\theta, N_*)[N_*, M]\times A(\theta)[M, N\setminus N_*]. \tag{10.3}$$

Дальнейший анализ основан на том, что для любого вещественного θ имеется следующий полный набор альтернатив:

I) множество $\Omega(\theta)$ планов задачи (10.1) пусто;

II) множество $\Omega(\theta)$ непусто и задача (10.1) разрешима;

III) множество $\Omega(\theta)$ непусто, но задача (10.1) не разрешима, т. е.

$$\inf_{x\in\Omega(\theta)} \langle c(\theta), x\rangle=-\infty.$$

Теорема 10.1. Существует конечное разбиение вещественной оси

$$-\infty=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_r<\tau_{r+1}=+\infty,$$

такое, что на каждом интервале (τ_i, τ_{i+1}) реализуется лишь одна из альтернатив I)—III). Если это альтернатива II), то набор оптимальных базисов одинаков для всех $\theta\in(\tau_i, \tau_{i+1})$.

Доказательство. Будем рассматривать значения θ, не принадлежащие последовательности $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$. Для них выяснение вопроса о том, какая из альтернатив I)—III) имеет место, сводится к анализу знаков компонент векторов $x(\theta, N_*)[N_*]$ и $\Delta(\theta, N_*)[N\setminus N_*]$ при $N_*\in G_1$. Альтернатива I) характеризуется тем, что у вектора $x(\theta, N_*)$ при всех $N_*\in G_1$ хотя бы одна компонента отрицательна; альтернатива II) — тем, что векторы $x(\theta, N_*)$ и $\Delta(\theta, N_*)$ неотрицательны при некотором $N_*\in G_1$; альтернатива III) имеет место во всех остальных случаях, т. е. когда $x(\theta, N_*)\geqslant 0$ при некотором $N_*\in G_1$ и для всех таких N_* хотя бы одна компонента вектора $\Delta(\theta, N_*)$ отрицательна.

Согласно (10.2), (10.3) каждая компонента векторов $x(\theta, N_*)$ и $\Delta(\theta, N_*)$ есть дробь, знаменателем которой служит $q(\theta, N_*)$, а числителем — некоторый полином от θ. Зафиксируем $N_*\in G_1$ и рассмотрим компоненту $x(\theta, N_*)[j]$, $j\in N_*$. Ей соответствует разбиение вещественной оси, такое, что в интервалах между соседними точками разбиения дробь $x(\theta, N_*)[j]$ сохраняет знак (в число точек разбиения включим все вещественные корни полинома $q(\theta, N_*)$). Аналогичные разбиения порождаются компонентами $\Delta(\theta, N_*)[j]$, $j\in N\setminus N_*$.

Теперь можно выделить интервалы, в которых при всех

$N_* \in G_1$ хотя бы одна компонента вектора $x(\theta, N_*)$ отрицательна, и интервалы с одинаковым (непустым) набором оптимальных базисов $N_* \in G_1$. Концы этих интервалов вместе с $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ упорядочим по возрастанию, предварительно объединив совпавшие точки. В результате придем к требуемому разбиению вещественной оси. Теорема доказана.

Введем функцию $\varphi(\theta) = \min\limits_{x \in \Omega(\theta)} \langle c(\theta), x \rangle$ и предположим, что на некотором интервале (τ_i, τ_{i+1}) реализуется альтернатива II). Обозначим H_i совокупность оптимальных при $\theta \in (\tau_i, \tau_{i+1})$ базисов.

Теорема 10.2. Функция φ на (τ_i, τ_{i+1}) является непрерывной дробно-рациональной функцией. При этом она непрерывна справа в точке $\theta = \tau_i$, если $q(\tau_i, N_*) \neq 0$ при некотором $N_* \in H_i$, и непрерывна слева в точке $\theta = \tau_{i+1}$, если $q(\tau_{i+1}, N_*) \neq 0$ при некотором $N_* \in H_i$.

Доказательство. Возьмем произвольный базис N_* из H_i. При $\theta \in (\tau_i, \tau_{i+1})$ имеем

$$\varphi(\theta) = c(\theta)[N_*] \times D(\theta, N_*)[N_*, M] \times b(\theta)[M], \quad (10.4)$$

так что действительно φ — непрерывная дробно-рациональная на (τ_i, τ_{i+1}) функция. Утверждения о непрерывности φ в концевых точках $\theta = \tau_i$ и $\theta = \tau_{i+1}$ очевидным образом следуют из формул (10.2)—(10.4). Теорема доказана.

Упражнение

10.1. Проверить, что теоремы 10.1, 10.2 остаются справедливыми и в том случае, когда данные задачи (10.1) есть полиномы от θ:

$$c = \sum_{i=0}^{m_1} \theta^i c_i, \quad b = \sum_{i=0}^{m_2} \theta^i b_i, \quad A = \sum_{i=0}^{m_3} \theta^i A_i.$$

ГЛАВА III

ВЫПУКЛЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании нелинейных эстремальных задач основной интерес представляют те же вопросы, что и для задач линейных — существование минимума, критерий оптимальности. Однако ситуация здесь значительно сложнее.

Ограничиваясь предположением о дифференцируемости целевой функции и не требуя от нее каких-либо специальных свойств, можно указать лишь необходимые условия минимума. (Аналогичным образом обстоит дело и в классическом анализе.) Для задач с линейными ограничениями вывод необходимых условий минимума основан на том, что точка минимума является решением некоторой задачи линейного программирования (§ 2).

В § 3—11 рассматриваются экстремальные задачи с выпуклой целевой функцией. Для них удается получить необходимые и достаточные условия оптимальности как при условии дифференцируемости (§ 3), так и без него (§ 5). В последнем случае используются важные понятия субградиента и субдифференциала выпуклой функции. Критерий оптимальности можно переформулировать и в терминах седловой точки функции Лагранжа. Это позволяет обосновать применение негладкой штрафной функции для сведения выпуклой экстремальной задачи с линейными ограничениями к выпуклой же задаче безусловной оптимизации (см. конец § 5).

В § 6 продолжается изучение линейной задачи чебышевского приближения, начатое в § I.11. Там была доказана теорема существования решения; здесь выводится критерий оптимальности. Прежде всего отмечается, что целевая функция рассматриваемой задачи является выпуклой. Для нее устанавливается вид субдифференциала, после чего критерий оптимальности следует из общей теоремы 5.2. В § 7 дана оценка размерности множества решений задачи безусловного чебышевского приближения. При некоторых предположениях доказана теорема о строгой единственности.

Среди нелинейных эстремальных задач сравнительно простыми, но исключительно важными являются задачи квадратичного программирования. Им посвящены § 8—11. Матрица D, входящая в определение квадратичной функции, предполагается неотрицательно определенной. Только при выполнении этого условия целевая функция будет выпуклой. В § 9 доказана теорема существования решения для задачи квадратичного программирования и установлен критерий оптимальности. В § 10 развивается теория двойственности квадратичного программирования, а в § 11 указываются некоторые приложения этой теории.

В § 12 мы возвращаемся к задаче нелинейного программирования с гладкой, но невыпуклой целевой функцией. Вводится понятие стационарной точки как точки, удовлетворяющей необходимому условию минимума. (Следует отметить некоторое рассогласование в терминологии: термин «стационарная точка» в теории экстремальных задач соответствует термину «точка, подозрительная на минимум» в математическом анализе.) С помощью вспомогательной задачи квадратичного программирования выясняется содержательный смысл понятия стационарности. Для нестационарных точек определяется направление убывания целевой функции. Теорема 12.2 открывает путь к построению эффективных алгоритмов минимизации. Однако этот вопрос выходит за рамки данной книги.

В § 13 рассматривается задача билинейного программирования. Она легко сводится к разысканию минимума квадратичной функции, но матрица последней может не быть неотрицательно определенной. Это является причиной относительной трудности задачи — приходится считаться с возможностью появления многих локальных минимумов. Тем не менее теорема существования решения для задачи билинейного программирования получается в таком же виде, как и для задачи линейного программирования.

§ 2. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ МИНИМУМА

Напомним некоторые определения. Функция f, заданная на открытом множестве $Q \subset \mathbf{R}^N$, называется дифференцируемой в точке $x \in Q$, если найдется вектор $a \in \mathbf{R}^N$, такой, что

$$f(x+h) = f(x) + \langle a, h\rangle + o(\|h\|),$$

где $o(\|h\|)/\|h\| \to 0$ при $h \to 0$. Вектор a единствен — его j-я компонента необходимо равна частной производной $\partial f(x)/\partial x[j]$, $j \in N$. Этот единственный вектор называется градиентом функции f в точке x и обозначается $f'(x) = f'(x)[N]$. Функцию, дифференцируемую в каждой точке $x \in Q$, называют дифференцируемой на Q.

Выпуклое многогранное множество $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, определяемое соотношениями

$$\begin{aligned} A[M_1, N] \times x[N] &\geqslant b[M_1], \\ A[M_2, N] \times x[N] &= b[M_2], \\ x[N_1] &\geqslant \mathbf{0}[N_1], \end{aligned}$$

является замкнутым множеством. Рассмотрим функцию f, заданную на некотором открытом множестве, содержащем Ω, и дифференцируемую на Ω. В этом случае при всех $x \in \Omega$ справедлива формула

$$f(x+h) = f(x) + \langle f'(x), h\rangle + o(\|h\|). \tag{2.1}$$

Наша цель — получить необходимое условие оптимальности для задачи

$$f(x) \to \min_{x \in \Omega}. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. Если $x_* \in \Omega$ — решение задачи (2.2), то

$$\langle f'(x_*), x - x_*\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Доказательство. При $x = x_*$ утверждение тривиально, поэтому рассмотрим точку $x \in \Omega$ отличную от x_*. Поскольку Ω — выпуклое множество, то отрезок $[x, x_*]$ принадлежит Ω. Учитывая оптимальность x_* и формулу (2.1), при $t \in (0, 1)$ получаем

$$0 \leqslant f(x_* + t(x - x_*)) - f(x_*) = t\langle f'(x_*), x - x_*\rangle + o(\|t(x - x_*)\|).$$

Отсюда следует, что

$$\langle f'(x_*), x - x_*\rangle + \|x - x_*\| \frac{o(\|t(x-x_*)\|)}{\|t(x-x_*)\|} \geqslant 0.$$

Остается в последнем неравенстве перейти к пределу при $t \to +0$. Лемма доказана.

Теорема 2.1. Для того чтобы точка $x_* \in \Omega$ была оптимальной в задаче (2.2), необходимо, чтобы нашелся вектор $u_* = u_*[M]$ со свойствами

$$\begin{aligned} &\langle b, u_*\rangle = \langle f'(x_*), x_*\rangle, \\ &u_*[M] \times A[M, N_1] \leqslant f'(x_*)[N_1], \\ &u_*[M] \times A[M, N_2] = f'(x_*)[N_2], \\ &u_*[M_1] \geqslant \mathbf{0}[M_1]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

При всей значимости этого результата он имеет простое доказательство. Действительно, согласно лемме 2.1 x_* является оптимальным планом задачи линейного программирования

$$\langle f'(x_*), x\rangle \to \min_{x \in \Omega}.$$

Существование требуемого вектора u_* следует теперь из теоремы I.7.1.

Важно отметить, что матрица A и вектор b, входящие в определение Ω, могли быть совершенно произвольными.

Рассмотрим два частных случая.

Теорема 2.2. Для того чтобы точка x_* была оптимальной в задаче (2.2), когда

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N \mid A[M, N] \times x[N] = b[M]\},$$

необходимо, чтобы градиент $f'(x_*)$ допускал представление $f'(x_*) = u_* A$.

Доказательство. По теореме 2.1 найдется вектор u_*, такой, что $\langle b, u_*\rangle = \langle f'(x_*), x_*\rangle$, $u_* A = f'(x_*)$. Первое равенство является избыточным, так как

$$\langle f'(x_*), x_*\rangle = \langle u_* A, x_*\rangle = \langle u_*, Ax_*\rangle = \langle u_*, b\rangle.$$

Второе равенство — требуемое. Теорема доказана.

Теорема 2.3. Для того чтобы точка x_* была оптимальной в задаче (2.2), когда

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbf{R}^N \left| \begin{array}{l} A[M_1, N] \times x[N] \geqslant b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \end{array} \right. \right\},$$

необходимо, чтобы нашелся вектор $u_* = u_*[M]$ со свойствами

$$\begin{gathered} f'(x_*) = u_* A, \\ (b[i] - A[i, N] \times x_*[N]) \times u_*[i] = 0 \quad \forall i \in M_1, \\ u_*[M_1] \geqslant 0[M_1]. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Равенства (2.4) — это известные условия дополняющей нежесткости (см. § I.9).

Доказательство. Соотношения (2.3) в данном случае примут вид

$$\begin{gathered} \langle b, u_*\rangle = \langle f'(x_*), x_*\rangle, \\ u_* A = f'(x_*), \ u_*[M_1] \geqslant 0[M_1]. \end{gathered}$$

Таким образом, в проверке нуждаются только равенства (2.4). Имеем

$$\langle u_*, b\rangle = \langle f'(x_*), x_*\rangle = \langle u_* A, x_*\rangle = \langle u_*, Ax_*\rangle.$$

Отсюда следует, что $\langle u_*, b - Ax_*\rangle = 0$. Теперь переход к (2.4) осуществляется так же, как в теореме I.9.5. Теорема доказана.

Упражнения

2.1. Показать, что функция f, непрерывная на замкнутом множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, имеет там точку минимума, если при некотором $x_0 \in \Omega$ множество $\{x \in \Omega \mid f(x) \leqslant f(x_0)\}$ ограничено.

2.2. Доказать следующее утверждение: если x_* — решение задачи (2.2) в случае

$$\Omega=\{x\in\mathbf{R}^N \mid \sum_{j\in N} x[j]=1, \quad x[N]\geqslant \mathbf{0}[N]\},$$

то найдется число λ, такое, что

$$\partial f(x_*)/\partial x[j]=\lambda \quad \text{при} \quad x_*[j]>0,$$
$$\partial f(x_*)/\partial x[j]\geqslant\lambda \quad \text{при} \quad x_*[j]=0$$

(лемма Гиббса).

2.3. Исследовать экстремальную задачу

$$\sum_{j\in N} a[j]\times\exp(-b[j]\times x[j])\to\min,$$
$$\sum_{j\in N} x[j]=1, \quad x[N]\geqslant\mathbf{0}[N],$$

где $a[N]>\mathbf{0}[N]$, $b[N]>\mathbf{0}[N]$.

§ 3. КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ГЛАДКИХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Выясним, когда необходимое условие оптимальности, установленное в теореме 2.1, является и достаточным. Для этого нам понадобится понятие выпуклой функции.

Функция f, заданная на выпуклом множестве P, называется выпуклой, если при любых x_0, x_1 из P и всех $t\in[0, 1]$ выполняется неравенство

$$f(tx_1+(1-t)x_0)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_0), \tag{3.1}$$

или, что то же самое,

$$f(x_0+t(x_1-x_0))\leqslant f(x_0)+t[f(x_1)-f(x_0)]. \tag{3.2}$$

Простейшими функциями одной переменной, выпуклыми на $(-\infty, \infty)$, являются $y=x^2$ и $y=|x|$. Для них при $t\in[0, 1]$ имеем

$$(tx_1+(1-t)x_0)^2-tx_1^2-(1-t)x_0^2=-t(1-t)(x_1-x_0)^2\leqslant 0,$$
$$|tx_1+(1-t)x_0|\leqslant t|x_1|+(1-t)|x_0|.$$

Учитывая нашу цель, рассмотрим вначале гладкие выпуклые функции.

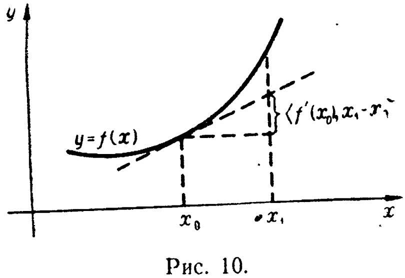


Рис. 10.

Лемма 3.1. Пусть $P\subset\mathbf{R}^N$ — выпуклое множество и f — функция, дифференцируемая на P (если множество P не является открытым, то предполагается, что f задана на некотором открытом множестве, содержащем P). Для того чтобы функция f была выпуклой на P, необходимо и достаточно, чтобы при любых x_0, x_1 из P выполнялось неравенство

$$f(x_1)-f(x_0)\geqslant \langle f'(x_0),\ x_1-x_0\rangle \tag{3.3}$$

(рис. 10).

Доказательство. Необходимость. В случае $x_1=x_0$ утверждение тривиально, поэтому считаем, что $x_1\neq x_0$. При $t\in(0,\ 1)$ неравенство (3.2) можно переписать в виде

$$f(x_1)-f(x_0)\geqslant [f(x_0+t(x_1-x_0))-f(x_0)]/t.$$

На основании (2.1) получаем

$$f(x_1)-f(x_0)\geqslant \langle f'(x_0),\ x_1-x_0\rangle+o(\|t(x_1-x_0)\|)/t.$$

Остается в последнем неравенстве перейти к пределу при $t\to+0$.

Достаточность. Зафиксируем x_0, x_1 из P, $t\in[0,\ 1]$ и положим $x(t)=tx_1+(1-t)x_0$. Поскольку P — выпуклое множество, то $x(t)\in P$. Согласно (3.3)

$$f(x_1)-f(x(t))\geqslant\langle f'(x(t)),\ x_1-x(t)\rangle,$$
$$f(x_0)-f(x(t))\geqslant\langle f'(x(t)),\ x_0-x(t)\rangle.$$

Умножая первое неравенство на t, второе — на $1-t$ и складывая их, получаем $tf(x_1)+(1-t)f(x_0)-f(x(t))\geqslant 0$. Но это равносильно (3.1). Лемма доказана.

Обозначим Ω множество планов экстремальной задачи

$$\begin{gathered}f(x)\to\min,\\ A[M_1,\ N]\times x[N]\geqslant b[M_1],\\ A[M_2,\ N]\times x[N]=b[M_2],\\ x[N_1]\geqslant 0[N_1]\end{gathered}\tag{3.4}$$

и допустим, что целевая функция f является выпуклой и дифференцируемой на Ω.

Теорема 3.1. Для того чтобы план x_* задачи (3.4) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $u_*=u_*[M]$ со свойствами (2.3).

Необходимость уже доказана (см. теорему 2.1). Проверим достаточность. Возьмем произвольный план x задачи (3.4). На основании (3.3) и (2.3) получаем

$$f(x)-f(x_*)\geqslant\langle f'(x_*),\ x-x_*\rangle=\langle f'(x_*),\ x\rangle-\langle b,\ u_*\rangle\geqslant$$
$$\geqslant\langle u_*A,\ x\rangle-\langle u_*,\ b\rangle=\langle u_*,\ Ax-b\rangle\geqslant 0.$$

Значит, $f(x)\geqslant f(x_*)$, что и требовалось доказать.

Аналогично устанавливается справедливость двух следующих теорем.

Теорема 3.2. Для того чтобы план x_* задачи (3.4) при $M_1=\varnothing$, $N_1=\varnothing$, $M_2=M$ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы градиент $f'(x_*)$ допускал представление $f'(x_*)=u_*A$.

Теорема 3.3. Для того чтобы план x_* задачи (3.4) при $N_1=\varnothing$ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $u_*=u_*[M]$ со свойствами

$$f'(x_*)=u_*A,$$
$$(b[i]-A[i,N]\times x_*[N])\times u_*[i]=0 \quad \forall i\in M_1,$$
$$u_*[M_1]\geqslant \mathbf{0}[M_1].$$

Необходимость условий этих теорем уже известна (см. теоремы 2.2 и 2.3). Для доказательства достаточности возьмем произвольный план x и заметим, что в условиях теоремы 3.2

$$f(x)-f(x_*)\geqslant \langle f'(x_*),\ x-x_*\rangle=\langle u_*A,\ x-x_*\rangle=$$
$$=\langle u_*,\ Ax-Ax_*\rangle=0,$$

а в условиях теоремы 3.3

$$f(x)-f(x_*)\geqslant \langle u_*A,\ x-x_*\rangle=\langle u_*,\ Ax-b+(b-Ax_*)\rangle=$$
$$=\langle u_*,\ Ax-b\rangle\geqslant 0.$$

Таким образом, $f(x)\geqslant f(x_*)$, что и доказывает оптимальность x_*.

В заключение этого параграфа получим практически важный критерий выпуклости для дважды непрерывно дифференцируемых функций. Пусть $Q\subset\mathbf{R}^N$ — открытое выпуклое множество. Функция f, дифференцируемая на Q, называется дважды дифференцируемой в точке $x\in Q$, если существует матрица $D=D[N,N]$, такая, что

$$f'(x+h)=f'(x)+Dh+o(\|h\|),$$

где $\|o(\|h\|)\|/\|h\|\to 0$ при $h\to\mathbf{0}$. Матрица D единственна — ее элементы $D[i,j]$ равны частным производным второго порядка $\partial^2 f(x)/(\partial x[i]\partial x[j])$, $i,j\in N$. Эта единственная матрица называется матрицей вторых производных или матрицей Гессе функции f в точке x и обозначается $f''(x)$.

Если функция дважды дифференцируема в каждой точке $x\in Q$ и все элементы ее матрицы Гессе непрерывны на Q, то функция называется дважды непрерывно дифференцируемой на Q. Пространство таких функций обозначается $C^2(Q)$.

Справедливы следующие утверждения.

1. Для того чтобы функция f принадлежала $C^2(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы у нее существовали и были непрерывными на Q все частные производные первого и второго порядков. Собственно, содержательной здесь является только достаточность.

2. У функции f из $C^2(Q)$ матрица Гессе $f''(x)$ при всех $x\in Q$ симметрична, т. е. $[f''(x)]^T=f''(x)$.

3. Пусть $f \in C^2(Q)$. Если x и $x+h$, $h \neq \mathbf{0}$, принадлежат Q, то

$$f(x+h) = f(x) + \langle f'(x), h \rangle + {}^1/_2 \langle f''(v)h, h \rangle, \tag{3.5}$$

где v — некоторая точка из интервала $(x, x+h)$.

Теорема 3.4. Для того чтобы функция f, дважды непрерывно дифференцируемая на открытом выпуклом множестве Q, была выпуклой на Q, необходимо и достаточно, чтобы при всех $x \in Q$ и $h \in \mathbf{R}^N$ выполнялось неравенство

$$\langle f''(x)h, h \rangle \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Доказательство. Необходимость. Зафиксируем $x \in Q$ и $h \in \mathbf{R}^N$, $h \neq \mathbf{0}$. При малых $t > 0$ точка $x(t) = x + th$ принадлежит Q, поэтому согласно (3.5)

$$f(x+th) - f(x) - \langle f'(x), th \rangle = \frac{t^2}{2} \langle f''(v(t))h, h \rangle.$$

Здесь $v(t) \in (x, x+th)$. На основании леммы 3.1 получаем

$$\langle f''(v(t))h, h \rangle \geqslant 0.$$

Остается в последнем неравенстве перейти к пределу при $t \to +0$.

Достаточность. Возьмем точки x_0, x_1 из Q, $x_0 \neq x_1$, и положим $h = x_1 - x_0$. В силу (3.5)

$$f(x_1) - f(x_0) - \langle f'(x_0), x_1 - x_0 \rangle = {}^1/_2 \langle f''(v)h, h \rangle,$$

где $v \in (x_0, x_1)$. В частности, $v \in Q$. Учитывая (3.6), получаем

$$f(x_1) - f(x_0) \geqslant \langle f'(x_0), x_1 - x_0 \rangle.$$

Выпуклость функции f на Q следует теперь из леммы 3.1. Теорема доказана.

Полезно иметь в виду, что функция, выпуклая на Q, является выпуклой и на любом выпуклом подмножестве этого множества.

Упражнения

3.1. Функция f, заданная на выпуклом множестве P, называется строго выпуклой, если при любых x_0, x_1 из P, $x_0 \neq x_1$, и всех $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) < tf(x_1) + (1-t)f(x_0).$$

Показать, что у строго выпуклой функции не может быть двух различных точек минимума на P.

3.2. Доказать следующее утверждение: для того чтобы функция f, дифференцируемая на выпуклом множестве $P \subset \mathbf{R}^N$, была там строго выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы при любых x_0, x_1 из P, $x_0 \neq x_1$, выполнялось неравенство

$$f(x_1) - f(x_0) > \langle f'(x_0), x_1 - x_0 \rangle.$$

3.3. Пусть $Q \subset \mathbf{R}^N$ — открытое выпуклое множество и $f \in C^2(Q)$.

Проверить, что функция f строго выпукла на Q, если $\langle f''(x)h, h\rangle > 0$ при всех $x \in Q$ и $h \in \mathbf{R}^N$, $h \neq \mathbf{0}$. Привести пример, показывающий, что это условие, вообще говоря, не является необходимым.

3.4. Привести пример функции одной переменной, строго выпуклой и ограниченной снизу на $(-\infty, \infty)$, у которой, однако, не существует точки минимума.

3.5. Показать, что функция одной переменной

$$y = \begin{cases} x \ln x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

является строго выпуклой на $[0, \infty)$.

§ 4. ОБЩАЯ ТЕОРЕМА ОТДЕЛИМОСТИ И ВЫПУКЛЫЕ ОБОЛОЧКИ

Теперь мы хотим получить критерий оптимальности в случае минимизации на многогранном множестве произвольной выпуклой функции. Для этого понадобятся некоторые вспомогательные сведения.

Точка x_0 называется граничной точкой множества $P \subset \mathbf{R}^N$, если любая ее окрестность $U(x_0) = \{x \mid \|x - x_0\| < \delta\}$, $\delta > 0$, имеет непустое пересечение как с P, так и с $\mathbf{R}^N \setminus P$.

Лемма 4.1. Пусть $P \subset \mathbf{R}^N$ — замкнутое выпуклое множество и x_0 — его граничная точка. Тогда существует единичный вектор a_0, такой, что

$$\langle a_0, x - x_0\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in P. \tag{4.1}$$

Доказательство. Очевидно, что $x_0 \in P$. Возьмем последовательность точек $\{y_k\}$, $y_k \notin P$ при всех $k = 1, 2, \ldots$, сходящуюся к x_0. По теореме I.5.1 найдутся векторы a_k, $\|a_k\| = 1$, строго отделяющие одноточечные множества $\{y_k\}$ от P, т. е.

$$\langle a_k, y_k\rangle < \langle a_k, x\rangle \quad \forall x \in P. \tag{4.2}$$

Ограниченная последовательность $\{a_k\}$ имеет предельную точку. Пусть $a_{k_s} \to a_0$. По непрерывности нормы $\|a_0\| = 1$. Переходя в (4.2) к пределу по подпоследовательности индексов $\{k_s\}$, получаем

$$\langle a_0, x_0\rangle \leqslant \langle a_0, x\rangle \quad \forall x \in P,$$

что равносильно (4.1). Лемма доказана.

Теорема 4.1. Произвольные выпуклые множества P и Q в $\mathbf{R}^N$, не имеющие общих точек, могут быть отделены. Это значит, что найдется единичный вектор a, такой, что

$$\langle a, x\rangle \leqslant \langle a, y\rangle \quad \forall x \in P, \quad \forall y \in Q. \tag{4.3}$$

Доказательство. Обозначим $\overline{G}$ замыкание множества $G=Q-P$. Очевидно, что $\overline{G}$ — замкнутое выпуклое множество. Возможны два случая.

I. $\mathbf{0}\notin\overline{G}$. По теореме о строгой отделимости найдется вектор a, $\|a\|=1$, со свойством $\langle a, z\rangle\geqslant 0$ при всех $z\in\overline{G}$. Тем более $\langle a, z\rangle\geqslant 0$ при всех $z\in G$. Отсюда очевидным образом следует (4.3).

II. $\mathbf{0}\in\overline{G}$. Прежде всего покажем, что нуль является граничной точкой множества $\overline{G}$. В противном случае найдется замкнутый шар $B_\delta=\{x\mid\|x\|\leqslant\delta\}$, $\delta>0$, целиком содержащийся в $\overline{G}$. Образуем покрытие множества B_δ открытыми шарами. Для этого рассмотрим произвольную точку $z\in B_\delta\subset\overline{G}$ и найдем точку $z^*\in G$, такую, что $\|z-z^*\|<\delta/2$. Тогда открытый шар $U_{\delta/2}(z^*)$ с радиусом $\delta/2$ и центром в z^* содержит z. Совокупность всех таких шаров, соответствующих различным $z\in B_\delta$, образует покрытие B_δ. По лемме Бореля существует конечное покрытие σ. Обозначим $z_1, \ldots, z_s$ центры шаров, входящих в σ. По построению $z_i\in G$ при всех $i\in 1:s$. Натянем на $z_1, \ldots, z_s$ выпуклую оболочку

$$L=\left\{z=\sum\nolimits_{i=1}^{s}\alpha[i]\,z_i \mid \alpha[i]\geqslant 0,\ \sum\nolimits_{i=1}^{s}\alpha[i]=1\right\}.$$

Множество L является ограниченным замкнутым и выпуклым. Кроме того, в силу выпуклости G имеем $L\subset G$. По условию теоремы $\mathbf{0}\notin G$. Значит, $\mathbf{0}\notin L$. На основании теоремы о строгой отделимости существует вектор c, $\|c\|=1$, такой, что $\langle c, z\rangle\geqslant 0$ при всех $z\in L$. В частности,

$$\langle c, z_i\rangle\geqslant 0,\quad i\in 1:s. \tag{4.4}$$

Но тогда σ не может быть покрытием B_δ. Действительно, рассмотрим точку $w=-\delta c\in B_\delta$. Согласно (4.4) при всех $i\in 1:s$ получим

$$\|w-z_i\|^2=\|w\|^2-2\langle w, z_i\rangle+\|z_i\|^2=$$
$$=\delta^2+2\delta\langle c, z_i\rangle+\|z_i\|^2\geqslant\delta^2,$$

так что w не принадлежит ни одному шару $U_{\delta/2}(z_i)$. Тем самым показано, что $\mathbf{0}$ является граничной точкой множества $\overline{G}$.

По лемме 4.1 найдется вектор a, $\|a\|=1$, со свойством $\langle a, z\rangle\geqslant 0$ при всех $z\in\overline{G}$. Отсюда, как и в случае I, следует (4.3). Теорема доказана.

Замечание. Выполнение условий $\mathbf{0}\notin G$, $\mathbf{0}\in\overline{G}$ еще не гарантирует, что $\mathbf{0}$ будет граничной точкой множества $\overline{G}$ при любом $G\subset\mathbf{R}^N$. Чтобы понять это, достаточно в качестве G рассмотреть все пространство $\mathbf{R}^N$, проколотое в нуле. При доказательстве теоремы существенно использовалась выпуклость G.

До сих пор нам встречались выпуклые оболочки, натянутые на конечное множество точек. Определим выпуклую оболочку произвольного множества $P \subset \mathbf{R}^N$. Она состоит из точек вида

$$x = \sum_{i=0}^{p} \alpha[i] x_i, \quad \alpha[i] \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{p} \alpha[i] = 1, \tag{4.5}$$

где $x_i \in P$ и p — произвольное целое неотрицательное число. Выпуклая оболочка множества P обозначается $\operatorname{conv} P$.

Лемма 4.2. Любая точка $x \in \operatorname{conv} P$ допускает представление вида (4.5) с $p = |N|$.

Доказательство. Положим $n = |N|$. Если в (4.5) $p < n$, то к сумме $\sum_{i=0}^{p} \alpha[i] x_i$ можно добавить с нулевыми коэффициентами произвольные точки $x_{p+1}, \ldots, x_n$ из P (например, $x_{p+1} = \ldots = x_n = x_p$). Допустим, что $p > n$. Тогда однородная система

$$\sum_{i=0}^{p} u[i] x_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{p} u[i] = 0 \tag{4.6}$$

имеет ненулевое решение $u_0 = u_0[0:p]$, поскольку в (4.6) число уравнений меньше числа неизвестных. Условие $\sum_{i=0}^{p} u_0[i] = 0$ гарантирует, что у вектора u_0 хотя бы одна компонента положительна. На основании (4.5), (4.6) при всех $t \geqslant 0$

$$x = \sum_{i=0}^{p} (\alpha[i] - t u_0[i]) x_i,$$

$$\sum_{i=0}^{p} (\alpha[i] - t u_0[i]) = 1.$$

Положим $\alpha_1 = \alpha - t_0 u_0$, где

$$t_0 = \min\{\alpha[i]/u_0[i] \mid i \in 0:p, \; u_0[i] > 0\}.$$

Тогда

$$x = \sum_{i=0}^{p} \alpha_1[i] x_i, \quad \alpha_1[i] \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{p} \alpha_1[i] = 1, \tag{4.7}$$

и хотя бы одна компонента вектора α_1 обращается в нуль. Выбрасывая из (4.7) слагаемое с нулевым коэффициентом, приходим к представлению вида (4.5), в котором количество слагаемых на единицу меньше. После конечного числа таких преобразований получим представление вида (4.5) с $p = n$. Лемма доказана.

Теорема 4.2. Если $P \subset \mathbf{R}^N$ — ограниченное замкнутое множество, то его выпуклая оболочка $\operatorname{conv} P$ ограничена, замкнута и выпукла.

Доказательство. Ограниченность множества $\operatorname{conv} P$ очевидна. Проверим его выпуклость. Пусть

$$x^{(0)} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_0[i] x_i^{(0)}, \quad \alpha_0[i] \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_0[i] = 1,$$

$$x^{(1)} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_1[i] x_i^{(1)}, \quad \alpha_1[i] \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_1[i] = 1,$$

где $n = |N|$ и все $x_i^{(0)}$, $x_i^{(1)}$ принадлежат P. Тогда

$$tx^{(1)}+(1-t)\,x^{(0)}=\sum_{i=0}^{n} t\alpha_1[i]\,x_i^{(1)}+\sum_{i=0}^{n}(1-t)\,\alpha_0[i]\,x_i^{(0)}.$$

При $t\in[0, 1]$ все коэффициенты в правой части последнего равенства неотрицательны и в сумме равны единице. Значит, $tx^{(1)}+(1-t)\,x^{(0)}\in\operatorname{conv}P$, что и доказывает выпуклость $\operatorname{conv}P$.

Проверим замкнутость выпуклой оболочки. Пусть $x^{(k)}\to x^*$, где все $x^{(k)}$ принадлежат $\operatorname{conv}P$. По лемме 4.2

$$x^{(k)}=\sum_{i=0}^{n}\alpha_k[i]\,x_i^{(k)};\quad x_i^{(k)}\in P,\ \alpha_k[i]\geqslant 0,\quad \sum_{i=0}^{n}\alpha_k[i]=1.$$

Поскольку все последовательности $\{x_i^{(k)}\}$, $i\in 0:n$, точек из P ограничены и все числовые последовательности $\{\alpha_k[i]\}$, $i\in 0:n$, также ограничены, то найдется подпоследовательность индексов $\{k_s\}$, такая, что

$$x_i^{(k_s)}\to x_i^*,\ \alpha_{k_s}[i]\to\alpha_*[i],\quad i\in 0:n.$$

В силу замкнутости множества P имеем $x_i^*\in P$, $i\in 0:n$. В пределе получаем

$$x^*=\sum_{i=0}^{n}\alpha_*[i]\,x_i^*;\ x_i^*\in P,\ \alpha_*[i]\geqslant 0,\ \sum_{i=0}^{n}\alpha_*[i]=1.$$

Это означает, что $x^*\in\operatorname{conv}P$. Теорема доказана.

Упражнения

4.1. Пусть $K\subset\mathbf{R}^N$ — замкнутый выпуклый конус и x_0 — его граничная точка. Доказать, что существует ненулевой вектор $u_0\in K^+$, ортогональный x_0.

4.2. Привести пример замкнутого множества на плоскости, выпуклая оболочка которого не является замкнутой.

§ 5. КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть f — функция, выпуклая на открытом выпуклом множестве $Q\subset\mathbf{R}^N$, и P — произвольное выпуклое подмножество Q. Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x)\to\min_{x\in P}.\tag{5.1}$$

Теорема 5.1. Для того чтобы минимум функции f на P достигался в точке x_*, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $c\in\mathbf{R}^N$, такой, что

$$f(x)-f(x_*)\geqslant\langle c,\ x-x_*\rangle\quad\forall x\in Q,\tag{5.2}$$

$$\langle c,\ x-x_*\rangle\geqslant 0\quad\forall x\in P.\tag{5.3}$$

Доказательство. Необходимость. Положим $y_* = f(x_*)$ и введем два множества (рис. 11)

$$V_1 = \{z = \{x, y_*\} \mid x \in P\},$$
$$V_2 = \{z = \{x, y\} \mid x \in Q,\ y > f(x)\}.$$

Нетрудно проверить, что V_1, V_2 — выпуклые множества и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Действительно, выпуклость V_1 следует из выпуклости P. Пусть $z_0 = \{x_0, y_0\}$ и $z_1 = \{x_1, y_1\}$ принадлежат V_2. Тогда в силу выпуклости функции f при $t \in [0, 1]$ имеем

$$ty_1 + (1-t)y_0 > tf(x_1) + (1-t)f(x_0) \geqslant f(tx_1 + (1-t)x_0).$$

Значит, точка $z(t) = tz_1 + (1-t)z_0$ принадлежит V_2, что доказывает выпуклость V_2. Если допустить, что точка $z = \{x, y_*\}$, $x \in P$, из V_1 принадлежит V_2, то получим $y_* > f(x)$. Это противоречит оптимальности x_*. Таким образом, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

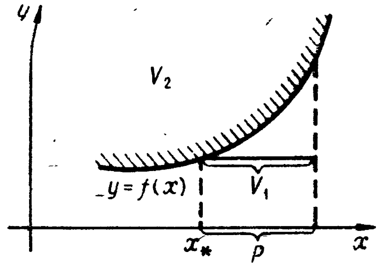


Рис. 11.

По теореме 4.1 найдется ненулевой вектор $a = \{u, \gamma\}$ со свойством

$$\langle u, x_2 - x_1 \rangle + \gamma(y - y_*) \geqslant 0$$

при всех $x_1 \in P$, $x_2 \in Q$ и $y > f(x_2)$. Отсюда при $x_2 = x$, $x_1 = x_*$ следует неравенство

$$\langle u, x - x_* \rangle + \gamma(y - y_*) \geqslant 0 \quad \forall x \in Q, \qquad (5.4)$$

где $y > f(x)$, а при $x_2 = x_*$, $x_1 = x$

$$-\langle u, x - x_* \rangle + \gamma(y - y_*) \geqslant 0 \quad \forall x \in P, \qquad (5.5$$

где $y > f(x_*)$. Подставив в (5.4) $x = x_*$, получим $\gamma \geqslant 0$. Но γ не может равняться нулю, ибо в противном случае согласно (5.4) и вектор u окажется нулевым, что противоречит условию $a \neq \mathbf{0}$. Итак, $\gamma > 0$.

Покажем, что вектор $c = -u/\gamma$ требуемый. Для этого перепишем неравенства (5.4), (5.5) в виде

$$y - y_* \geqslant \langle c, x - x_* \rangle \quad \forall x \in Q, \qquad (5.6)$$
$$\langle c, x - x_* \rangle + y - y_* \geqslant 0 \quad \forall x \in P. \qquad (5.7)$$

Переходя к пределу в (5.6) при $y \to f(x) + 0$ и в (5.7) при $y \to f(x_*) + 0$, получаем (5.2), (5.3).

Достаточность очевидна. Теорема доказана.

Пусть $x_0 \in Q$. Совокупность векторов c, для которых

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle c, x - x_0 \rangle \quad \forall x \in Q,$$

называется субдифференциалом выпуклой функции f в точке x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$. Элементы субдифференциала называются субградиентами. Используя понятие субдифференциала, теорему 5.1 можно переформулировать так: для того чтобы минимум функции f на P достигался в точке x_*, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $c \in \partial f(x_*)$ со свойством (5.3).

Как обычно, обозначим Ω множество планов экстремальной задачи

$$
\begin{gathered}
f(x) \to \min, \\
A[M_1, N] \times x[N] \geqslant b[M_1], \\
A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2], \\
x[N_1] \geqslant 0[N_1]
\end{gathered}
\tag{5.8}
$$

и предположим, что целевая функция f является выпуклой на некотором открытом выпуклом множестве Q, содержащем Ω.

Теорема 5.2. Для того чтобы план x_* задачи (5.8) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашлись векторы $c \in \partial f(x_*)$ и $u_* = u_*[M]$, такие, что

$$
\begin{gathered}
\langle b, u_* \rangle = \langle c, x_* \rangle, \\
u_*[M] \times A[M, N_1] \leqslant c[N_1], \\
u_*[M] \times A]M, N_2] = c[N_2], \\
u_*[M_1] \geqslant 0[M_1].
\end{gathered}
$$

Доказательство. Необходимость. По теореме 5.1 найдется субградиент c функции f в точке x_* со свойством $\langle c, x \rangle \geqslant \langle c, x_* \rangle$ при всех $x \in \Omega$. Таким образом, x_* будет оптимальным планом задачи линейного программирования

$$
\langle c, x \rangle \to \min_{x \in \Omega}. \tag{5.9}
$$

Существование требуемого u_* следует теперь из теоремы I.7.1.

Достаточность. По теореме I.7.1 вектор x_* будет оптимальным планом задачи (5.9). Остается воспользоваться теоремой 5.1. Теорема доказана.

В случае, когда целевая функция f является выпуклой на всем пространстве $\mathbf{R}^N$ (при $Q = \mathbf{R}^N$), критерию оптимальности, установленному в теореме 5.2, можно придать другую форму. Для этого введем функцию Лагранжа

$$
\mathcal{L}(x, u) = f(x) + \langle u, b - Ax \rangle.
$$

Будем рассматривать ее на прямом произведении конусов

$$
\begin{gathered}
K = \{x = x[N] \mid x[N_1] \geqslant 0[N_1]\}, \\
\Gamma = \{u = u[M] \mid u[M_1] \geqslant 0[M_1]\}.
\end{gathered}
$$

Теорема 5.3. Для того чтобы вектор x_* был оптимальным планом задачи (5.8) при $Q = \mathbf{R}^N$, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор u_*, такой, что пара $\{x_*, u_*\}$ является седловой точкой функции Лагранжа, т. е. $x_* \in K$, $u_* \in \Gamma$ и

$$\mathcal{L}(x_*, u) \leqslant \mathcal{L}(x_*, u_*) \leqslant \mathcal{L}(x, u_*) \quad \forall x \in K, \quad \forall u \in \Gamma. \tag{5.10}$$

Доказательство. То что наличие седловой точки у функции Лагранжа гарантирует оптимальность x_*, отмечалось в конце § I.8. Проверим необходимость этого условия.

По теореме 5.2 x_* — оптимальный план задачи линейного программирования (5.9), в которой $c \in \partial f(x_*)$. Согласно теореме I. 8.1 функция $L(x, u) = \langle c, x\rangle + \langle u, b - Ax\rangle$ имеет седловую точку $\{x_*, u_*\}$ на прямом произведении конусов K и Γ. Таким образом, $u_* \in \Gamma$ и

$$\langle c, x_*\rangle + \langle u, b - Ax_*\rangle \leqslant \langle c, x_*\rangle + \langle u_*, b - Ax_*\rangle \quad \forall u \in \Gamma, \tag{5.11}$$

$$\langle c, x_*\rangle + \langle u_*, b - Ax_*\rangle \leqslant \langle c, x\rangle + \langle u_*, b - Ax\rangle \quad \forall x \in K. \tag{5.12}$$

Заменив в обеих частях неравенства (5.11) (c, x_*) на $f(x_*)$, получим

$$f(x_*) + \langle u, b - Ax_*\rangle \leqslant f(x_*) + \langle u_*, b - Ax_*\rangle \quad \forall u \in \Gamma. \tag{5.13}$$

Далее, из условия $c \in \partial f(x_*)$ и (5.12) следует, что при всех $x \in K$

$$f(x) - f(x_*) \geqslant \langle c, x\rangle - \langle c, x_*\rangle \geqslant \langle u_*, b - Ax_*\rangle - \langle u_*, b - Ax\rangle.$$

Значит,

$$f(x_*) + \langle u_*, b - Ax_*\rangle \leqslant f(x) + \langle u_*, b - Ax\rangle \quad \forall x \in K. \tag{5.14}$$

Объединяя (5.13) и (5.14), приходим к (5.10). Теорема доказана.

Укажем одно применение теоремы 5.3. Для этого рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ A[M, N] \times x[N] \geqslant b[M], \end{gathered} \tag{5.15}$$

где f — выпуклая на $\mathbf{R}^N$ функция. Положим

$$F(x) = \max\{0;\ b[i] - A[i, N] \times x[N],\ i \in M\}.$$

Очевидно, что $F(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbf{R}^N$ и $F(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x является планом задачи (5.15). Введем еще одну экстремальную задачу

$$f(x) + CF(x) \to \min_{x \in \mathbf{R}^N}. \tag{5.16}$$

Теорема 5.4. Если задача (5.15) разрешима, то существует постоянная $C > 0$, при которой задача (5.16) также разрешима. Более того, множества оптимальных планов этих задач будут совпадать.

Доказательство. По теореме 5.3 функция Лагранжа

$\mathscr{L}(x, u)=f(x)+\langle u, b-Ax\rangle$ имеет седловую точку $\{x_*, u_*\}$ на прямом произведении конусов $K=\mathbf{R}^N$ и $\Gamma=\mathbf{R}_+^M$. В качестве C можно взять любую константу, удовлетворяющую неравенству

$$C>\sum_{i\in M} u_*[i]. \qquad (5.17)$$

Учитывая определение седловой точки и равенство $\langle u_*, b-Ax_*\rangle=0$, при любом $x\in\mathbf{R}^N$ получаем

$$f(x_*)+CF(x_*)=f(x_*)\leqslant f(x)+\langle u_*, b-Ax\rangle\leqslant f(x)+CF(x).$$

Таким образом, x_* является решением задачи (5.16).

Обозначим Ω_* и $X_*(C)$ множества оптимальных планов рассматриваемых задач. По существу доказано, что $\Omega_*\subset X_*(C)$, ибо $f(x_0)=f(x_*)$, $F(x_0)=0$ для любого $x_0\in\Omega_*$. Проверим обратное включение. Пусть $x_0\in X_*(C)$. Тогда

$$f(x_0)+CF(x_0)\leqslant f(x_*)\leqslant f(x_0)+\langle u_*, b-Ax_0\rangle\leqslant$$

$$\leqslant f(x_0)+F(x_0)\sum_{i\in M} u_*[i].$$

Отсюда в силу (5.17) следует, что $F(x_0)=0$, т. е. x_0 — план задачи (5.15). Так как $f(x_0)=f(x_*)$, то $x_0\in\Omega_*$. Теорема доказана.

Смысл этой теоремы заключается в том, что она сводит задачу (5.15) к минимизации выпуклой функции на всем пространстве $\mathbf{R}^N$.

Замечание. Включение $\Omega_*\subset X_*(C)$ имеет место при $C\geqslant\sum_{i\in M} u_*[i]$. Для справедливости же обратного включения существенно выполнение строгого неравенства (5.17).

Пример. Рассмотрим одномерную задачу $x\to\min$, $x\geqslant 0$, с единственным решением $x_*=0$. Единственной седловой точкой функции Лагранжа $\mathscr{L}(x, u)=x(1-u)$ на $(-\infty, \infty)\times[0, \infty)$ является пара $\{x_*, u_*\}=\{0, 1\}$, для которой $\mathscr{L}(x_*, u)=0$ при всех $u\geqslant 0$ и $\mathscr{L}(x, u_*)=0$ при всех вещественных x. Возьмем $C=u_*=1$. В этом случае

$$f(x)+CF(x)=x+\max\{0, -x\}=\max\{0, x\},$$

так что $X_*(C)=(-\infty, 0]\neq\{0\}=\Omega_*$. При $C>1$ справедливо равенство $X_*(C)=\Omega_*$.

Упражнения

5.1. Показать, что функция, выпуклая на открытом выпуклом множестве $Q\subset\mathbf{R}^N$, является непрерывной на Q.

5.2. Пусть f — функция, выпуклая на открытом выпуклом множестве $Q\subset\mathbf{R}^N$. Проверить, что субдифференциал $\partial f(x_0)$ при любом $x_0 \in Q$ есть непустое ограниченное замкнутое выпуклое множество.

5.3. Показать, что в условиях предыдущего упражнения выполнение неравенства

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle c, x - x_0 \rangle \quad \forall x \in U(x_0),$$

где $U(x_0) = \{x \mid \|x - x_0\| < \delta\} \subset Q$, гарантирует включение $c \in \partial f(x_0)$.

5.4. Привести пример выпуклой на отрезке $[0, 1]$ функции, у которой нет точки минимума.

5.5. При $Q = \mathbf{R}^N$ наряду с (5.8) рассматривают двойственную задачу

$$\inf_{x \in K} \mathscr{L}(x, u) \to \max_{u \in \Gamma}.$$

Доказать следующее утверждение: если разрешима прямая задача, то разрешима и двойственная; при этом

$$\min_{x \in Q} f(x) = \max_{u \in \Gamma} \inf_{x \in K} \mathscr{L}(x, u).$$

§ 6. КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Напомним (см. § I.11), что целевая функция линейной задачи чебышевского приближения имеет вид

$$\Phi(x) = \max_{t \in Q} \left| \sum_{j=1}^{p-1} x[j]\, u_j(t) - f(t) \right|,$$

где $Q \subset \mathbf{R}^s$ — компактное множество и $u_1, \ldots, u_{p-1}, f$ — непрерывные на Q функции. Функция Φ является выпуклой на $\mathbf{R}^N$. Действительно, при $\alpha \in [0, 1]$

$$\Phi(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_0) = \max_{t \in Q} \left| \alpha \left(\sum_{j=1}^{p-1} x_1[j]\, u_j(t) - f(t) \right) + \right.$$
$$\left. + (1-\alpha) \left(\sum_{j=1}^{p-1} x_0[j]\, u_j(t) - f(t) \right) \right| \leqslant \alpha \Phi(x_1) + (1-\alpha) \Phi(x_0).$$

Введем обозначения

$$P(x, t) = \sum_{j=1}^{p-1} x[j]\, u_j(t), \qquad F(x, t) = P(x, t) - f(t).$$

Тогда $\Phi(x) = \max\limits_{t \in Q} |F(x, t)|$. Зафиксируем x и обозначим $Q(x)$ множество точек $t \in Q$, в которых $F(x, t)$ достигает максимального по модулю значения, т. е.

$$Q(x) = \{t \in Q \mid |F(x, t)| = \Phi(x)\}.$$

Положим, наконец, $\xi(x, t) = \operatorname{sign} F(x, t)$, $U = (u_1, \ldots, u_{p-1})$. Следующая лемма — ключевая. В ней дается представление для субдифференциала функции Φ в фиксированной точке x_0.

Лемма 6.1. Если $\Phi(x_0)>0$, то

$$\partial\Phi(x_0)=\mathrm{conv}\{g=\xi(x_0,\ t)\,U(t)\mid t\in Q(x_0)\}. \qquad (6.1)$$

Доказательство. Обозначим $G(x_0)$ множество, стоящее в правой части формулы (6.1), и покажем вначале, что $G(x_0)\subset\partial\Phi(x_0)$. Возьмем вектор $g=\xi(x_0,\ t)\,U(t)$, где $t\in Q(x_0)$. Учитывая равенство $\langle U(t),\ x\rangle=P(x,\ t)$, получаем

$$\langle g,\ x-x_0\rangle=\xi(x_0,\ t)\,[P(x,\ t)-P(x_0,\ t)]=$$
$$=\xi(x_0,\ t)\,F(x,\ t)-|F(x_0,\ t)|\leqslant\Phi(x)-\Phi(x_0).$$

Значит, $g\in\partial\Phi(x_0)$. Отсюда следует, что $G(x_0)\subset\partial\Phi(x_0)$.

Обратное включение будем доказывать от противного. Допустим, что существует вектор $c\in\partial\Phi(x_0)$, не принадлежащий $G(x_0)$. Введем обозначения

$$Q_\varepsilon(x_0)=\{t\in Q\mid\Phi(x_0)-|F(x_0,\ t)|\leqslant\varepsilon\},$$
$$G_\varepsilon(x_0)=\mathrm{conv}\,\{g=\xi(x_0,\ t)\,U(t)\mid t\in Q_\varepsilon(x_0)\}$$

и покажем, что $c\notin G_\varepsilon(x_0)$ при некотором ε из интервала $(0,\ \Phi(x_0))$. Снова допустим противное и возьмем произвольную последовательность $\{\varepsilon_k\}$ чисел из $(0,\ \Phi(x_0))$, стремящуюся к нулю. Имеем $c\in G_{\varepsilon_k}(x_0)$ при всех $k=1,\ 2,\ \ldots$ По лемме 4.2

$$c=\sum\nolimits_{i=0}^{p-1}\alpha_k[i]\,\xi\left(x_0,\ t_i^{(k)}\right)U\left(t_i^{(k)}\right), \qquad (6.2)$$

где $t_i^{(k)}\in Q_{\varepsilon_k}(x_0)$, $\alpha_k[i]\geqslant0$, $\sum\nolimits_{i=0}^{p-1}\alpha_k[i]=1$. Можно считать, что $t_i^{(k)}\to t_i$, $\alpha_k[i]\to\alpha[i]$. Поскольку $\Phi(x_0)-\left|F\left(x_0,\ t_i^{(k)}\right)\right|\leqslant\varepsilon_k$, то в пределе получаем $\Phi(x_0)=|F(x_0,\ t_i)|$, так что $t_i\in Q(x_0)$. При этом $\xi\left(x_0,\ t_i^{(k)}\right)\to\xi(x_0,\ t_i)$, ибо $F(x_0,\ t_i)\neq0$. Предельный переход в (6.2) приводит к представлению

$$c=\sum\nolimits_{i=0}^{p-1}\alpha[i]\,\xi(x_0,\ t_i)\,U(t_i),$$

где $t_i\in Q(x_0)$, $\alpha[i]\geqslant0$, $\sum\nolimits_{i=0}^{p-1}\alpha[i]=1$. Значит, $c\in G(x_0)$, что противоречит выбору c. Итак, $c\notin G_\varepsilon(x_0)$ при некотором $\varepsilon\in(0,\ \Phi(x_0))$. Зафиксируем это ε.

Отметим, что функция $\xi(x_0,\ t)$ непрерывна на $Q_\varepsilon(x_0)$, так как $|F(x_0,\ t)|\geqslant\Phi(x_0)-\varepsilon>0$ при всех $t\in Q_\varepsilon(x_0)$. По теореме 4.2 множество $G_\varepsilon(x_0)$ является ограниченным, замкнутым и выпуклым как выпуклая оболочка ограниченного замкнутого множества. К тому же $c\notin G_\varepsilon(x_0)$. По теореме о строгой отделимости найдутся ненулевой вектор a и положительное число $\Delta>0$, такие, что $\langle g,\ a\rangle\leqslant\langle c,\ a\rangle-\Delta$ при всех $g\in G_\varepsilon(x_0)$. В частности,

$$\xi(x_0,\ t)\,P(a,\ t)=\langle a,\ \xi(x_0,\ t)\,U(t)\rangle\leqslant\langle c,\ a\rangle-\Delta\quad\forall t\in Q_\varepsilon(x_0). \qquad (6.3)$$

Пусть $\gamma=\max\limits_{t\in Q}|P(a,\ t)|$. Введем вектор $x_1=x_0+\beta a$, где β — положительное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\beta\gamma < \Phi(x_0) - \varepsilon, \tag{6.4}$$
$$\beta[\gamma + \Delta - \langle c, a\rangle] \leqslant \varepsilon, \tag{6.5}$$

и покажем, что

$$\Phi(x_1) \leqslant \Phi(x_0) + \langle c, x_1 - x_0\rangle - \beta\Delta. \tag{6.6}$$

Возьмем $t \in Q_\varepsilon(x_0)$. Поскольку $F(x_1, t) = F(x_0, t) + \beta P(a, t)$ и в силу (6.4) $|F(x_0, t)| > \beta|P(a, t)|$, то $\xi(x_1, t) = \xi(x_0, t)$. С учетом (6.3) получим

$$|F(x_1, t)| = F(x_1, t)\xi(x_0, t) = |F(x_0, t)| + \beta\xi(x_0, t)P(a, t) \leqslant$$
$$\leqslant \Phi(x_0) + \beta[\langle c, a\rangle - \Delta] = \Phi(x_0) + \langle c, x_1 - x_0\rangle - \beta\Delta.$$

Пусть $t \in Q \setminus Q_\varepsilon(x_0)$. Тогда согласно определению $Q_\varepsilon(x_0)$ и (6.5) имеем

$$|F(x_1, t)| \leqslant |F(x_0, t)| + \beta\gamma < \Phi(x_0) - \varepsilon + \beta\gamma \leqslant$$
$$\leqslant \Phi(x_0) + \beta[\langle c, a\rangle - \Delta] = \Phi(x_0) + \langle c, x_1 - x_0\rangle - \beta\Delta.$$

Таким образом,

$$|F(x_1, t)| \leqslant \Phi(x_0) + \langle c, x_1 - x_0\rangle - \beta\Delta \quad \forall t \in Q,$$

что равносильно (6.6). Но неравенство (6.6) противоречит условию $c \in \partial\Phi(x_0)$. Тем самым доказано включение $\partial\Phi(x_0) \subset G(x_0)$, а вместе с ним и лемма.

Обратимся к линейной задаче чебышевского приближения

$$\Phi(x) := \max_{t \in Q} \left| \sum_{j=1}^{p-1} x[j]\, u_j(t) - f(t) \right| \to \min,$$
$$\sum_{j=1}^{p-1} C[i, j] \times x[j] \geqslant d[i], \quad i \in 1 : m_1, \tag{6.7}$$
$$\sum_{j=1}^{p-1} C[i, j] \times x[j] = d[i], \quad i \in m_1 + 1 : m.$$

Будем считать, что множество ее планов Ω непусто. Согласно теореме I.11.3 задача (6.7) разрешима. Предположим, что

$$\min\{\Phi(x) \mid x \in \Omega\} > 0. \tag{6.8}$$

Введем обозначение $C_i = C[i, 1 : p-1]$, $i \in 1 : m$.

Теорема 6.1. Для того чтобы план x_* задачи (6.7) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашлись точки $t_1, \ldots, t_p$ из $Q(x_*)$ и векторы $\alpha_* = \alpha_*[1 : p]$, $\lambda_* = \lambda_*[1 : m]$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_*[i]\, \xi(x_*, t_i)\, U(t_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_*[i]\, C_i,$$
$$(d[i] - \langle C_i, x_*\rangle) \times \lambda_*[i] = 0, \quad i \in 1 : m_1,$$
$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_*[i] = 1, \tag{6.9}$$
$$\alpha_*[i] \geqslant 0, \quad i \in 1 : p; \quad \lambda_*[i] \geqslant 0, \quad i \in 1 : m_1.$$

Доказательство. Необходимость. По теореме 5.2

найдутся векторы $g \in \partial\Phi(x_*)$ и $\lambda_* = \lambda_*[1:m]$ со свойствами

$$\langle d, \lambda_* \rangle = \langle g, x_* \rangle, \quad \lambda_* C = g, \quad \lambda_*[1:m_1] \geqslant \mathbf{0}[1:m_1]. \tag{6.10}$$

Имеем $\langle d - Cx_*, \lambda_* \rangle = 0$, так что

$$(d[i] - \langle C_i, x_* \rangle) \times \lambda_*[i] = 0, \quad i \in 1:m_1.$$

Остается учесть, что в силу (6.8) $\Phi(x_*) > 0$, и воспользоваться леммами 6.1 и 4.2.

Достаточность. Согласно (6.9) существуют векторы $g \in \partial\Phi(x_*)$ и λ_*, удовлетворяющие соотношениям (6.10). Оптимальность x_* следует теперь из теоремы 5.2. Теорема доказана.

Упражнение

6.1. Указать вид субдифференциала $\partial\Phi(x_0)$ при $\Phi(x_0) = 0$.

§ 7. ОЦЕНКА РАЗМЕРНОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Будем рассматривать одномерную задачу чебышевского приближения без ограничений на коэффициенты

$$\Phi(x) := \max_{t \in Q} \left| \sum_{j \in N} x[j]\, u_j(t) - f(t) \right| \to \min_{x \in \mathbf{R}^N}, \tag{7.1}$$

где $Q \subset (-\infty, \infty)$ — компактное множество, содержащее не менее $|N|+1$ точек, и f, u_j — непрерывные на Q функции. Задача (7.1) разрешима. Считаем, что $\min\{\Phi(x) \mid x \in \mathbf{R}^N\} > 0$. В дальнейшем используются обозначения $P(x, t)$, $F(x, t)$, $Q(x)$, $\xi(x, t)$, $U(t)$ — их смысл такой же, как в предыдущем параграфе. Дополнительно полагаем $n = |N|$.

Теорема 7.1. Для того чтобы вектор $x_* \in \mathbf{R}^N$ был решением задачи (7.1), необходимо и достаточно, чтобы нашлись точки $t_0, t_1, \ldots, t_n$ из $Q(x_*)$ и неотрицательные числа $\alpha_*[i]$, $i \in 0:n$, в сумме равные единице, такие, что

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_*[i]\, \xi(x_*, t_i)\, U(t_i) = 0. \tag{7.2}$$

Доказательство. Необходимость. По теореме 5.1 найдется субградиент c функции Φ в точке x_*, удовлетворяющий условию $\langle c, x - x_* \rangle \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbf{R}^N$. Подставив в последнее неравенство $x = x_* - c$, получим $c = \mathbf{0}$. Значит, $\mathbf{0} \in \partial\Phi(x_*)$. Формула (7.2) следует теперь из лемм 6.1 и 4.2.

Достаточность. По условию $\mathbf{0} \in \partial\Phi(x_*)$. Это означает, что $\Phi(x) - \Phi(x_*) \geqslant 0$ или $\Phi(x) \geqslant \Phi(x_*)$ при всех $x \in \mathbf{R}^N$. Теорема доказана.

Обозначим $X_*(f)$ множество решений задачи (7.1). Нетрудно проверить, что $X_*(f)$ — замкнутое выпуклое множество в $\mathbf{R}^N$. Замкнутость следует из непрерывности функции Φ на $\mathbf{R}^N$, а выпуклость — из того, что для выпуклой функции Φ любое множество вида $\{x \in \mathbf{R}^N \mid \Phi(x) \leqslant \mu\}$ выпукло.

Напомним, что размерностью выпуклого множества $X_*(f)$ называется максимальное число линейно независимых векторов вида $z = x_1 - x_2$, где x_1, x_2 принадлежат $X_*(f)$. Она обозначается $\dim X_*(f)$. Наша цель — оценить сверху размерность $X_*(f)$. Для этого понадобится понятие чебышевского ранга системы функций.

Чебышевским рангом системы непрерывных на Q функций u_j, $j \in N$, называется максимальное целое число r, такое, что для любых попарно различных точек $t_1, \ldots, t_r$ из Q векторы $U(t_1), \ldots, U(t_r)$ линейно независимы.

Очевидно, что $0 \leqslant r \leqslant |N|$. При этом $r = 0$ тогда и только тогда, когда существует точка $t_0 \in Q$, в которой все функции u_j, $j \in N$, обращаются в нуль. Если $r = |N|$, то система функций $\{u_j\}$ называется чебышевской на Q.

Следующая теорема принадлежит Г. Ш. Рубинштейну.

Теорема 7.2. Справедливо неравенство

$$\dim X_*(f) \leqslant |N| - r. \tag{7.3}$$

Более того, существует непрерывная на Q функция f_*, для которой $\dim X_*(f_*) = |N| - r$.

Доказательство. Возьмем какое-нибудь решение x_* задачи (7.1) и соответствующее ему представление нуля (7.2). Преобразуем (7.2) к виду

$$\sum_{i=I} \alpha[i] \xi_i U(t_i) = 0, \tag{7.4}$$

где $\xi_i = \xi(x_*, t_i)$, $\alpha[i] > 0$, $\sum_{i \in I} \alpha[i] = 1$ и точки $t_i \in Q(x_*)$ попарно различны. По определению чебышевского ранга $|I| \geqslant r + 1$.

Если x — любой вектор из $X_*(f)$, то

$$\xi_i F(x, t_i) \leqslant \xi_i F(x_*, t_i), \quad i \in I.$$

Отсюда следует, что $\xi_i [P(x, t_i) - P(x_*, t_i)] \leqslant 0$, или

$$\xi_i \langle U(t_i), x - x_* \rangle \leqslant 0, \quad i \in I.$$

Умножим равенство (7.4) скалярно на $x - x_*$. Получим

$$\sum_{i \in I} \alpha[i] \xi_i \langle U(t_i), x - x_* \rangle = 0.$$

Сравнивая два последних соотношения и учитывая положительность всех $\alpha[i]$, приходим к выводу, что $\xi_i \langle U(t_i), x - x_* \rangle = 0$ при $i \in I$. Значит, для всех $x \in X_*(f)$

$$P(x, t_i) = P(x_*, t_i), \quad i \in I.$$

Теперь нетрудно понять, что векторы вида $z = x_1 - x_2$, где x_1, x_2 принадлежат $X_*(f)$, удовлетворяют системе линейных однородных уравнений

$$<U(t_i), z> = 0, \ i \in I, \tag{7.5}$$

поэтому размерность $X_*(f)$ не превосходит числа линейно независимых решений этой системы. Поскольку количество неизвестных в (7.5) равно $|N|$, а ранг матрицы не менее r, то $\dim X_*(f) \leqslant |N| - r$. Проверим точность этой оценки.

По определению чебышевского ранга существуют точки $t_0 < t_1 < \ldots < t_r$ в Q, такие, что векторы $U(t_0)$, $U(t_1)$, ..., $U(t_r)$ линейно зависимы:

$$\sum_{i=0}^{r} \beta[i] \, U(t_i) = 0. \tag{7.6}$$

Здесь не все $\beta[i]$ равны нулю. Так как любые r векторов из системы $\{U(t_i)\}$, $i \in 0:r$, линейно независимы, то все $\beta[i]$ отличны от нуля. Положим $\xi_i = \operatorname{sign} \beta[i]$, $\alpha[i] = |\beta[i]| / \sum_{i=0}^{r} |\beta[i]|$ и перепишем (7.6) в виде

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha[i] \, \xi_i U(t_i) = 0. \tag{7.7}$$

Построим непрерывную на Q функцию f_*, для которой $\dim X_*(f_*) = |N| - r$. Прежде всего заметим, что система $<U(t_i), z> = 0$, $i \in 0:r$, имеет $k = |N| - r$ линейно независимых решений. Обозначим их $x_1, \ldots, x_k$. Введем функцию

$$\sigma(t) = \begin{cases} \xi_0, & -\infty < t < t_0; \\ \xi_{i-1} + (\xi_i - \xi_{i-1})(t - t_{i-1})/(t_i - t_{i-1}), & \\ \qquad t_{i-1} \leqslant t < t_i, \ i \in 1:r; & \\ \xi_r, & t_r \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

Положим, наконец,

$$f_*(t) = -\sigma(t) \left[\gamma - \sum_{j=1}^{k} |P(x_j, t)|\right],$$

где $\gamma > \max_{t \in Q} \sum_{j=1}^{k} |P(x_j, t)|$. Для любого $a = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j$ при $|\varepsilon_j| \leqslant 1$ имеем

$$P(a, t_i) - f_*(t_i) = \xi_i \gamma, \ i \in 0:r;$$

$$|P(a, t) - f_*(t)| \leqslant |P(a, t)| + |f_*(t)| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |P(x_j, t)| + \\ + \left[\gamma - \sum_{j=1}^{k} |P(x_j, t)|\right] = \gamma, \quad t \in Q.$$

Отсюда следует, что функция $F_*(a, t) = P(a, t) - f_*(t)$ в точках t_i достигает максимального по модулю значения на Q, $\xi_i = \operatorname{sign} F_*(a, t_i)$ и

$$\Phi_*(a) := \max_{t \in Q} |F_*(a, t)| = \gamma > 0.$$

Согласно (7.7) $0 \in \partial \Phi_*(a)$, поэтому $\Phi_*(x) \geqslant \Phi_*(a)$ при всех $x \in \mathbf{R}^N$. В частности, $\min \{\Phi_*(x) \mid x \in \mathbf{R}^N\} > 0$.

Все векторы a указанного выше вида являются решениями задачи (7.1) при $f=f_*$, т. е. принадлежат множеству $X_*(f_*)$. Среди них $x_1, \ldots, x_k$ и $x_0=\mathbf{0}$. Поскольку разности $z_j=x_j-x_0$, $j\in 1:k$, линейно независимы, то $\dim X_*(f_*) \geqslant k=|N|-r$. Учитывая (7.3), получаем $\dim X_*(f_*)=|N|-r$. Теорема доказана.

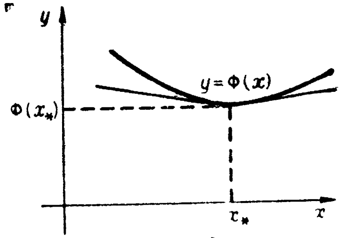


Рис. 12.

В случае, когда чебышевский ранг системы $\{u_j\}$ равен $|N|$, задача (7.1) имеет единственное решение. На самом деле справедлив более сильный результат.

Теорема 7.3 (о строгой единственности). Пусть $\{u_j\}$, $j\in N$,— чебышевская система непрерывных на Q функций и x_* — единственное решение задачи (7.1). Тогда существует постоянная $\eta>0$, такая, что

$$\Phi(x) \geqslant \Phi(x_*) + \eta \| x - x_* \| \quad \forall x \in \mathbf{R}^N \tag{7.8}$$

(рис. 12).

Доказательство. По теореме 7.1 решению задачи (7.1) x_* соответствует представление нуля

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_*[i]\, \xi_i\, U(t_i) = \mathbf{0}, \tag{7.9}$$

где $\xi_i=\xi(x_*, t_i)$ и $t_i\in Q(x_*)$. Так как $\{u_j\}$ — чебышевская система, то в (7.9) $\alpha_*[i]$ необходимо положительны и t_i попарно различны. Умножим (7.9) скалярно на произвольный единичный вектор g. Получим

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_*[i]\, \xi_i \langle U(t_i),\ g\rangle = 0. \tag{7.10}$$

Покажем, что

$$\varphi(g) := \max_{i\in 0:n} \xi_i \langle U(t_i),\ g\rangle > 0. \tag{7.11}$$

В противном случае согласно (7.10) и положительности $\alpha_*[i]$ имеем $\xi_i\langle U(t_i), g\rangle=0$, $i\in 0:n$. Значит,

$$\langle U(t_i),\ g\rangle=0,\quad i\in 0:n. \tag{7.12}$$

Рассмотрим (7.12) как систему линейных однородных уравнений относительно g. У нее n переменных и ранг ее матрицы тоже равен n. Поэтому (7.12) имеет единственное — нулевое — решение, что противоречит условию $\|g\|=1$. Справедливость неравенства (7.11) установлена.

Функция $\varphi(g)$ непрерывна на единичной сфере

$$S=\{g\in\mathbf{R}^N \mid \|g\|=1\}.$$

По теореме Вейерштрасса она достигает минимального на S значения и

$$\eta := \min_{g \in S} \max_{i \in 0:n} \xi_i \langle U(t_i), g \rangle > 0.$$

Проверим, что постоянная η — требуемая. При $x = x_*$ неравенство (7.8) тривиально. Возьмем $x \neq x_*$. Имеем

$$\Phi(x) - \Phi(x_*) \geqslant \max_{i \in 0:n} [\xi_i F(x, t_i) - \Phi(x_*)] = \max_{i \in 0:n} \xi_i [F(x, t_i) - F(x_*, t_i)] =$$
$$= \max_{i \in 0:n} \xi_i \langle U(t_i), x - x_* \rangle = \|x - x_*\| \max_{i \in 0:n} \xi_i \langle U(t_i), (x - x_*)/$$
$$/\|x - x_*\| \rangle \geqslant \eta \|x - x_*\|.$$

Теорема доказана.

Упражнения

7.1. Показать, что система непрерывных на Q функций $u_1, \ldots, u_n$ линейно независима тогда и только тогда, когда найдутся попарно различные точки $t_1, \ldots, t_n$ из Q, такие, что векторы $U(t_1), \ldots, U(t_n)$ линейно независимы (ср. с определением чебышевской системы).

7.2. Пусть $a < z_1 < \ldots < z_m < b$ и $t_+^n = [\max\{0, t\}]^n$. Найти чебышевский ранг системы функций $1, t, t^2, \ldots, t^n, (t - z_1)_+^n, \ldots, (t - z_m)_+^n$ на $[a, b]$.

7.3. Доказать следующее утверждение: если $u_1, \ldots u_n$ — чебышевская система на отрезке $[a, b]$, то существует полином $P(x_0, t) = \sum_{i=1}^n x_0[i] u_i(t)$, положительный на $[a, b]$.

§ 8. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Напомним, что квадратная матрица $D = D[N, N]$ называется симметричной, если $D^T = D$. Для того чтобы матрица D была симметричной, необходимо и достаточно, чтобы при всех x и y из $\mathbf{R}^N$ выполнялось равенство

$$\langle x, Dy \rangle = \langle Dx, y \rangle. \tag{8.1}$$

Действительно, при $D^T = D$ имеем

$$\langle x, Dy \rangle = \langle xD, y \rangle = \langle D^T x, y \rangle = \langle Dx, y \rangle.$$

Наоборот, подставляя в (8.1) $x = e_i$, $y = e_j$, получаем $D[i, j] = D[j, i]$ при всех $i, j \in N$, так что $D^T = D$.

Функция вида

$$f(x) = {}^1/_2 \langle Dx, x \rangle + \langle c, x \rangle + \alpha,$$

где D — симметричная матрица, называется квадратичной функцией. С точки зрения оптимизации постоянная величина α не играет существенной роли, поэтому обычно ее отбрасывают. В дальнейшем будем считать, что квадратичная функция имеет вид

$$f(x) = {}^1/_2 \langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle.$$

Учитывая (8.1), получаем разложение

$$f(x+h) = 1/2 \langle D(x+h), x+h\rangle + \langle c, x+h\rangle = f(x) + \langle Dx+c, h\rangle + $$
$$+ 1/2 \langle Dh, h\rangle. \qquad (8.2)$$

Поскольку $|\langle Dh, h\rangle|/\|h\| \leqslant \|Dh\| \to 0$ при $h \to 0$, то из (8.2), в частности, следует, что квадратичная функция f дифференцируема в каждой точке $x \in \mathbf{R}^N$ и $f'(x) = Dx + c$. Далее,

$$f'(x+h) = D(x+h) + c = f'(x) + Dh.$$

Значит, квадратичная функция дважды дифференцируема на $\mathbf{R}^N$ и $f''(x) = D$.

Согласно теореме 3.4 квадратичная функция выпукла на $\mathbf{R}^N$ тогда и только тогда, когда $\langle Dh, h\rangle \geqslant 0$ при всех $h \in \mathbf{R}^N$. Матрица, удовлетворяющая последнему условию, называется неотрицательно определенной.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x) := {}^1/_2 \langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \min_{x \in \mathbf{R}^N}, \qquad (8.3)$$

где D — неотрицательно определенная симметричная матрица.

Лемма 8.1. Для того чтобы вектор x_* был решением задачи (8.3), необходимо и достаточно, чтобы $Dx_* = -c$.

Доказательство. Необходимость. Так же, как в лемме 2.1, показывается, что $\langle f'(x_*), x - x_*\rangle \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbf{R}^N$. Подставляя в это неравенство $x = x_* - f'(x_*)$, получаем $f'(x_*) = 0$. Остается заметить, что $f'(x_*) = Dx_* + c$.

Достаточность. Согласно лемме 3.1 $f(x) - f(x_*) \geqslant 0$, или $f(x) \geqslant f(x_*)$, при всех $x \in \mathbf{R}^N$. Лемма доказана.

По существу установлено, что минимизация выпуклой квадратичной функции равносильна решению системы линейных уравнений.

Следствие. Пусть D — неотрицательно определенная симметричная матрица. Если $\langle Dx_0, x_0\rangle = 0$, то $Dx_0 = 0$.

Действительно, в точке x_0 квадратичная функция $g(x) = {}^1/_2 \langle Dx, x\rangle$ достигает минимального на $\mathbf{R}^N$ значения. Поэтому $g'(x_0) := Dx_0 = 0$.

Лемма 8.2. Для разрешимости задачи (8.3) необходимо и достаточно, чтобы целевая функция была ограниченной снизу на $\mathbf{R}^N$.

Доказательство. Необходимость тривиальна. Проверим достаточность. Допустив противное, получим в силу леммы 8.1, что система линейных уравнений $Dx = -c$ несовместна. По следствию 1 из теоремы I.6.3 найдется вектор u_0 со свойствами $Du_0 = 0$, $\langle c, u_0\rangle \neq 0$. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbf{R}^N$. Согласно (8.2) при любом вещественном t имеем

$$f(x_0 + tu_0) - f(x_0) = t\langle Dx_0 + c, u_0\rangle + \frac{t^2}{2}\langle Du_0, u_0\rangle = t\langle c, u_0\rangle +$$
$$+ t\langle x_0, Du_0\rangle = t\langle c, u_0\rangle.$$

Отсюда следует, вопреки условию леммы, что целевая функция f не ограничена снизу на $\mathbf{R}^N$. Лемма доказана.

Обратимся к задаче

$$
\begin{aligned}
f(x) := {}^1/_2 \langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle &\to \min,\\
A[M, N] \times x[N] &= b[M],
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

где матрица D по-прежнему считается неотрицательно определенной и симметричной. Множество планов этой задачи обозначим ω.

Лемма 8.3. Для того чтобы план x_* задачи (8.4) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $u_* = u_*[M]$, такой, что

$$
Dx_* + c = A^T u_*. \tag{8.5}
$$

Доказательство немедленно следует из теоремы 3.2.

Условия (8.5) линейны относительно x_* и u_*. Это позволяет установить критерий разрешимости задачи (8.4).

Лемма 8.4. Задача (8.4) разрешима тогда и только тогда, когда множество ее планов ω непусто и целевая функция f ограничена снизу на ω.

Доказательство. Необходимость тривиальна. Проверим достаточность. Допустив противное, на основании леммы 8.3 получим, что система линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
Dx - A^T u &= -c,\\
Ax &= b
\end{aligned}
$$

несовместна. По следствию 1 из теоремы I.6.3 найдутся векторы $v_0 = v_0[N]$, $u_0 = u_0[M]$ со свойствами

$$
\begin{aligned}
&v_0 D + u_0 A = 0, \quad Av_0 = 0,\\
&\langle c, v_0\rangle - \langle b, u_0\rangle \neq 0.
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

Зафиксируем $x_0 \in \omega$. Вектор $x(t) = x_0 + tv_0$ при любом вещественном t принадлежит ω. Согласно (8.2) и (8.6) имеем

$$
f(x(t)) - f(x_0) = t\langle Dx_0 + c, v_0\rangle + \frac{t^2}{2}\langle Dv_0, v_0\rangle = t\langle c, v_0\rangle +
$$

$$
+ t\langle x_0, Dv_0\rangle - \frac{t^2}{2}\langle u_0 A, v_0\rangle = t\langle c, v_0\rangle - t\langle x_0, u_0 A\rangle - \frac{t^2}{2}\langle u_0, Av_0\rangle =
$$

$$
= t\left[\langle c, v_0\rangle - \langle b, u_0\rangle\right].
$$

Отсюда следует, вопреки условию леммы, что целевая функция f не ограничена снизу на ω. Лемма доказана.

Упражнения

8.1. Привести пример неотрицательно определенной несимметричной матрицы.

8.2. Пусть $D=D[N,N]$ — симметричная матрица, $\lambda_1=\min_{\|x\|=1}\langle Dx,x\rangle$ и x_1 — единичный вектор, на котором $\langle Dx_1,x_1\rangle=\lambda_1$. Показать, что $Dx_1=\lambda_1 x_1$.

8.3. Решить экстремальную задачу

$$\begin{gathered} {}^1/_2\|x-c\|^2 \to \min, \\ A[M,\ N]\times x[N]=0[M], \end{gathered}$$

где $c\in\mathbf{R}^N$ — фиксированная точка и $A=A[M,N]$ — матрица с линейно независимыми строками.

§ 9. КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Экстремальная задача вида

$$\begin{aligned} f(x) :&= {}^1/_2\langle Dx,\ x\rangle+\langle c,\ x\rangle\to\min, \\ &A[M_1,\ N]\times x[N]\geqslant b[M_1], \\ &A[M_2,\ N]\times x[N]=b[M_2], \\ &x[N_1]\geqslant 0[N_1], \end{aligned}\tag{9.1}$$

где $D=D[N,\ N]$ — неотрицательно определенная симметричная матрица, называется задачей выпуклого квадратичного программирования.

Теорема 9.1. Задача (9.1) разрешима тогда и только тогда, когда множество ее планов Ω непусто и целевая функция f ограничена снизу на Ω.

Доказательство. Необходимость тривиальна. Проверим достаточность. Предварительно включим знаковые ограничения на переменные в общие ограничения-неравенства. Для этого положим

$$A[M_3,\ N]=\begin{pmatrix}A[M_1,\ N]\\ E[N_1,\ N]\end{pmatrix},\quad b[M_3]=\begin{pmatrix}b[M_1]\\ 0[N_1]\end{pmatrix}.$$

Тогда $$\Omega=\left\{x\in\mathbf{R}^N\ \middle|\ \begin{matrix}A[M_3,\ N]\times x[N]\geqslant b[M_3]\\ A[M_2,\ N]\times x[N]=b[M_2]\end{matrix}\right\}.$$

Пусть $M=M_3\cup M_2$ и $\mu=\inf_{x\in\Omega}f(x)$. Обозначим T конечную совокупность индексных множеств I, $M_2\subset I\subset M$, порождающих непустые грани $\Omega(I)$ многогранного множества Ω (см. § II.2). Учитывая формулу (II.2.3), получаем

$$\mu=\min_{I\in T}\inf_{x\in\Omega(I)}f(x).\tag{9.2}$$

Очевидно, что минимум в правой части (9.2) достигается. Среди оптимальных I выберем такое I_*, которому соответствует грань $\Omega(I_*)$ наименьшей размерности. Обозначим

$$\omega(I_*):=\operatorname{aff}\Omega(I_*)=\{x\in\mathbf{R}^N\mid A[I_*,\ N]\times x[N]=b[I_*]\}.$$

Возможны два случая.

I. $\Omega(I_*)=\omega(I_*)$. Имеем

$$\mu=\inf_{x\in\omega(I_*)} f(x).$$

Согласно лемме 8.4 (или лемме 8.2 при $\omega(I_*)=\mathbf{R}^N$) последний инфимум достигается, т. е. существует точка $x_*\in\omega(I_*)\subset\Omega$, такая, что $f(x_*)=\mu$. По определению μ точка x_* является решением исходной задачи.

II. $\Omega(I_*)\neq\omega(I_*)$. Согласно теореме II.2.1 относительная граница $\partial\Omega(I_*)$ грани $\Omega(I_*)$ непуста и состоит из граней, размерность которых меньше размерности $\Omega(I_*)$. Учитывая определение I_*, заключаем, что

$$\mu_1:=\inf_{x\in\partial\Omega(I_*)} f(x)>\mu. \tag{9.3}$$

Далее,

$$\inf_{x\in\Omega(I_*)} f(x)=\mu, \tag{9.4}$$

поэтому существует точка $x_1\in\Omega(I_*)$, на которой $f(x_1)\leqslant\mu_1$. Покажем, что

$$f(x)\geqslant\mu_1\quad\forall\, x\in\omega(I_*)\setminus\Omega(I_*). \tag{9.5}$$

Зафиксируем $x_0\in\omega(I_*)\setminus\Omega(I_*)$. На отрезке $[x_0,\ x_1]$ найдется точка $x(t_0)=t_0x_1+(1-t_0)x_0$, $t_0\in[0,\ 1)$, принадлежащая $\partial\Omega(I_*)$ (см. доказательство леммы II.2.2). В силу выпуклости функции f и (9.3) имеем

$$\mu_1\leqslant f(x(t_0))\leqslant t_0\mu_1+(1-t_0)f(x_0).$$

Отсюда следует требуемое неравенство $f(x_0)\geqslant\mu_1$.

Объединяя (9.3)—(9.5), приходим к соотношению

$$\inf_{x\in\omega(I_*)} f(x)=\mu.$$

Согласно лемме 8.4 (или лемме 8.2 при $\omega(I_*)=\mathbf{R}^N$) последний инфимум достигается, т. е. существует точка $x_*\in\omega(I_*)$, на которой $f(x_*)=\mu$. С учетом (9.5), (9.3) получаем $x_*\in\Omega(I_*)\subset\Omega$, поэтому x_* является решением исходной задачи. Теорема доказана.

Попутно установлено, что при $I=I_*$ любое решение задачи

$$\begin{gathered} f(x):=1/2\langle Dx,\ x\rangle+\langle c,\ x\rangle\to\min,\\ A[I,\ N]\times x[N]=b[I] \end{gathered} \tag{9.6}$$

будет решением задачи (9.1). Чтобы придать этому замечанию более конструктивный характер, обозначим T_1 совокупность тех $I\in T$, при которых задача (9.6) разрешима и оптимальный план $x(I)$ принадлежит $\Omega(I)$, т. е. удовлетворяет строгому неравенству $A[M\setminus I,\ N]\times x(I)[N]>b[M\setminus I]$. Тогда $x(I)$, $I\in T_1$, с наименьшим значением f является оптимальным планом исходной задачи.

Теорема 9.2. Для того чтобы план x_* задачи (9.1) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $u_* = u_*[M]$ со свойствами

$$\begin{gathered}\langle b,\ u_*\rangle = \langle Dx_* + c,\ x_*\rangle,\\ -x_*[N] \times D[N,\ N_1] + u_*[M] \times A[M,\ N_1] \leqslant c[N_1],\\ -x_*[N] \times D[N,\ N_2] + u_*[M] \times A[M,\ N_2] = c[N_2],\\ u_*[M_1] \geqslant \mathbf{0}[M_1].\end{gathered} \tag{9.7}$$

Доказательство немедленно следует из теоремы 3.1 и формулы $f'(x_*) = Dx_* + c$.

Упражнения

9.1. Записать критерий оптимальности для задачи выпуклого квадратичного программирования в случае, когда $\Omega = \mathbf{R}_+^N$.

9.2. Решить экстремальную задачу

$$\begin{gathered}{}^1/_2 \| x - c \|^2 \to \min,\\ | x[j] | \leqslant 1 \quad \forall j \in N,\end{gathered}$$

где c — фиксированная точка из $\mathbf{R}^N$.

9.3. Свести (9.1) к эквивалентной задаче квадратичного программирования с ограничениями в канонической форме записи.

§ 10. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В КВАДРАТИЧНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Займемся анализом критерия оптимальности, установленного в теореме 9.2. Обозначим P множество пар $z = \{v,\ u\}$, удовлетворяющих ограничениям

$$\begin{gathered}-v[N] \times D[N,\ N_1] + u[M] \times A[M,\ N_1] \leqslant c[N_1],\\ -v[N] \times D[N,\ N_2] + u[M] \times A[M,\ N_2] = c[N_2],\\ u[M_1] \geqslant \mathbf{0}[M_1].\end{gathered}$$

Первое из соотношений (9.7) перепишем в виде

$$-{}^1/_2 \langle Dx_*,\ x_*\rangle + \langle b,\ u_*\rangle = {}^1/_2 \langle Dx_*, x_*\rangle + \langle c,\ x_*\rangle = f(x_*).$$

Введем функцию $g(z) = -{}^1/_2 \langle Dv,\ v\rangle + \langle b,\ u\rangle$. Тогда теорему 9.2 можно переформулировать так: для того чтобы план x_* задачи (9.1) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор u_*, такой, что $z_* = \{x_*,\ u_*\} \in P$ и $g(z_*) = f(x_*)$.

Лемма 10.1. Для любых $z \in P$ и $x \in \Omega$ справедливо неравенство $g(z) \leqslant f(x)$.

Доказательство. Имеем

$$\langle b,\ u\rangle \leqslant \langle u,\ Ax\rangle = \langle uA,\ x\rangle \leqslant \langle Dv + c,\ x\rangle = \langle c,\ x\rangle + \langle Dv,\ x\rangle.$$

Поскольку

$$0 \leqslant \langle D(x-v),\ x-v\rangle = \langle Dx,\ x\rangle + \langle Dv,\ v\rangle - 2\langle Dv,\ x\rangle, \quad (10.1)$$

то $\langle b,\ u\rangle \leqslant \langle c,\ x\rangle + {}^1/_2\langle Dx,\ x\rangle + {}^1/_2\langle Dv,\ v\rangle$.

Отсюда очевидным образом следует требуемое. Лемма доказана.

Допустим, что задача (9.1) разрешима и x_* — ее оптимальный план. Согласно теореме 9.2 и лемме 10.1 найдется вектор u_*, такой, что $z_* = \{x_*,\ u_*\} \in P$ и

$$g(z) \leqslant f(x_*) = g(z_*) \quad \forall\ z \in P.$$

Значит, z_* доставляет максимум функции g на P, т. е. является решением экстремальной задачи

$$g(z) := -{}^1/_2\langle Dv,\ v\rangle + \langle b,\ u\rangle \to \max_{z\in P}. \quad (10.2)$$

Задача (10.2) называется двойственной к (9.1). Запишем ее в развернутом виде:

$$\begin{gathered} -{}^1/_2\langle Dv,\ v\rangle + \langle b,\ u\rangle \to \max, \\ -v[N] \times D[N,\ N_1] + u[M] \times A[M,\ N_1] \leqslant c[N_1], \\ -v[N] \times D[N,\ N_2] + u[M] \times A[M,\ N_2] = c[N_2], \\ u[M_1] \geqslant 0[M_1]. \end{gathered} \quad (10.3)$$

По существу, установлено, что из разрешимости задачи (9.1) следуют разрешимость двойственной задачи (10.2) и равенство

$$\min_{x\in Q} f(x) = \max_{z\in P} g(z). \quad (10.4)$$

Докажем обратное утверждение.

Положим

$$b_0 = (0[N],\ b[M]),$$
$$D_0 = \begin{pmatrix} D[N, N] & 0[N, M] \\ 0[M, N] & 0[M, M] \end{pmatrix}$$

и заметим, что $g(z) = -{}^1/_2\langle D_0 z,\ z\rangle + \langle b_0,\ z\rangle$. Пусть $z_* = \{v_*,\ u_*\}$ — оптимальный план задачи (10.2). Тогда z_* является решением задачи выпуклого квадратичного программирования

$${}^1/_2\langle D_0 z,\ z\rangle - \langle b_0,\ z\rangle \to \min_{z\in P}. \quad (10.5)$$

Ограничения этой задачи перепишем в виде

$$\begin{gathered} D[N_1,\ N] \times v[N] - A^T[N_1,\ M] \times u[M] \geqslant -c[N_1], \\ D[N_2,\ N] \times v[N] - A^T[N_2,\ M] \times u[M] = -c[N_2], \\ u[M_1] \geqslant 0[M_1]. \end{gathered}$$

По теореме 9.2 найдется вектор $x_* = x_*[N]$ со свойствами

$$
\begin{gathered}
-\langle c, x_*\rangle = \langle Dv_*, v_*\rangle - \langle b, u_*\rangle, \\
x_*[N] \times D[N, N] = D[N, N] \times v_*[N], \\
-x_*[N] \times A^T[N, M_1] \leqslant -b[M_1], \\
-x_*[N] \times A^T[N, M_2] = -b[M_2], \\
x_*[N_1] \geqslant 0[N_1].
\end{gathered} \qquad (10.6)
$$

В частности, $x_* \in \Omega$. Поскольку $Dv_* = Dx_*$, то

$$\langle Dv_*, v_*\rangle = \langle Dx_*, v_*\rangle = \langle x_*, Dv_*\rangle = \langle Dx_*, x_*\rangle.$$

Учитывая это равенство и первое из соотношений **(10.6)**, получаем $g(z_*) = f(x_*)$. Согласно лемме 10.1

$$f(x) \geqslant g(z_*) = f(x_*) \quad \forall\, x \in \Omega,$$

т. е. x_* — оптимальный план задачи (9.1). Доказано, что из разрешимости задачи (10.2) следуют разрешимость задачи (9.1) и равенство (10.4).

Полученный результат называется первой теоремой двойственности. Приведем ее формулировку.

Теорема 10.1. Если одна из двойственных задач выпуклого квадратичного программирования разрешима, то разрешима и другая. При этом справедливо равенство (10.4).

Продолжим изучение пары двойственных задач.

Теорема 10.2. Двойственные задачи (9.1), (10.2) одновременно разрешимы тогда и только тогда, когда множества их планов Ω и P непусты.

Доказательство. Необходимость тривиальна. Проверим достаточность. Пусть $z_0 \in P$. Согласно лемме 10.1 $f(x) \geqslant g(z_0)$ при всех $x \in \Omega$. Значит, множество планов Ω задачи (9.1) непусто и целевая функция f ограничена снизу на Ω. По теореме 9.1 задача (9.1) разрешима. На основании теоремы 10.1 разрешима и двойственная задача. Теорема доказана.

Следующее утверждение является естественным дополнением к первой теореме двойственности.

Теорема 10.3. Пусть $\Omega \neq \varnothing$. Тогда

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = -\infty$$

в том и только в том случае, когда $P = \varnothing$. Если $P \neq \varnothing$, то

$$\sup_{z \in P} g(z) = +\infty$$

тогда и только тогда, когда $\Omega = \varnothing$.

Докажем, например, вторую часть теоремы.

Необходимость. Допустив, что $\Omega \neq \varnothing$, придем к противоречию с теоремой 10.2.

Достаточность. Предположим, что $g(z) \leqslant C$ при всех $z \in P$. Тогда разрешима задача (10.5), откуда, как отмечалось, следует непустота множества Ω. Теорема доказана.

Переходим ко второй теореме двойственности, представляющей собой новую форму критерия оптимальности.

Теорема 10.4. Пусть x_0 и $z_0=\{v_0, u_0\}$ — планы задач (9.1) и (10.2) соответственно. Для того чтобы эти планы были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы

$$(b[i]-A[i, N]\times x_0[N])\times u_0[i]=0 \quad \forall i\in M_1, \tag{10.7}$$

$$(-v_0[N]\times D[N, j]+u_0[M]\times A[M, j]-c[j])\times x_0[j]=0 \quad \forall j\in N_1, \tag{10.8}$$

$$D(x_0-v_0)=0. \tag{10.9}$$

Доказательство. Необходимость. Учитывая (10.1), имеем

$$\langle b, u_0\rangle \leqslant \langle u_0, Ax_0\rangle = \langle u_0A, x_0\rangle \leqslant \langle Dv_0+c, x_0\rangle = \langle c, x_0\rangle + \\ + \langle Dv_0, x_0\rangle \leqslant \langle c, x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Dx_0, x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Dv_0, v_0\rangle.$$

Поскольку x_0 и z_0 — оптимальные планы, то согласно теореме 10.1 первое и последнее выражения в этой цепочке соотношений равны. Отсюда следует, что

$$\langle b-Ax_0, u_0\rangle = 0, \quad \langle -v_0D+u_0A-c, x_0\rangle = 0, \\ \langle Dv_0, x_0\rangle = \frac{1}{2}\langle Dx_0, x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Dv_0, v_0\rangle. \tag{10.10}$$

Перепишем равенства (10.10) в виде

$$\sum_{i\in M}(b[i]-A[i, N]\times x_0[N])\times u_0[i]=0, \tag{10.11}$$

$$\sum_{j\in N}(-v_0[N]\times D[N, j]+u_0[M]\times A[M, j]-c[j])\times x_0[j]=0, \tag{10.12}$$

$$\langle D(x_0-v_0), x_0-v_0\rangle = 0. \tag{10.13}$$

В (10.11), (10.12) все слагаемые неположительны и потому равны нулю. В частности, выполнены условия дополняющей нежесткости (10.7), (10.8). Равенство (10.9) получим на основании (10.13) и следствия из леммы 8.1.

Достаточность. Условия теоремы легко преобразуются к виду (10.10). Это, в свою очередь, приводит к равенству

$$\langle b, u_0\rangle = \langle c, x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Dx_0, x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Dv_0, v_0\rangle.$$

Значит, $g(z_0)=f(x_0)$. Оптимальность планов x_0 и z_0 следует теперь из леммы 10.1. Теорема доказана.

Упражнение

10.1. Записать двойственную к экстремальной задаче

$$^1/_2\|\sum_{j\in N}x[j]\,a_j-c\|^2\to\min,$$

$$\sum_{j \in N} x[j] = 1, \quad x[N] \geqslant 0[N],$$

где c и a_j — произвольные точки из $\mathbf{R}^M$.

§ 11. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Начнем с задачи Сильвестра, сыгравшей существенную роль в истории нелинейного программирования. Она ставится так. Даны произвольные точки a_i, $i \in M$, в пространстве $\mathbf{R}^N$. Найти наименьший шар, содержащий эти точки. Формально задачу Сильвестра можно записать в виде

$$\varphi(x) := \max_{i \in M} \{{}^1/_2 \| a_i - x \|^2\} \to \min_{x \in \mathbf{R}^N}. \qquad (11.1)$$

Здесь x — центр искомого шара.

Лемма 11.1. Решение задачи (11.1) существует и единственно.

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in \mathbf{R}^N$, и пусть $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)$. Тогда $\|a_i - x\| \leqslant (2\varphi(x_0))^{1/2}$ при всех $i \in M$. Значит,

$$\| x \| \leqslant \min_{i \in M} \| a_i \| + (2\varphi(x_0))^{1/2}.$$

Получили, что множество $\{x \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$ ограничено. Отсюда и из непрерывности функции φ следует разрешимость задачи (11.1).

Положим $\mu = \min\{\varphi(x) \mid x \in \mathbf{R}^N\}$ и допустим, что $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \mu$. Введем обозначения $u_i = a_i - x_0$, $v_i = a_i - x_1$. Тогда $u_i = v_i$ хотя бы при одном $i \in M$. Действительно, в противном случае

$$\| {}^1/_2 (u_i + v_i) \|^2 - {}^1/_2 \| u_i \|^2 - {}^1/_2 \| v_i \|^2 = - {}^1/_4 \| u_i - v_i \|^2 < 0,$$

так что при всех $i \in M$

$$\| {}^1/_2 (u_i + v_i) \|^2 < {}^1/_2 \| u_i \|^2 + {}^1/_2 \| v_i \|^2 \leqslant 2\mu.$$

Значит,

$$\max_{i \in M} \left\{ {}^1/_2 \left\| a_i - \frac{x_0 + x_1}{2} \right\|^2 \right\} < \mu.$$

Но это противоречит определению μ. Получили, что $u_i = v_i$ при некотором $i \in M$, откуда следует равенство $x_0 = x_1$. Лемма доказана.

Имеем $\varphi(x) = \max_{i \in M} \{ -\langle a_i, x \rangle + {}^1/_2 \| a_i \|^2 \} + {}^1/_2 \| x \|^2$.

Теперь нетрудно проверить, что задача (11.1) эквивалентна задаче квадратичного программирования

$$
\begin{gathered}
{}^1/_2 \langle Ex,\ x\rangle + t \to \min,\\
-\langle a_i,\ x\rangle + {}^1/_2 \| a_i \|^2 \leqslant t,\ i \in M
\end{gathered}
\tag{11.2}
$$

(см. § I.3). Из строк a_i составим матрицу A и обозначим b вектор с компонентами $b[i] = \|a_i\|^2/2$, $i \in M$. Это дает возможность переписать (11.2) в виде

$$
\begin{gathered}
{}^1/_2 \langle Ex,\ x\rangle + t \to \min,\\
A[i,\ N] \times x[N] + t \geqslant b[i],\ i \in M.
\end{gathered}
\tag{11.3}
$$

Неизвестной в (11.3) является пара $y = \{x,\ t\}$. Положив $c = (\mathbf{0}[N],\ 1)$,

$$
D = \begin{pmatrix} E(N,\ N) & \mathbf{0}[N] \\ (\mathbf{0}[N])^T & 0 \end{pmatrix},
$$

придем к следующей форме задачи Сильвестра:

$$
\begin{gathered}
f(y) := \frac{1}{2}\langle Dy,\ y\rangle + \langle c,\ y\rangle \to \min,\\
A[i,\ N] \times x[N] + t \geqslant b[i],\quad i \in M.
\end{gathered}
\tag{11.4}
$$

Запишем двойственную задачу:

$$
\begin{gathered}
g(z) := -{}^1/_2 \langle v,\ v\rangle + \langle b,\ u\rangle \to \max,\\
-v[N] + u[M] \times A[M,\ N] = \mathbf{0}[N],\\
\textstyle\sum_{i \in M} u[i] = 1,\ u \geqslant \mathbf{0}.
\end{gathered}
\tag{11.5}
$$

На самом деле $z = \{w,\ u\}$, где $w = \{v[N],\ s\}$, однако переменная s явно в (11.5) не входит. Вектор v из (11.5) можно исключить:

$$
v = uA = \textstyle\sum_{i \in M} u[i] a_i,
$$

после чего двойственная задача приводится к виду

$$
\begin{gathered}
{}^1/_2 \left\| \textstyle\sum_{i \in M} u[i]\, a_i \right\|^2 - \langle b,\ u\rangle \to \min,\\
\textstyle\sum_{i \in M} u[i] = 1,\quad u \geqslant \mathbf{0}.
\end{gathered}
\tag{11.6}
$$

Очевидно, что задача (11.6) разрешима. Обозначим u_* ее оптимальный план.

Теорема 11.1. Вектор

$$
x_* = \textstyle\sum_{i \in M} u_*[i] a_i
$$

является решением исходной задачи (11.1).

Доказательство. Положим $v_* = u_* A$ и в качестве s_* возьмем любое вещественное число. Тогда вектор $z_* = \{v_*,\ s_*,\ u_*\}$ будет оптимальным планом задачи (11.5). Обозначим x_* единственное решение задачи (11.1). Пусть $t_* = \max_{i \in M}\{-A[i,\ M] \times x_*[N] + b[i]\}$. В этом случае $y_* = \{x_*,\ t_*\}$ — оптимальный план задачи (11.4). На основании второй теоремы двойственности (точнее, согласно (10.9)) получим $x_* = v_*$. Теорема доказана.

Таким образом, задача Сильвестра сведена к задаче квадратичного программирования (11.6), имеющей простые ограничения.

Для дальнейшего нам понадобится одно новое понятие. Матрица $D=D[N, N]$ называется положительно определенной, если $\langle Dh, h\rangle > 0$ при всех ненулевых $h \in \mathbf{R}^N$.

Лемма 11.2. Пусть D — положительно определенная симметричная матрица. Тогда она обратима и обратная матрица D^{-1} является положительно определенной и симметричной.

Доказательство. Из положительной определенности D следует, что система $Dx=\mathbf{0}$ имеет только нулевое решение. Значит, матрица D обратима. Далее,

$$\langle D^{-1}x,\ y\rangle = \langle D^{-1}x,\ DD^{-1}y\rangle = \langle x, D^{-1}y\rangle,$$

так что D^{-1} — симметричная матрица. Наконец, при $h \neq \mathbf{0}$

$$\langle D^{-1}h,\ h\rangle = \langle D^{-1}h,\ D(D^{-1}h)\rangle > 0,$$

поскольку $D^{-1}h \neq \mathbf{0}$. Получили, что D^{-1} — положительно определенная матрица. Лемма доказана.

Рассмотрим задачу квадратичного программирования

$$\begin{aligned} f(x) := 1/2\, \langle Dx,\ x\rangle + \langle c,\ x\rangle &\to \min, \\ A[M_1,\ N] \times x[N] &\geqslant b[M_1], \\ A[M_2,\ N] \times x[N] &= b[M_2] \end{aligned} \tag{11.7}$$

с положительно определенной симметричной матрицей D. Предположим, что множество ее планов Ω непусто. Поскольку целевая функция f является выпуклой и система $f'(x) := Dx + c = \mathbf{0}$ имеет решение $x_0 = -D^{-1}c$, то согласно лемме 8.1 $f(x) \geqslant f(x_0)$ при всех $x \in \mathbf{R}^N$. В частности, f ограничена снизу на Ω, откуда следует разрешимость задачи (11.7).

Запишем к ней двойственную:

$$\begin{aligned} -{}^1/_2 \langle Dv,\ v\rangle + \langle b,\ u\rangle &\to \max, \\ -Dv + A^T u = c, \quad u[M_1] &\geqslant \mathbf{0}[M_1]. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Вектор v из (11.8) можно исключить:

$$Dv = A^T u - c, \quad v = D^{-1}(A^T u - c).$$

При этом целевая функция примет вид

$$-{}^1/_2 \langle A^T u - c,\ D^{-1}(A^T u - c)\rangle + \langle b,\ u\rangle = -{}^1/_2 \langle AD^{-1}A^T u, u\rangle + \\ + \langle AD^{-1}c + b,\ u\rangle - {}^1/_2 \langle D^{-1}c,\ c\rangle.$$

Теперь очевидно, что (11.8) сводится к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle AD^{-1}A^T u,\ u\rangle - \langle AD^{-1}c + b,\ u\rangle &\to \min, \\ u[M_1] &\geqslant \mathbf{0}[M_1]. \end{aligned} \tag{11.9}$$

По первой теореме двойственности задача (11.8), а значит, и

(11.9) разрешимы. Обозначим u_* оптимальный план задачи (11.9).

Теорема 11.2. Вектор $x_*=D^{-1}(A^T u_*-c)$ является решением исходной задачи (11.7).

Доказательство. Положим $v_*=D^{-1}(A^T u_*-c)$. Тогда пара $\{v_*, u_*\}$ будет оптимальной для задачи (11.8). Обозначим x_* оптимальный план задачи (11.7). По второй теореме двойственности $D(x_*-v_*)=\mathbf{0}$, откуда следует, что $x_*=v_*$. Теорема доказана.

Таким образом, задача (11.7) сведена к задаче (11.9), имеющей только знаковые ограничения на часть переменных. Согласно лемме 11.2 матрица $D_0=AD^{-1}A^T$ неотрицательно определена и симметрична. Значит, (11.9) — задача выпуклого квадратичного программирования. Нетрудно также проверить, что в случае линейной независимости строк матрицы A матрица D_0 положительно определена.

Упражнения

11.1. Показать, что задача (11.7) имеет единственное решение.

11.2. Пусть f — произвольная квадратичная функция с симметричной матрицей D и $\lambda=\min_{\|x\|=1}\langle Dx, x\rangle$. Доказать, что при $t\in[0, 1]$ справедливо неравенство

$$f(tx_1+(1-t)x_0)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_0)-\frac{1}{2}\lambda t(1-t)\|x_1-x_0\|^2.$$

§ 12. СТАЦИОНАРНЫЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ

Вернемся к задаче, рассмотренной в § 2:

$$\begin{gathered} f(x)\to\min,\\ A[M_1, N]\times x[N]\geqslant b[M_1],\\ A[M_2, N]\times x[N]=b[M_2]. \end{gathered}$$

Предположим, что множество ее планов Ω непусто. Считаем также, что целевая функция f определена на некотором открытом множестве, содержащем Ω, и дифференцируема на Ω.

Определение. План, удовлетворяющий необходимому условию минимума (теорема 2.3), называется стационарной точкой функции f на Ω.

Таким образом, точка $x_0\in\Omega$ является стационарной тогда и только тогда, когда найдется вектор $u_0=u_0[M]$ со свойствами

$$\begin{gathered} f'(x_0)=u_0A,\\ (b[i]-A[i, N]\times x_0[N])\times u_0[i]=0\quad \forall i\in M_1,\\ u_0[M_1]\geqslant\mathbf{0}[M_1]. \end{gathered}\qquad(12.1)$$

Чтобы выяснить смысл этого определения, введем линеаризованную задачу

$$l(h) := f(x_0) + \langle f'(x_0), h\rangle \to \min_{x_0+h\in\Omega}. \qquad (12.2)$$

Стационарная точка x_0 характеризуется тем, что функция l на множестве $\{h \mid x_0+h\in\Omega\}$ не может принять значение меньше $l(\mathbf{0})$. Разберемся в этом. Обозначим $\eta_0=Ax_0-b$ и рассмотрим более общую, чем (12.2), задачу

$$\begin{gathered} q(h) := \langle f'(x_0), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Dh, h\rangle \to \min, \\ A[M_1, N]\times h[N] \geqslant -\eta_0[M_1], \\ A[M_2, N]\times h[N] = \mathbf{0}[M_2]. \end{gathered} \qquad (12.3)$$

Здесь D — произвольная неотрицательно определенная симметричная матрица. Если в (12.2) отбросить постоянную величину $f(x_0)$, а в (12.3) положить $D=0$, то получим одинаковые задачи.

Теорема 12.1. План x_0 является стационарной точкой функции f на Ω тогда и только тогда, когда вектор $h_0=\mathbf{0}$ — решение задачи (12.3).

Доказательство. Запишем критерий оптимальности для задачи выпуклого квадратичного программирования (12.3) (см. теорему 3.3): для того чтобы план h_0 был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $u_0=u_0[M]$ со свойствами

$$\begin{gathered} Dh_0+f'(x_0)=u_0A, \\ (\eta_0[i]+A[i, N]\times h_0[N])\times u_0[i]=0 \quad \forall i\in M_1, \\ u_0[M_1]\geqslant \mathbf{0}[M_1]. \end{gathered} \qquad (12.4)$$

При $h_0=\mathbf{0}$ условия (12.1) и (12.4) совпадают. Отсюда очевидным образом следует заключение теоремы.

Лемма 12.1. Пусть D — положительно определенная симметричная матрица. Тогда при любом $x_0\in\Omega$ решение задачи (12.3) существует и единственно.

Доказательство. Множество планов задачи (12.3) обозначим H. Оно непусто, поскольку содержит нулевой вектор. Согласно леммам 8.1 и 11.2 целевая функция q имеет точку минимума на всем $\mathbf{R}^N$. В частности, она ограничена снизу на H. По теореме 9.1 задача (12.3) разрешима. Единственность решения следует из строгой выпуклости функции q на $\mathbf{R}^N$ (см. упражнения 3.3 и 3.1). Можно привести и непосредственное доказательство.

Положим $q_0=\min_{h\in H}q(h)$ и допустим, что $q(h_1)=q(h_2)=q_0$ на некоторых h_1, h_2 из H. Имеем

$$\begin{aligned} q_0 \leqslant q((h_1+h_2)/2) &= q(h_1)/2+q(h_2)/2-\langle D(h_2-h_1), h_2-h_1\rangle/8 = \\ &= q_0-\langle D(h_2-h_1), h_2-h_1\rangle/8. \end{aligned}$$

Значит, $\langle D(h_2-h_1),\ h_2-h_1\rangle \leqslant 0$. В силу положительной определенности матрицы D получаем $h_2=h_1$. Лемма доказана.

Случай, когда матрица D в (12.3) положительно определена, наиболее интересен. Рассмотрим его подробнее. Обозначим h_0 единственное решение задачи (12.3). Как отмечалось в предыдущем параграфе,

$$h_0=D^{-1}[A^T u_0-f'(x_0)],$$

где u_0 — оптимальный план задачи

$$\begin{gathered}{}^1/_2 \langle AD^{-1}A^T u,\ u\rangle - \langle AD^{-1}f'(x_0)-\eta_0,\ u\rangle \to \min,\\ u\,[M_1] \geqslant 0\,[M_1].\end{gathered}$$

Для минимального значения q_0 функции q на H справедливо неравенство $q_0 \leqslant 0$. Это следует из очевидных соотношений $\mathbf{0}\in H$, $q(\mathbf{0})=0$. Покажем, что условия $q_0=0$ и $h_0=0$ равносильны. Пусть $q_0=0$. Тогда $q(\mathbf{0})=q_0$, а так как решение задачи (12.3) единственно, то $h_0=\mathbf{0}$. Обратное тривиально. Согласно теореме 12.1 выполнение любого из условий $q_0=0$, $h_0=\mathbf{0}$ гарантирует стационарность точки x_0.

Допустим, что $h_0\neq\mathbf{0}$, $q_0<0$. Величина $|q_0|$ характеризует меру нестационарности точки $x_0\in\Omega$. Что касается вектора h_0, то он указывает направление строгого убывания функции f из точки x_0. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 12.2. Если $h_0\neq\mathbf{0}$, то вектор $x(t)=x_0+th_0$ при малых $t>0$ принадлежит Ω и

$$f(x(t))\leqslant f(x_0)-t[\,|q_0|+{}^1/_4\lambda\,\|h_0\|^2],$$

где $\lambda := \min_{\|h\|=1}\langle Dh,\ h\rangle > 0$.

Доказательство. Точки x_0 и x_0+h_0 принадлежат выпуклому множеству Ω, поэтому $x(t)\in\Omega$ при всех $t\subset[0,\ 1]$. Далее, имеем

$$\begin{gathered}f(x_0+th_0)-f(x_0)=t\langle f'(x_0),\ h_0\rangle+o(\|th_0\|)=tq_0-{}^1/_2 t\langle Dh_0,\ h_0\rangle+\\ +o(\|th_0\|).\end{gathered}$$

Учитывая неравенство $\langle Dh_0,\ h_0\rangle \geqslant \lambda\|h_0\|^2$, при малых $t>0$ получаем

$$\begin{gathered}f(x(t))-f(x_0)\leqslant tq_0-\|th_0\|\,[{}^1/_2\lambda\|h_0\|-o(\|th_0\|)/\|th_0\|]\leqslant\\ \leqslant -t\,[\,|q_0|+{}^1/_4\lambda\,\|h_0\|^2].\end{gathered}$$

Теорема доказана.

В задаче (12.3) часто берут $D=\gamma E$, где γ — положительное число.

Упражнения

В приводимых ниже упражнениях матрица D считается положительно определенной и симметричной.

12.1. Для векторов x, y из $\mathbf{R}^N$ положим

$$\langle x, y\rangle_D = \langle Dx, y\rangle, \quad \| x \|_D = \langle x, x\rangle_D^{1/2}.$$

Показать, что $\|x\|_D$ обладает всеми свойствами нормы, указанными в § 1.5.

12.2. Решить экстремальную задачу

$$\langle c, x\rangle \to \min,$$
$$\langle Dx, x\rangle = 1.$$

12.3. Решить экстремальную задачу

$$\langle c, x\rangle \to \min,$$
$$\langle a_i, x\rangle = 0, \ i \in M,$$
$$\langle Dx, x\rangle = 1$$

при условии, что векторы a_i линейно независимы.

12.4. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\langle c, x\rangle \to \min,$$
$$\langle a_i, x\rangle \geqslant 0, \ i \in M,$$
$$\langle Dx, x\rangle = 1.$$

Обозначим K выпуклую коническую оболочку, натянутую на векторы a_i, $i \in M$, и предположим, что $c \notin K$. Показать, что в этом случае исходная задача сводится к задаче квадратичного программирования.

§ 13. БИЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В этом параграфе рассматривается экстремальная задача, в которой целевая функция линейно зависит от каждой из двух векторных переменных $x = x[P]$, $y = y[Q]$. При этом x и y независимо друг от друга меняются в двух выпуклых многогранных множествах $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^P$, $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^Q$, определяемых с помощью конечного числа линейных неравенств и равенств. Таким образом, исходная задача может быть записана в виде

$$f(x, y) := x[P] \times L[P, Q] \times y[Q] + a[P] \times x[P] + r[Q] \times y[Q] = \langle x, Ly\rangle + \langle a, x\rangle + \langle r, y\rangle \to \min_{x \in \Omega_1,\ y \in \Omega_2}. \qquad (13.1)$$

Положим $z = \{x, y\}$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$,

$$D = \begin{pmatrix} \mathbf{0}[P, P] & L[P, Q] \\ L^T[Q, P] & \mathbf{0}[Q, Q] \end{pmatrix}, \quad c = (a[P], r[Q]).$$

Нетрудно проверить, что

$$f(x, y) = {}^1/_2 \langle Dz, z\rangle + \langle c, z\rangle.$$

Значит, задача (13.1) эквивалентна задаче квадратичного программирования

$$f(z) := \tfrac{1}{2} \langle Dz, z\rangle + \langle c, z\rangle \to \min_{z \in \Omega}. \qquad (13.2)$$

Однако в данном случае матрица D, как правило, не будет неотрицательно определенной, т. е. функция f не будет выпуклой. Это приводит к тому, что у функции f могут появиться локальные минимумы, не являющиеся глобальными.

Пример. Пусть $f(x, y) = xy$, $\Omega_1 = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$, $\Omega_2 = \{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 1\}$. Имеем $f(-1, 1) = -1$ и $f(x, y) \geqslant -1$ при $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Таким образом, в точке $z_0 = (-1, 1)$ достигается локальный минимум функции f на $\Omega_1 \times \Omega_2$. Поскольку $f(2, -2) = -4$, то z_0 не является точкой глобального минимума.

Несмотря на это, теорема существования решения в билинейном программировании получается в таком же виде, как и в линейном.

Теорема 13.1. Допустим, что выпуклые многогранные множества Ω_1, Ω_2 не пусты и не содержат прямых и инфимум билинейной функции f на $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ конечен:

$$\inf_{x \in \Omega_1,\, y \in \Omega_2} f(x, y) = \mu > -\infty.$$

Тогда в Ω найдется точка $z_* = \{x_*, y_*\}$, такая, что $f(z_*) = \mu$. Более того, в качестве x_*, y_* можно выбрать вершины множеств Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Доказательство. Возьмем минимизирующую последовательность $\{x_k, y_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ По определению $x_k \in \Omega_1$, $y_k \in \Omega_2$ и $f(x_k, y_k) \to \mu$.

Для каждого k решим задачу линейного программирования

$$f(x, y_k) \to \min_{x \in \Omega_1}. \qquad (13.3)$$

Так как $f(x, y_k) \geqslant \mu$ при всех $x \in \Omega_1$, то задача (13.3) имеет решение, причем в качестве оптимального плана может быть выбрана вершина $\overset{*}{x}_k$ множества Ω_1. Из неравенств

$$f(x_k, y_k) \geqslant f(x_k^*, y_k) \geqslant \mu$$

следует, что последовательность $\{\overset{*}{x}_k, y_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, также является минимизирующей.

Поскольку Ω_1 имеет лишь конечное число вершин, то в последовательности $\{\overset{*}{x}_k\}$ одна из вершин встретится бесконечное множество раз. Пусть это будет x_*. Разредив, если нужно, последовательность $\{\overset{*}{x}_k\}$, получим $\overset{*}{x}_k = x_*$ для всех k. При этом последовательность $\{x_*, y_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, остается минимизирующей.

Решим задачу линейного программирования

$$f(x_*, y) \to \min_{y \in \Omega_2}.$$

Обозначим y_* вершину Ω_2, в которой достигается минимум. Тогда

$$f(x_*, y_k) \geqslant f(x_*, y_*) \geqslant \mu.$$

Так как $f(x_*, y_k) \to \mu$, то $f(x_*, y_*) = \mu$. Теорема доказана.

При попытке применить к задаче билинейного программирования симплекс-метод первой приходит в голову мысль о поочередной минимизации по каждой переменной. Такой процесс будет сходиться за конечное число шагов к точке, в которой f достигает локального минимума. Поиск глобального минимума значительно труднее. Никакой процесс типа симплекс-метода не дает возможности продвинуться из точки локального минимума, как показывает приведенный выше пример.

Поэтому известные алгоритмы нахождения глобального минимума чаще всего основаны на идее перебора. В простейшем виде это полный перебор всех пар вершин с вычислением значения целевой функции в каждой паре. В такой форме алгоритм чрезвычайно трудоемок. Вопросы сокращения перебора в книге не рассматриваются.

Замечание. Пониманию особенностей задачи (13.1) и вообще задач невыпуклого программирования может помочь следующее соображение. Запишем задачу в форме (13.2). Выберем в Ω точку z_0 и возможное направление h (направление h называется возможным или допустимым в точке z_0, если $z_0+th \in \Omega$ при малых $t>0$). Очевидно, что $\psi(t) := f(z_0+th)$ есть квадратичная функция действительной переменной t. В зависимости от знака числа $\langle Dh, h\rangle$ эта функция может быть выпуклой или вогнутой. Если z_0 — точка локального минимума, то ψ при малых $t>0$ не убывает. Если ψ выпукла, то неубывание сохранится при всех $t>0$. В противном случае неубывание сменится убыванием. Однако это может произойти как на множестве Ω, так и за его пределами. Разобраться в этой ситуации, используя лишь сведения о структуре Ω в окрестности точки z_0, невозможно.

Упражнения

13.1. Пусть f — билинейная функция и

$$\varphi(y) = \min_{x \in \Omega_1} f(x, y), \quad y \in \Omega_2.$$

Проверить, что функция φ вогнута на Ω_2.

13.2. Доказать следующее утверждение: если $y_* \in \Omega_2$ — точка глобального минимума φ на Ω_2 и $x_* \in \Omega_1$ — точка глобального минимума $f(x, y_*)$ на Ω_1, то $\{x_*, y_*\}$ — точка глобального минимума f на $\Omega_1 \times \Omega_2$.

ГЛАВА IV

ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача дробно-линейного программирования, заключающаяся в минимизации дробно-линейной функции вида

$$f(x)=\frac{\langle c,\ x\rangle+\xi}{\langle a,\ x\rangle+\beta}$$

на выпуклом многогранном множестве $\Omega\subset\mathbf{R}^N$, в некоторых отношениях близка к задаче линейного программирования: локальный минимум является и глобальным, среди точек, в которых достигается минимум, обязательно имеются вершины Ω. Близость этих двух задач сказывается и в том, что поверхностями уровня для каждой из них служат гиперплоскости. В линейной задаче семейство поверхностей уровня состоит из параллельных гиперплоскостей, в дробно-линейной — из гиперплоскостей, вращающихся вокруг особого аффинного многообразия коразмерности 2, задаваемого уравнениями $\langle c,\ x\rangle+\xi=0$, $\langle a,\ x\rangle+\beta=0$.

Существенное различие между рассматриваемыми классами задач проявляется, когда множество Ω не ограничено. Это связано с тем, что в задаче дробно-линейного программирования инфимум f на Ω может реализовываться как в конечной точке Ω, так и в некотором рецессивном направлении Ω. Последнее означает, что существует рецессивное направление h (которое полезно интерпретировать как бесконечно удаленную точку Ω), такое, что при всех $x\in\Omega$

$$\lim_{t\to+\infty}f(x+th)=\inf_{x\in\Omega}f(x).$$

В первом случае величина $\inf_{x\in\Omega}f(x)$ конечна, во втором — конечна или равна $-\infty$.

Мы несколько упрощаем ситуацию, предполагая, что Ω отстоит на положительное расстояние от гиперплоскости $\langle a,\ x\rangle+\beta=0$. Иногда исследователи допускают наличие точек указанной гиперплоскости на границе Ω. Это создает некоторые осложнения, которые имеют, однако, не очень глубокий характер. Авторы сочли возможным оставить соответствующий круг вопросов без рассмотрения.

В § 2 указан критерий оптимальности для задачи дробно-линейного программирования. Он формулируется в терминах линейных равенств и неравенств. Это дает возможность установить теорему существования решения (§ 3). Результаты § 4 и 7 связаны со свойством строгой квазимонотонности дробно-линейной функции. В § 5 показано, что задача дробно-линейного программирования в определенном смысле сводится к задаче линейного программирования. Установленная в § 6 теорема двойственности вновь свидетельствует о родстве задач линейного и дробно-линейного программирования — задача линейного программирования оказывается двойственной к задаче дробно-линейного программирования.

В § 8 рассматривается более сложная задача дробно-рационального чебышевского приближения на дискретном множестве точек. Для нее получен критерий оптимальности и указан численный метод решения.

§ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Дробно-линейной называется функция вида

$$f(x)=\frac{\langle c, x\rangle+\xi}{\langle a, x\rangle+\beta}, \qquad x\in\mathbf{R}^N. \tag{2.1}$$

Будем считать, что векторы a и c линейно независимы. В частности, они ненулевые. С точки зрения экстремальных задач это наиболее интересный случай.

Обозначим $H_\infty=\{x\in\mathbf{R}^N \mid \langle a, x\rangle+\beta=0\}$. Поверхностью уровня $f(x)=p$ функции (2.1) является гиперплоскость

$$H_p=\{x\in\mathbf{R}^N \mid \langle c-pa, x\rangle+\xi-p\beta=0\}.$$

Однако из этой поверхности следует исключить пересечение H_p с H_∞, в точках которого f теряет смысл. Отметим, что все гиперплоскости H_p пересекаются по особому аффинному многообразию коразмерности 2, определяемому соотношениями

$$\langle c, x\rangle+\xi=0, \quad \langle a, x\rangle+\beta=0.$$

Желая иметь дело только с такими значениями аргумента, при которых дробно-линейная функция f определена и конечна, будем рассматривать ее лишь в полупространстве

$$Q=\{x\in\mathbf{R}^N \mid \langle a, x\rangle+\beta>0\}.$$

Нетрудно проверить, что f непрерывно дифференцируема на Q и

$$f'(x)=\frac{[\langle a, x\rangle+\beta]c-[\langle c, x\rangle+\xi]a}{[\langle a, x\rangle+\beta]^2}=\frac{c-f(x)a}{\langle a, x\rangle+\beta}. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. При любых x и x_0 из Q справедлива формула

$$f(x)-f(x_0)=\rho(x, x_0)\langle f'(x_0), x-x_0\rangle, \tag{2.3}$$

где $\rho(x, x_0):=[\langle a, x_0\rangle+\beta]/[\langle a, x\rangle+\beta]>0$.

Доказательство. Имеем

$$f(x)-f(x_0)=\frac{[\langle c, x\rangle+\xi][\langle a, x_0\rangle+\beta]-[\langle c, x_0\rangle+\xi][\langle a, x\rangle+\beta]}{[\langle a, x\rangle+\beta][\langle a, x_0\rangle+\beta]}=$$

$$=\frac{\langle c, x-x_0\rangle}{\langle a, x\rangle+\beta}-\frac{f(x_0)\langle a, x-x_0\rangle}{\langle a, x\rangle+\beta}=\frac{\langle c-f(x_0)a, x-x_0\rangle}{\langle a, x\rangle+\beta}. \tag{2.4}$$

Вместе с тем согласно (2.2)

$$\langle f'(x_0), h\rangle=\frac{\langle c-f(x_0)a, h\rangle}{\langle a, x_0\rangle+\beta}. \tag{2.5}$$

Сравнивая (2.4) и (2.5), приходим к (2.3). Лемма доказана.

Задача минимизации дробно-линейной функции f на выпуклом многогранном множестве Ω называется задачей дробно-линейного программирования. В дальнейшем для простоты будем считать, что множество Ω определяется с помощью конечного числа линейных неравенств

$$A[M, N]\times x[N]\geqslant b[M].$$

Кроме того, предположим, что Ω непусто и лежит внутри Q. Таким образом,

$$\langle a, x\rangle+\beta>0 \quad \forall x\in\Omega. \tag{2.6}$$

Лемма 2.2. Условие (2.6) выполняется тогда и только тогда, когда существует вектор $u_0=u_0[M]$, такой, что $u_0A=a$, $u_0\geqslant 0$ и $\langle b, u_0\rangle+\beta>0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\langle a, x\rangle\to\min, \tag{2.7}$$
$$Ax\geqslant b.$$

Множество ее планов Ω непусто, и при выполнении условия (2.6) целевая функция ограничена снизу на Ω. По теореме I.4.2 задача (2.7) разрешима. Пусть x_0 — ее оптимальный план. На основании теоремы I.7.1 найдется вектор $u_0=u_0[M]$, такой, что $\langle b, u_0\rangle=\langle a, x_0\rangle$, $u_0A=a$, $u_0\geqslant 0$. Поскольку $\langle b, u_0\rangle+\beta=\langle a, x_0\rangle+\beta>0$, то вектор u_0 — требуемый.

Наоборот, допустив существование вектора u_0 с указанными свойствами, при всех $x\in\Omega$ получим

$$\langle a, x\rangle+\beta=\langle u_0A, x\rangle+\beta=\langle u_0, Ax\rangle+\beta\geqslant\langle u_0, b\rangle+\beta>0.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1 (критерий оптимальности). Для того чтобы план задачи дробно-линейного программирования

$$f(x) := \frac{\langle c, x\rangle + \xi}{\langle a, x\rangle + \beta} \to \min, \quad Ax \geqslant b \tag{2.8}$$

был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $v_* = v_*[M]$ со свойствами

$$\begin{gathered} \langle b, v_*\rangle = \langle \beta c - \xi a, x_*\rangle, \\ v_* A - \langle a, x_*\rangle c + \langle c, x_*\rangle a = \beta c - \xi a, \\ v_* \geqslant 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Доказательство. Необходимость. Согласно теореме III.2.1 существует вектор u_*, такой, что

$$\begin{gathered} \langle b, u_*\rangle = \langle f'(x_*), x_*\rangle, \\ u_* A = f'(x_*), \quad u_* \geqslant 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Отсюда следует требуемое, если воспользоваться формулой (2.2) и положить $v_* = u_*[\langle a, x_*\rangle + \beta]^2$.

Достаточность. Можно считать, что выполнены соотношения (2.10). Возьмем любой план x. Согласно (2.3) получим

$$\begin{gathered} (f(x) - f(x_*))/\rho(x, x_*) = \langle f'(x_*), x - x_*\rangle = \\ = \langle u_*, Ax\rangle - \langle b, u_*\rangle = \langle u_*, Ax - b\rangle \geqslant 0. \end{gathered}$$

Теорема доказана.

Упражнения

2.1. Привести задачу (2.8) к виду

$$\langle c, z\rangle / \langle a, z\rangle \to \min, \quad Az \geqslant b_0.$$

2.2. Показать, что в случае линейной зависимости векторов a и c задача (2.8) сводится к задаче линейного программирования.

2.3. Исследовать задачу дробно-линейного программирования, заменив условие (2.6) двумя:

I) $\langle a, x\rangle + \beta \geqslant 0 \ \forall \ x \in \Omega$;

II) $\langle c, x\rangle + \xi$ и $\langle a, x\rangle + \beta$ одновременно не обращаются в нуль на Ω.

§ 3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Введем матрицу $B = B[N, N]$ с элементами $B[i, j] = c[i]a[j] - a[i]c[j]$ и заметим, что

$$\langle a, x\rangle c - \langle c, x\rangle a = Bx.$$

Положим, далее, $g = \beta c - \xi a$. Покажем, что соотношения (2.9) можно представить в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} &\langle b, v_*\rangle - \langle g, x_*\rangle \geqslant 0, \\ &A^T v_* - B x_* = g, \quad v_* \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Действительно, (3.1) из (2.9) следует очевидным образом. Для доказательства обратного возьмем пару $\{v_*, x_*\}$, удовлетворяющую (3.1). По определению матрица B является кососимметричной, т. е. $B^T = -B$. В частности, $\langle Bx, x\rangle = 0$ при всех $x \in \mathbf{R}^N$. Учитывая (3.1), получаем

$$\langle g, x_*\rangle = \langle A^T v_*, x_*\rangle = \langle v_*, Ax_*\rangle \geqslant \langle b, v_*\rangle \geqslant \langle g, x_*\rangle.$$

Значит, $\langle b, v_*\rangle = \langle g, x_*\rangle$. Утверждение доказано.

Соотношения (3.1) линейны относительно v_* и x_*. Тем самым вопрос о разрешимости задачи дробно-линейного программирования (2.8) сводится к вопросу о совместности системы линейных неравенств и равенств

$$\begin{aligned} &\langle b, v\rangle - \langle g, x\rangle \geqslant 0, \\ &-A^T v + Bx = -g, \\ &Ax \geqslant b, \\ &v \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

На основании теоремы I.6.3 система (3.2) совместна тогда и только тогда, когда для любой тройки $\{\gamma, z[N], w[M]\}$, такой, что

$$\begin{aligned} &\gamma b - zA^T \leqslant 0, \\ &-\gamma g + zB + wA = 0, \\ &\gamma \geqslant 0, \quad w \geqslant 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

выполняется неравенство $-\langle g, z\rangle + \langle b, w\rangle \leqslant 0$. С учетом кососимметричности матрицы B условия (3.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &Az \geqslant \gamma b, \\ &Bz + \gamma g = A^T w, \\ &\gamma \geqslant 0, \quad w \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. Для того чтобы задача дробно-линейного программирования (2.8) была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы для любой пары $\{z, w\}$, такой, что

$$\begin{aligned} &Az \geqslant 0, \quad z \neq 0, \\ &Bz = A^T w, \quad w \geqslant 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

выполнялось неравенство $\langle g, z\rangle \geqslant \langle b, w\rangle$.

Другими словами, неравенство $\langle g, z\rangle \geqslant \langle b, w\rangle$ должно выполняться для любого рецессивного направления z, такого, что вектор Bz допускает представление $Bz = A^T w$, $w \geqslant 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна, ибо любой паре $\{z, w\}$, удовлетворяющей (3.5), соответствует тройка $\{0, z, w\}$, удовлетворяющая (3.4).

Достаточность. Возьмем произвольную тройку $\{\gamma, z, w\}$, удовлетворяющую (3.4), и покажем, что $\langle g, z\rangle \geqslant \langle b, w\rangle$. Возможны три случая:

1) $\gamma>0$. Согласно (3.4) имеем

$$\gamma \langle g, z\rangle = \langle A^T w, z\rangle = \langle w, Az\rangle \geqslant \gamma \langle w, b\rangle,$$

откуда и следует требуемое;

2) $\gamma=0$, $z=0$. Поскольку $A^T w=0$, $w\geqslant 0$, то, взяв произвольный план x_0, получим

$$\langle b, w\rangle \leqslant \langle Ax_0, w\rangle = \langle x_0, A^T w\rangle = 0 = \langle g, z\rangle,$$

что и требовалось доказать;

3) $\gamma=0$, $z\neq 0$. В этом случае неравенство $\langle g, z\rangle \geqslant \langle b, w\rangle$ выполняется по условию теоремы.

Теорема доказана.

Приведем пример, иллюстрирующий содержание теоремы 3.1. Рассмотрим задачу

$$x[2]/x[1] \to \min,$$
$$x[1]\geqslant 1, \quad x[2]\geqslant q.$$

Из геометрических соображений ясно, что эта задача разрешима при $q\leqslant 0$ и не имеет решения при $q>0$ (рис. 13). Получим тот же результат, опираясь на теорему 3.1. Имеем

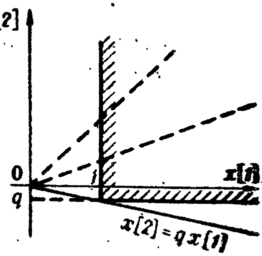


Рис. 13.

$$c=(0, 1), \quad a=(1, 0), \quad \xi=\beta=0, \quad g=0,$$
$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}1\\ q\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Запишем систему (3.5):

$$z\geqslant 0, \quad z\neq 0,$$
$$-z[2]=w[1], \quad z[1]=w[2],$$
$$w[1]\geqslant 0, \quad w[2]\geqslant 0.$$

Она эквивалентна соотношениям

$$z[2]=w[1]=0, \quad z[1]=w[2]>0.$$

Неравенство $\langle g, z\rangle \geqslant \langle b, w\rangle$ принимает вид $qw[2]\leqslant 0$. Оно выполняется при всех $w[2]>0$ тогда и только тогда, когда $q\leqslant 0$.

Отметим, что при $q>0$ задача не имеет решения, хотя целевая функция ограничена снизу (положительна) на множестве планов. Именно возможность такой ситуации отличает задачу дробно-линейного программирования от задачи линейного программирования.

Упражнения

3.1. Исследовать поведение дробно-линейной функции $f(x)=x[2]/x[1]$ в окрестности начала координат.

3.2. Указать, при каких значениях параметра q задача

$$\begin{aligned} &x[2]/x[1] \to \min, \\ &x[1] \geqslant 1, \\ -&qx[1] + x[2] \geqslant 1 - q \end{aligned}$$

имеет решение, а при каких — нет.

§ 4. СЛУЧАЙ НАЛИЧИЯ МИНИМУМА

Возьмем две точки x_0, x_1 из полупространства Q и рассмотрим отрезок, их соединяющий. Он состоит из точек $x(t)= =x_0+th$, где $h=x_1-x_0$ и $t\in[0, 1]$. На этом отрезке дробно-линейная функция f вида (2.1) превращается в дробно-линейную функцию действительного аргумента t

$$\theta(t):=f(x(t))=\frac{t\langle c, h\rangle+\langle c, x_0\rangle+\xi}{t\langle a, h\rangle+\langle a, x_0\rangle+\beta},$$

которая, как известно, либо строго монотонна, либо постоянна. Из сказанного вытекает, что при всех x_0, x_1 из Q и $t\in[0, 1]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &f(tx_1+(1-t)x_0)\leqslant \max\{f(x_0), f(x_1)\}, \\ &f(tx_1+(1-t)x_0)\geqslant \min\{f(x_0), f(x_1)\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

причем если $f(x_0)\neq f(x_1)$ и $t\in(0, 1)$, то неравенства (4.1) выполняются как строгие. Функции, удовлетворяющие этим условиям, называются строго квазимонотонными. Таким образом, дробно-линейная функция f является строго квазимонотонной на полупространстве Q.

Вернемся к задаче дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned} &f(x):=\frac{\langle c, x\rangle+\xi}{\langle a, x\rangle+\beta}\to \min, \\ &Ax\geqslant b. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Как и раньше, будем предполагать, что множество ее планов Ω непусто и $\Omega\subset Q$, т. е. $\langle a, x\rangle+\beta>0$ при всех $x\in Q$.

Теорема 4.1. Если Ω не содержит прямых и существует

$$\min_{x\in\Omega} f(x)=:\mu,$$

то найдется вершина Ω, в которой f принимает значение μ.

Доказательство. Воспользуемся представлением Ω в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся граней (см. § II.2):

$$\Omega = \bigcup \Omega(I).$$

Оптимальный план принадлежит какой-нибудь грани. Следовательно, существуют грани $\Omega(I)$, на которых

$$\min_{x \in \Omega(I)} f(x) = \mu.$$

Среди них выберем грань минимальной размерности. Пусть это будет $\Omega(I_*)$. Покажем, что $\dim \Omega(I_*) = 0$.

Допустим, рассуждая от противного, что $\dim \Omega(I_*) > 0$. Возьмем точку $x_1 \in \Omega(I_*)$, в которой $f(x_1) = \mu$, и проведем через нее прямую $x = x_1 + tz_1$, $-\infty < t < \infty$, лежащую в $\operatorname{aff} \Omega(I_*)$. В силу относительной открытости $\Omega(I_*)$ в $\operatorname{aff} \Omega(I_*)$ некоторый отрезок этой прямой, содержащий внутри себя точку x_1, будет лежать в $\Omega(I_*)$. На нем дробно-линейная функция f должна быть постоянной (иначе нашлись бы точки $x \in \Omega$, в которых $f(x) < \mu$). Но тогда f постоянна на всем пересечении рассматриваемой прямой с Ω.

По условию Ω не содержит прямых, поэтому на указанной прямой найдется точка x_0, не принадлежащая Ω и, тем самым, не принадлежащая $\Omega(I_*)$. В этом случае на отрезке $[x_0, x_1]$ имеется точка x_* из $\partial\Omega(I_*)$ (см. доказательство леммы II.2.2). Согласно (II.2.6) x_* принадлежит грани $\Omega(J)$, размерность которой меньше размерности $\Omega(I_*)$. К тому же $f(x_*) = f(x_1) = \mu$. Значит,

$$\min_{x \in \Omega(J)} f(x) = \mu.$$

Но это противоречит определению $\Omega(I_*)$.

Получили, что грань $\Omega(I_*)$ является вершиной Ω и на ней значение функции f равно μ. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если множество Ω ограничено, то по теореме Вейерштрасса функция f достигает минимального на Ω значения. Теорема 4.1 позволяет сделать важное дополнение: среди точек минимума имеются вершины Ω.

В связи с теоремой 4.1 приобретает интерес следующее утверждение. Рассмотрим вершину x_* множества Ω, и пусть $z_1^*, \ldots, z_r^*$ — направляющие векторы всех ребер Ω, выходящих из x_*.

Теорема 4.2. Для того чтобы вершина x_* была оптимальным планом задачи (4.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\delta_j^* := \langle c, z_j^* \rangle - f(x_*) \langle a, z_j^* \rangle \geqslant 0, \qquad j \in 1:r.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Согласно (2.5)

$$\langle f'(x_*), z_j^* \rangle = \delta_j^* / (\langle a, x_* \rangle + \beta). \tag{4.3}$$

Таким образом, δ_j^* лишь положительным множителем отличается от производной функции f по допустимому направлению $z_j^*/\|z_j^*\|$. Поскольку x_* — точка минимума функции f на Ω, то все δ_j^* должны быть неотрицательными.

Достаточность. Возьмем произвольный план x. По теореме II.3.2 его можно представить в виде

$$x = x_* + \sum_{j=1}^{r} \lambda[j]\, z_j^*,$$

где $\lambda[j] \geqslant 0$, $j \in 1:r$. Учитывая (2.3) и (4.3), получаем

$$(f(x) - f(x_*)) / \rho(x, x_*) = \langle f'(x_*), x - x_* \rangle =$$
$$= \sum_{j=1}^{r} \lambda[j] \langle f'(x_*), z_j^* \rangle = \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda[j]\, \delta_j^*\right) / (\langle a, x_* \rangle + \beta) \geqslant 0.$$

Теорема доказана.

Упражнения

4.1. Функция F, заданная на выпуклом множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, называется квазивыпуклой, если при всех x_0, x_1 из Ω и $t \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$F(tx_1 + (1-t)x_0) \leqslant \max\{F(x_0),\ F(x_1)\}.$$

Доказать, что функция F квазивыпукла на Ω тогда и только тогда, когда множество $G_\lambda = \{x \in \Omega \mid F(x) \leqslant \lambda\}$ выпукло при всех вещественных λ.

4.2. Квазивыпуклая функция F называется строго квазивыпуклой, если из условий $F(x_0) \neq F(x_1)$, $t \in (0, 1)$ следует, что

$$F(tx_1 + (1-t)x_0) < \max\{F(x_0),\ F(x_1)\}. \tag{4.4}$$

Построить пример квазивыпуклой функции, не являющейся строго квазивыпуклой. Построить пример функции, удовлетворяющей условию (4.4), но не являющейся квазивыпуклой.

4.3. Доказать, что локальный минимум строго квазивыпуклой функции будет и глобальным. Показать на примере, что для квазивыпуклой функции подобное утверждение, вообще говоря, неверно.

§ 5. СВЕДЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Перейдем в задаче (4.2) к новым переменным, полагая $x = w/\gamma$, $\gamma > 0$. После умножения числителя и знаменателя функции f, а также всех ограничений на γ получим задачу

$$\begin{gathered} F(w, \gamma) := \frac{\langle c, w \rangle + \xi\gamma}{\langle a, w \rangle + \beta\gamma} \to \min, \\ Aw - \gamma b \geqslant 0, \quad \gamma > 0. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Множество планов $\{w, \gamma\}$ задачи (5.1) обозначим Ω_0. Очевидно, что Ω_0 — конус и целевая функция F постоянна вдоль каждого из лучей $\{tw, t\gamma\}$, $t>0$. Поэтому множество значений функции F, а следовательно, и ее минимум не изменяется, если заменить конус Ω_0 таким его сечением гиперплоскостью, которое пересекает каждый луч конуса.

Согласно условию (2.6)

$$<a,w>+\beta\gamma>0 \ \forall \ \{w, \gamma\}\in\Omega_0.$$

Для любой точки $\{w_0, \gamma_0\}$ из Ω_0 найдется такое $t>0$, что точка $\{w, \gamma\}=\{tw_0, t\gamma_0\}$ будет удовлетворять уравнению

$$<a, w>+\beta\gamma=1.$$

Значит, гиперплоскость, определяемая этим уравнением, пересекает каждый луч конуса Ω_0. В результате (5.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &l(w, \gamma):=\langle c, w\rangle+\xi\gamma\to\min,\\ &\langle a, w\rangle+\beta\gamma=1,\\ &Aw-\gamma b\geqslant\mathbf{0}, \quad \gamma>0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Множество планов задачи (5.2) обозначим Ω_1.

Лемма 5.1. Задачи (4.2) и (5.2) эквивалентны.

Доказательство. Возьмем $x\in\Omega$ и положим

$$\begin{aligned} &w=x/(<a, x>+\beta),\\ &\gamma=1/(<a, x>+\beta). \end{aligned}$$

Пара $\{w, \gamma\}$ принадлежит Ω_1 и $l(w, \gamma)=f(x)$. Наоборот, плану $\{w, \gamma\}$ задачи (5.2) соответствует план $x=w/\gamma$ задачи (4.2), причем $f(x)=l(w, \gamma)$. Лемма доказана.

Задача (5.2) напоминает задачу линейного программирования, но не является таковой, поскольку неравенство в последнем ограничении строгое.

Лемма 5.2. В случае, когда Ω ограничено, множество планов задачи (5.2) не изменится, если неравенство $\gamma>0$ заменить на $\gamma\geqslant0$.

Доказательство. Следует установить, что условия

$$\begin{aligned} &<a, w>+\beta\gamma=1,\\ &Aw-\gamma b\geqslant0, \ \gamma=0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

несовместны. Допустим, рассуждая от противного, что пара $\{w_0, 0\}$ удовлетворяет (5.3). Тогда $w_0\neq0$ и $Aw_0\geqslant0$. Получили, что w_0 — рецессивное направление множества Ω. Но существование рецессивного направления противоречит ограниченности Ω. Лемма доказана.

Таким образом, при ограниченном Ω исходная задача (4.2) сводится к задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} &l(w, \gamma):=\langle c, w\rangle+\xi\gamma\to\min,\\ &\langle a, w\rangle+\beta\gamma=1,\\ &Aw-\gamma b\geqslant\mathbf{0}, \quad \gamma\geqslant0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Обратимся к случаю, когда множество Ω не ограничено. Тогда задача (5.4) является расширением задачи (5.2) за счет пар, удовлетворяющих условиям (5.3). Это соответствует добавлению к Ω его «несобственных элементов» — рецессивных направлений w, для которых $\langle a, w\rangle=1$.

Обозначим Ω_2 множество планов задачи (5.4).

Лемма 5.3. Справедливо равенство

$$\inf_{x\in\Omega} f(x)=\inf_{\{w,\ \gamma\}\in\Omega_2} l(w,\ \gamma). \tag{5.5}$$

Доказательство. Неравенство

$$\mu:=\inf_{x\in\Omega} f(x)\geqslant\inf_{\{w,\ \gamma\}\in\Omega_2} l(w,\ \gamma)$$

следует из леммы 5.1. Проверим обратное неравенство. Возьмем пару $\{w_0,\ \gamma_0\}$, принадлежащую Ω_2. Если $\gamma_0>0$, то, положив $x_1=w_0/\gamma_0$, получим $x_1\in\Omega$ и $l(w_0,\ \gamma_0)=f(x_1)\geqslant\mu$.

Пусть $\gamma_0=0$. Тогда $\langle a,\ w_0\rangle=1$ и $Aw_0\geqslant 0$. Возьмем любой план x_0 задачи (4.2). Заметим, что

$$\lim_{t\to+\infty} f(x_0+tw_0)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t\langle c,\ w_0\rangle+\langle c,\ x_0\rangle+\xi}{t\langle a,\ w_0\rangle+\langle a,\ x_0\rangle+\beta}=$$
$$=\langle c,\ w_0\rangle=l(w_0,\ \gamma_0). \tag{5.6}$$

Поскольку вектор x_0+tw_0 принадлежит Ω при всех $t\geqslant 0$, то $l(w_0,\ \gamma_0)\geqslant\mu$. Таким образом,

$$\inf_{\{w,\ \gamma\}\in\Omega_2} l(w,\ \gamma)\geqslant\mu.$$

Лемма доказана.

Замечание. Если доопределить f на несобственных элементах w_0 множества Ω, положив $f(w_0)=\langle c,\ w_0\rangle$, то получим, что так расширенная задача (4.2) эквивалентна задаче (5.4).

Теперь можно сделать основные выводы. Поскольку $\Omega\neq\varnothing$, то и $\Omega_2\neq\varnothing$. Допустим, что функция l ограничена снизу на Ω_2. Тогда задача (5.4) разрешима. Пусть $\{w_*,\ \gamma_*\}$ — ее оптимальный план. Если $\gamma_*>0$, то вектор $x_*=w_*/\gamma_*$ — решение задачи (4.2) и $\min_{x\in\Omega} f(x)=l(w_*,\ \gamma_*)$. Предположим, что $\gamma_*=0$ и не существует другого решения $\{w^*,\ \gamma^*\}$ задачи (5.4) с $\gamma^*>0$. Тогда функция f не достигает минимального на Ω значения, вектор w_* является рецессивным направлением множества Ω и согласно (5.5), (5.6) при всех $x\in\Omega$

$$\lim_{t\to+\infty} f(x+tw_*)=l(w_*,\ \gamma_*)=\inf_{x\in\Omega} f(x).$$

Если $\inf_{\{w,\ \gamma\}\in\Omega_2} l(w,\ \gamma)=-\infty$, то и $\inf_{x\in\Omega} f(x)=-\infty$.

Итак, в общем случае решение задачи дробно-линейного программирования (4.2) требует решения задачи линейного программирования (5.4) и последующей интерпретации полученных результатов.

Упражнения

5.1. Обозначим $K_0^{(2)}$ конус рецессивных направлений множества Ω_2. Доказать, что

$$K_0^{(2)} = \{\{h,\ 0\} \mid Ah \geqslant \mathbf{0},\quad h \neq \mathbf{0},\quad \langle a,\ h\rangle = 0\}.$$

5.2. Доказать, что если Ω не содержит прямых, то и Ω_2 не содержит прямых.

§ 6. ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ

Результаты предыдущего параграфа открывают путь к получению теоремы двойственности в дробно-линейном программировании.

В силу леммы 5.3 инфимумы (конечные или равные $-\infty$) в задачах (4.2) и (5.4) совпадают. Построим для задачи линейного программирования (5.4) двойственную задачу

$$\begin{gathered} \alpha \to \max, \\ \alpha a[N] + u[M] \times A[M,\ N] = c[N], \\ \alpha\beta - u[M] \times b[M] \leqslant \xi, \\ u[M] \geqslant \mathbf{0}[M]. \end{gathered} \tag{6.1}$$

Множество ее планов $\{u,\ \alpha\}$ обозначим G. Считаем, что $\Omega \neq \varnothing$; тогда и $\Omega_2 \neq \varnothing$. На основании теорем I.9.1 и I.9.3 заключаем, что имеет место одна из двух возможностей:

I) $G \neq \varnothing,\quad -\infty < \max\limits_{\{u,\ \alpha\} \in G} \alpha = \min\limits_{\{w,\ \gamma\} \in \Omega_2} g(w,\ \gamma) < +\infty$;

II) $G = \varnothing,\quad \inf\limits_{\{w,\ \gamma\} \in \Omega_2} g(w,\ \gamma) = -\infty$.

Заменяя в этой формулировке $\inf g$ (или $\min g$) на равную величину $\inf f$, получаем следующий результат.

Теорема 6.1. Имеет место одна из двух возможностей:

I) $G \neq \varnothing,\quad -\infty < \max\limits_{\{u,\ \alpha\} \in G} \alpha = \inf\limits_{x \in \Omega} f(x) < +\infty$;

II) $G = \varnothing,\quad \inf\limits_{x \in \Omega} f(x) = -\infty$.

Задача (6.1) называется двойственной к задаче (4.2), а теорема 6.1 — теоремой двойственности в дробно-линейном программировании. Следует учесть, что форма, в которой приведена теорема двойственности, связана с предположением о непустоте Ω.

Упражнение

6.1. Показать, что в задаче

$$x[2]/(x[1]+x[2]) \to \min,$$
$$x[1] \geqslant 0, \quad x[1]+x[2] \geqslant 1$$

целевая функция не ограничена снизу на множестве планов.

§ 7. РЕАЛИЗАЦИЯ ИНФИМУМА

По-прежнему рассматриваем задачу дробно-линейного программирования

$$f(x) := \frac{\langle c, x\rangle + \xi}{\langle a, x\rangle + \beta} \to \min, \quad Ax \geqslant b. \tag{7.1}$$

Считаем, что множество ее планов Ω непусто и содержится в полупространстве $Q = \{x \mid \langle a, x\rangle + \beta > 0\}$.

В этом параграфе проводится более тщательный анализ задачи (7.1) при следующих дополнительных предположениях:

(i) множество Ω не ограничено и не содержит прямых;

(ii) при любом h из конуса рецессивных направлений $K_0 = \{h \mid Ah \geqslant 0,\ h \neq 0\}$ скалярные произведения $\langle c, h\rangle$ и $\langle a, h\rangle$ одновременно в нуль не обращаются;

(iii) в K_0 имеется вектор h, на котором $\langle a, h\rangle > 0$.

Выясним, что дают эти предположения.

Лемма 7.1. Конус K_0 является непустым и выпуклым.

Доказательство. В проверке нуждается только такой факт: если h_0, h_1 принадлежат K_0, то вектор $th_1 + (1-t)h_0$ при всех $t \in (0, 1)$ отличен от нуля. Допустим, рассуждая от противного, что $t_0h_1 + (1-t_0)h_0 = 0$ при некотором $t_0 \in (0, 1)$. Тогда

$$h_1 = -((1-t_0)/t_0)h_0.$$

Согласно определению K_0 имеем $A(th_1) \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$. При $t < 0$ имеем $A(th_1) = -(t(1-t_0)/t_0)Ah_0 \geqslant 0$. Таким образом,

$$A(th_1) \geqslant 0 \quad \forall\, t \in (-\infty, \infty). \tag{7.2}$$

Возьмем любую точку $x_1 \in \Omega$. На основании (7.2) получим, что прямая $x = x_1 + th_1$, $-\infty < t < \infty$, принадлежит Ω. Но это противоречит условию (i).

Лемма доказана.

В силу леммы 2.2 существует вектор u_0, такой, что $u_0A = a$, $u_0 \geqslant 0$. Отсюда следует, что

$$\langle a, h\rangle = \langle u_0A, h\rangle = \langle u_0, Ah\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, h \in K_0. \tag{7.3}$$

Введем выпуклые конусы

$$\Gamma_+ = \{h \in K_0 \mid \langle a, h\rangle > 0\},$$
$$\Gamma_0^{(+)} = \{h \in K_0 \mid \langle a, h\rangle = 0, \quad \langle c, h\rangle > 0\},$$

$$\Gamma_0^{(-)} = \{h \in K_0 \mid \langle a, h\rangle = 0, \quad \langle c, h\rangle < 0\}.$$

Лемма 7.2. Справедливо представление

$$K_0 = \Gamma_+ \cup \Gamma_0^{(+)} \cup \Gamma_0^{(-)}, \tag{7.4}$$

причем $\Gamma_+ \neq \varnothing$, а $\Gamma_0^{(+)}$ и $\Gamma_0^{(-)}$ не могут быть непустыми одновременно.

Доказательство. Само представление (7.4) очевидно в силу (7.3) и условия (ii). Условие (iii) гарантирует непустоту Γ_+. Что же касается конусов $\Gamma_0^{(+)}$ и $\Gamma_0^{(-)}$, то пустота одного из них легко проверяется от противного. Действительно, если $h_0 \in \Gamma_0^{(+)}$, $h_1 \in \Gamma_0^{(-)}$, то на отрезке $[h_0, h_1]$ найдется вектор h_2, принадлежащий K_0 и удовлетворяющий равенствам $\langle a, h_2\rangle = 0$, $\langle c, h_2\rangle = 0$. Но это противоречит условию (ii). Лемма доказана.

При любых $x \in \Omega$ и $h \in K_0$ существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} f(x + th) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t\langle c, h\rangle + \langle c, x\rangle + \xi}{t\langle a, h\rangle + \langle a, x\rangle + \beta},$$

который не зависит от x. Обозначим его $\varphi(h)$. Имеем

$$\varphi(h) = \begin{cases} \langle c, h\rangle / \langle a, h\rangle, & h \in \Gamma_+, \\ +\infty, & h \in \Gamma_0^{(+)}, \\ -\infty, & h \in \Gamma_0^{(-)}. \end{cases}$$

В силу леммы 7.2 функция φ может принимать бесконечное значение только одного знака. Отметим также, что

$$\varphi(th) = \varphi(h) \quad \forall\, t > 0. \tag{7.5}$$

Определение строгой квазимонотонности, введенное в § 4, сохраняет силу для функций, допускающих бесконечные значения определенного знака.

Лемма 7.3. Функция φ является строго квазимонотонной на K_0.

Доказательство. Изучим поведение φ на отрезке $[h_0, h_1] \subset K_0$. Положим $h(t) = th_1 + (1-t)h_0$, $t \in [0, 1]$. Если $\langle a, h_0\rangle > 0$, $\langle a, h_1\rangle > 0$, то

$$\varphi(h(t)) = \frac{\langle c, h_0\rangle + t\langle c, h_1 - h_0\rangle}{\langle a, h_0\rangle + t\langle a, h_1 - h_0\rangle}.$$

Отсюда следует, что φ на $[h_0, h_1]$ либо строго монотонна, либо постоянна. Пусть $\langle a, h_0\rangle > 0$, $\langle a, h_1\rangle = 0$. Тогда при $t \in [0, 1)$

$$\varphi(h(t)) = \frac{t\langle c, h_1\rangle + (1-t)\langle c, h_0\rangle}{(1-t)\langle a, h_0\rangle} = \varphi(h_0) + \frac{t}{1-t}\,\frac{\langle c, h_1\rangle}{\langle a, h_0\rangle}$$

и $\lim\limits_{t\to 1-0} \varphi(h(t)) = \varphi(h_1)$. Получили, что φ строго монотонна на $[h_0, h_1]$. Если, наконец, $\langle a, h_0\rangle = \langle a, h_1\rangle = 0$, то согласно (*ii*) скалярное произведение $\langle c, h(t)\rangle$ сохраняет знак и потому $\varphi(h(t)) = +\infty$ или $\varphi(h(t)) = -\infty$ на $[0, 1]$. Лемма доказана.

Из нее следует, в частности, что

$$\varphi(th_1 + (1-t)h_0) \geqslant \min\{\varphi(h_0), \quad \varphi(h_1)\}$$

при всех h_0, h_1 из K_0 и $t \in [0, 1]$. По индукции легко проверяется справедливость неравенства

$$\varphi\left(\sum\nolimits_{j=1}^{q} \lambda[j] h_j\right) \geqslant \min_{j \in 1:q} \varphi(h_j) \tag{7.6}$$

для любых h_j из K_0 и неотрицательных $\lambda[j]$, в сумме равных единице. Согласно (7.5) можно утверждать, что (7.6) имеет место, когда коэффициенты $\lambda[j]$ неотрицательны и не все равны нулю.

Введем множество $\{x_i\}$, $i \in I$, всех вершин Ω и множество $\{z_j\}$, $j \in J$, направляющих векторов всех неограниченных ребер. Положим

$$f_0 = \min_{i \in I} f(x_i), \quad \varphi_0 = \min_{j \in J} \varphi(z_j).$$

Имеем $f_0 > -\infty$ и $\varphi_0 \geqslant -\infty$, так как не исключено, что $\varphi(z_j) = -\infty$ при некотором $j \in J$.

Обозначим Ω_0 выпуклую оболочку, натянутую на вершины x_i, $i \in I$.

Лемма 7.4. Справедливы равенства

$$f_0 = \min_{x \in \Omega_0} f(x), \quad \varphi_0 = \min_{h \in K_0} \varphi(h).$$

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$f(x) \geqslant f_0 \quad \forall x \in \Omega_0, \quad \varphi(h) \geqslant \varphi_0 \quad \forall h \in K_0.$$

Возьмем $x \in \Omega_0$. Тогда

$$x = \sum\nolimits_{i \in I} \alpha[i] x_i, \quad \alpha[i] \geqslant 0, \quad \sum\nolimits_{i \in I} \alpha[i] = 1.$$

Учитывая строгую квазимонотонность f на Q, получаем

$$f(x) = f\left(\sum\nolimits_{i \in I} \alpha[i] x_i\right) \geqslant \min_{i \in I} f(x_i) = f_0.$$

Возьмем $h \in K_0$. Согласно теореме II.3.1

$$h = \sum\nolimits_{j \in J} \lambda[j] z_j, \quad \lambda[j] \geqslant 0, \quad \sum\nolimits_{j \in J} \lambda[j] > 0.$$

Отсюда с учетом (7.6) следует, что

$$\varphi(h) = \varphi\left(\sum\nolimits_{j \in J} \lambda[j] z_j\right) \geqslant \min_{j \in J} \varphi(z_j) = \varphi_0.$$

Лемма доказана.

Лемма 7.5. Справедливо равенство

$$\min_{h \in K_0} \varphi(h) = \inf_{h \in \Gamma_+} \varphi(h). \tag{7.7}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 7.2. Если $\Gamma_0^{(-)} = \varnothing$, то (7.7) очевидно, поскольку $\varphi(h) = +\infty$ при $h \in \Gamma_0^{(+)}$.

Пусть $\Gamma_0^{(-)} \neq \varnothing$. Тогда $\min_{h \in K_0} \varphi(h) = -\infty$. Возьмем $h_0 \in \Gamma_+$, $h_1 \in \Gamma_0^{(-)}$ и положим $h(t) = th_1 + (1-t)h_0$, $t \in (0, 1)$. Имеем $\langle a, h(t) \rangle > 0$, так что $h(t) \in \Gamma_+$. Далее,

$$\varphi(h(t)) = \varphi(h_0) + \frac{t}{1-t} \frac{\langle c, h_1 \rangle}{\langle a, h_0 \rangle}.$$

Значит, $\lim_{t \to 1-0} \varphi(h(t)) = -\infty$. Получили, что $\inf_{h \in \Gamma_+} \varphi(h) = -\infty$. Лемма доказана.

Лемма 7.6. Величина φ_0 равна экстремальному значению целевой функции в задаче линейного программирования

$$\begin{gathered} \langle c, h \rangle \to \min, \\ \langle a, h \rangle = 1, \quad Ah \geqslant \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{7.8}$$

Доказательство немедленно следует из лемм 7.4 и 7.5.

Допустим, что φ_0 — конечная величина. Введем в рассмотрение задачу

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ Ax \geqslant b, \\ \langle c, x \rangle + \xi \leqslant \varphi_0 [\langle a, x \rangle + \beta]. \end{gathered} \tag{7.9}$$

Множество ее планов обозначим Ω_1.

Лемма 7.7. Если $\Omega_1 \neq \varnothing$, то $f_0 \leqslant \varphi_0$ и минимум в задаче (7.9) равен f_0.

Доказательство. Покажем, что

$$f_0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi_0 \quad \forall\, x \in \Omega_1. \tag{7.10}$$

Правое неравенство очевидно в силу определения Ω_1. Проверим левое.

Возьмем $x \in \Omega_1$. Если $x \in \Omega_0$, то согласно лемме 7.4 $f(x) \geqslant f_0$. Пусть $x \in \Omega_1 \setminus \Omega_0$. Воспользуемся представлением $x = x_0 + h_0$, где $x_0 \in \Omega_0$, $h_0 \in K_0$. Учитывая лемму 7.4, получаем

$$\lim_{t \to +\infty} f(x_0 + th_0) = \varphi(h_0) \geqslant \varphi_0 \geqslant f(x) = f(x_0 + h_0).$$

Значит, функция $\theta(t) = f(x_0 + th_0)$ не убывает на $[0, \infty)$. В частности,

$$f_0 \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + h_0) = f(x).$$

Соотношения (7.10) установлены.

Из них следует прежде всего, что $f_0 \leqslant \varphi_0$. Далее, обозначим x_* точку из Ω_0, в которой f принимает минимальное на Ω_0 значение. Поскольку $f(x_*) = f_0 \leqslant \varphi_0$, то $x_* \in \Omega_1$. На основании (7.10) заключаем, что $\min_{x \in \Omega_1} f(x) = f_0$. Лемма доказана.

Переходим к выводам. Положим $\mu = \min\{f_0, \varphi_0\}$. Очевидно, что $\mu \geqslant -\infty$.

Теорема 7.1. Справедливо равенство

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = \mu.$$

При этом, если $\mu = f_0$, то

$$\min_{x \in \Omega} f(x) = f_0 = f(x_i) \tag{7.11}$$

при некотором $i \in I$. Если же $\mu = \varphi_0 < f_0$, то инфимум f на Ω не достигается и

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = \varphi_0 = \varphi(z_j) \tag{7.12}$$

при некотором $j \in J$.

Доказательство. Пусть $x \in \Omega$. Воспользуемся представлением $x = x_0 + t_0 h_0$, где $x_0 \in \Omega_0$, $h_0 \in K_0$ и

$$t_0 = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0, \\ 1, & x \notin \Omega_0. \end{cases}$$

Функция $\theta(t) = f(x_0 + th_0)$ монотонна на $[0, \infty)$, следовательно,

$$f(x) \geqslant \min\{f(x_0), \varphi(h_0)\} \geqslant \min\{f_0, \varphi_0\} = \mu. \tag{7.13}$$

Если $\mu = f_0 \leqslant \varphi_0$, то $f(x) \geqslant f_0 = f(x_i)$ при некотором $i \in I$. Учитывая произвольность плана x, приходим к (7.11).

Пусть $\mu = \varphi_0 < f_0$. Тогда при некотором $j \in J$ и произвольном $x_1 \in \Omega$

$$\varphi_0 = \varphi(z_j) = \lim_{t \to +\infty} f(x_1 + tz_j).$$

Вектор $x_1 + tz_j$ принадлежит Ω при всех $t \geqslant 0$. Значит, $\varphi_0 \geqslant \inf_{x \in \Omega} f(x)$. Обратное неравенство следует из (7.13). Получили (7.12).

Если $\varphi_0 = -\infty$, то очевидно, что инфимум f на Ω не достигается. Не достигается он и тогда, когда $f_0 > \varphi_0 > -\infty$. Действительно, в противном случае на основании теоремы 4.1 нашлась бы вершина x_i, в которой $f(x_i) = \mu = \varphi_0$. Но это противоречит неравенству $f_0 > \varphi_0$.

Теорема доказана.

Теорема 7.1 позволяет утверждать, что задача дробно-линейного программирования (7.1) при выполнении условий (i)—(iii) в определенном смысле всегда имеет решение. Это либо вершина Ω, либо направляющий вектор неограниченного ребра.

Опишем схему решения задачи (7.1), основанную на предыдущих рассмотрениях. Вначале находим φ_0 как экстремальное значение целевой функции в задаче линейного программирования (7.8). Множество планов этой задачи согласно (*iii*) непусто. Если $\varphi_0=-\infty$, то $\inf_{x\in\Omega} f(x)=-\infty$.

Допустим, что φ_0 — конечная величина. Тогда обращаемся к задаче (7.9). Если множество ее планов Ω_1 пусто, то $f_0>\varphi_0$. В этом случае согласно теореме 7.1 инфимум f на Ω не достигается и $\inf_{x\in\Omega} f(x)=\varphi_0$.

Предположим, что $\Omega_1\neq\varnothing$. Согласно лемме 7.7 $f_0\leqslant\varphi_0$, а тогда по теореме 7.1 выполняются соотношения (7.11). Как найти оптимальную вершину?

Попытаемся применить к задаче (7.9) симплекс-метод. Напомним, что алгоритм симплекс-метода в линейном программировании разбивается на три этапа:

A) разыскание начальной вершины в множестве планов задачи;

B) повторяемый несколько раз переход из одной вершины в другую с уменьшением всякий раз значения целевой функции;

C) завершение работы алгоритма при достижении такой вершины x_*, что целевая функция не убывает вдоль каждого ребра, выходящего из x_*.

Этап A) не связан с характером целевой функции и может быть осуществлен для задачи (7.9) так же, как для задачи линейного программирования.

Этап B) сводится к последовательному повторению следующего шага: среди ребер, выходящих из текущей вершины x_i, выбрать такое, вдоль которого целевая функция убывает. В линейном программировании с этой целью вычислялись оценки ребер $\Delta_j=\langle c, z_j\rangle$. Оценка Δ_j являлась производной целевой функции по вектору z_j. В случае дробно-линейной функции f можно использовать аналогичные оценки (см. (2.5)):

$$\delta_j:=\langle f'(x_i), z_j\rangle(\langle a, x_i\rangle+\beta)=\langle c, z_j\rangle-f(x_i)\langle a, z_j\rangle.$$

Если $\delta_j<0$, то f убывает при движении из вершины x_i вдоль ребра l_j с направляющим вектором z_j. Допустим, что ребро l_j ограничено. Тогда по нему так же, как в линейном программировании, придем к соседней вершине с меньшим значением целевой функции.

Неприятности могли бы возникнуть, когда $\delta_j<0$ и ребро l_j не ограничено. Но в задаче (7.9) такая ситуация исключена. Действительно, в противном случае получили бы противоречивую цепочку соотношений

$$f(x_i)>\varphi(z_j)\geqslant\varphi_0\geqslant f(x_i).$$

При достижении вершины x_*, такой, что все ребра, выходящие из нее, имеют неотрицательные оценки, алгоритм завершает свою работу (этап С)). Согласно теореме 4.2 вершина x_* — оптимальный план задачи (7.9).

Покажем, что x_* — вершина Ω и оптимальный план задачи (7.1). В силу леммы 7.7 и теоремы 7.1 имеем

$$f(x_*) = f_0 = \min_{x \in \Omega} f(x).$$

Кроме того, x_* принадлежит Ω, значит, x_* — оптимальный план задачи (7.1).

По условию x_* — вершина Ω_1. Если $f_0 < \varphi_0$, то очевидно, что x_* — также вершина Ω. Рассмотрим случай $f_0 = \varphi_0$ и допустим, рассуждая от противного, что x_* не является вершиной Ω. Тогда x_* есть точка пересечения гиперплоскости $<c, x> + \xi = \varphi_0[<a, x> + \beta]$ с некоторым ребром Ω. При этом ребро не лежит в гиперплоскости, так что функция f на нем строго монотонна. Поскольку x_* есть относительно внутренняя точка ребра, то на ребре найдутся точки $x \in \Omega$, в которых $f(x) < f(x_*) = \varphi_0 = \mu$. Но это противоречит теореме 7.1. Таким образом, действительно x_* является вершиной Ω.

Упражнения

7.1. Показать, что при выполнении условия (i) проверка условия (ii) сводится к задаче линейного программирования.

7.2. Привести пример, показывающий, что задача (7.9) может иметь неограниченное множество планов.

7.3. Описать симплекс-метод решения задачи дробно-линейного программирования в случае ограниченного множества планов.

§ 8. ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧЕБЫШЕВСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Пусть n и m — натуральные числа; $T = \{t_1, \ldots, t_q\}$ — конечное множество точек из $\mathbf{R}^s$; $u_1 \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$ — функции, заданные на T. Введем дробно-рациональную функцию

$$H(x, y, t) = \frac{C(x, t)}{D(y, t)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x[j] u_j(t)}{\sum_{j=1}^{m} y[j] v_j(t)}.$$

Положим $z = \{x, y\}$ и рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} \eta(z) := \max_{t \in T} |H(z, t) - f(t)| \to \min, \\ \|y\|_\infty := \max_{j \in 1:m} |y[j]| = 1, \\ D(y, t) > 0 \quad \forall t \in T. \end{gathered} \tag{8.1}$$

Если обозначить G_1 сферу $\{y \mid \|y\|_\infty = 1\}$, а G — множество всех тех $y \in G_1$, которые порождают положительный на T полином

$D(y, t)$, то множество планов задачи (8.1) можно представить в виде $\Omega=\mathbf{R}^N\times G$, где $N=1:n$.

Будем считать, что выполнены следующие два условия:

I) $G\neq\varnothing$;

II) $\eta(z)>0$ при всех $z\in\Omega$.

Последнее означает, что $f(t)$ не совпадает тождественно с $H(z, t)$ на T ни при каком $z\in\Omega$.

Задача (8.1) называется дискретной чебышевской задачей дробно-рационального приближения. Получим для нее критерий оптимальности.

Возьмем $z_0=\{x_0, y_0\}$ из Ω, обозначим $\eta_0=\eta(z_0)$ и введем вспомогательную задачу

$$\Delta_0(z):=\max_{t\in T}\frac{|C(x, t)-f(t)D(y, t)|-\eta_0 D(y, t)}{D(y_0, t)}\to\min, \qquad (8.2)$$
$$\|y\|_\infty=1.$$

Множество ее планов имеет вид $\Omega_1=\mathbf{R}^N\times G_1$.

Лемма 8.1. Задача (8.2) эквивалентна задаче линейного программирования

$$\begin{gathered} w\to\min,\\ D(y_0, t_i)w+C(x, t_i)+(\eta_0-f(t_i))D(y, t_i)\geqslant 0, \quad i\in 1:q,\\ D(y_0, t_i)w-C(x, t_i)+(\eta_0+f(t_i))D(y, t_i)\geqslant 0, \quad i\in 1:q,\\ -1\leqslant y[j]\leqslant 1, \quad j\in 1:m. \end{gathered} \qquad (8.3)$$

Доказательство. Если z — план задачи (8.2), то пара $\{z, w\}$, где $w=\Delta_0(z)$, является планом задачи (8.3) и значения целевых функций на этих планах равны.

Наоборот, возьмем план $\{z, w\}$ задачи (8.3). В случае $w\geqslant 0$ ему можно сопоставить план z_0 задачи (8.2), на котором $\Delta_0(z_0)=0$. Пусть $w<0$. Тогда $y\neq\mathbf{0}$. Подберем постоянную $\gamma\geqslant 1$ так, чтобы $\|\gamma y\|_\infty=1$. Рассмотрим вектор $z_1=\gamma z$. Он удовлетворяет ограничению задачи (8.2) и

$$\Delta_0(z_1)\leqslant\gamma w\leqslant w.$$

Лемма доказана.

Лемма 8.2. Задача (8.2) имеет решение.

Доказательство. Очевидно, что множество планов Ω_1 задачи (8.2) непусто. Проверим, что целевая функция $\Delta_0(z)$ ограничена снизу на Ω_1.

Положим $\beta=\max_{t\in T}\sum_{j=1}^m|v_j(t)|$. Тогда

$$|D(y, t)|\leqslant\beta \quad \forall y\in G_1, \quad \forall t\in T. \qquad (8.4)$$

Согласно определению Δ_0 для всех $z\in\Omega_1$ имеем

$$\Delta_0(z) \geqslant \max_{t \in T} \{-\eta_0 D(y, t)/D(y_0, t)\} \geqslant -\eta_0 \beta/\varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_0 := \min_{t \in T} D(y_0, t) > 0$. Ограниченность снизу $\Delta_0(z)$ на Ω_1 установлена.

На основании леммы 8.1 получаем, что множество планов Ω_0 задачи линейного программирования (8.3) непусто и целевая функция ограничена снизу на Ω_0. По теореме I.4.2 задача (8.3) разрешима. Значит, разрешима и задача (8.2). Лемма доказана.

Введем обозначение $\Delta_0^* = \min_{z \in \Omega_1} \Delta_0(z)$. Очевидно, что $\Delta_0^* \leqslant \Delta_0(z_0) = 0$.

Теорема 8.1. Для того чтобы план z_0 задачи (8.1) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_0^* = 0$.

Доказательство. Необходимость. Возьмем оптимальный план $z_0^* = \{x_0^*, y_0^*\}$ задачи (8.2) и допустим, рассуждая от противного, что $\Delta_0(z_0^*) = \Delta_0^* < 0$. Тогда тем более

$$\max_{t \in T} \{-\eta_0 D(y_0^*, t)/D(y_0, t)\} < 0,$$

откуда с учетом условия II) следует, что $D(y_0^*, t) > 0$ при всех $t \in T$. Равенство $\|y_0^*\|_\infty = 1$ также выполнено. Значит, z_0^* принадлежит Ω.

Вернемся к неравенству $\Delta_0(z_0^*) < 0$ и перепишем его в эквивалентном виде

$$|H(z_0^*, t) - f(t)| - \eta_0 < 0 \quad \forall t \in T.$$

Получили, что $\eta(z_0^*) < \eta_0$. Но это противоречит оптимальности z_0.

Достаточность. Допустим, вопреки утверждению, что существует вектор $z^* = \{x^*, y^*\}$ из Ω, на котором $\eta(z^*) < \eta_0$. В этом случае $|H(z^*, t) - f(t)| - \eta_0 < 0$ при всех $t \in T$. Согласно определению Ω имеем

$$\Delta_0(z^*) = \max_{t \in T} \left\{[|H(z^*, t) - f(t)| - \eta_0] \frac{D(y^*, t)}{D(y_0, t)}\right\} < 0.$$

Тем более $\Delta_0^* < 0$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Опишем метод решения задачи (8.1). Пусть имеется k-е приближение $z_k = \{x_k, y_k\}$ из Ω. Положим $\eta_k = \eta(z_k)$ и рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta_k(z) := \max_{t \in T} \frac{|C(x, t) - f(t) D(y, t)| - \eta_k D(y, t)}{D(y_k, t)} \to \min,$$
$$\|y\|_\infty = 1.$$

Согласно лемме 8.2 эта задача имеет решение. Обозначим его z_k^*, и пусть $\Delta_k^* = \Delta_k(z_k^*)$. Если $\Delta_k^* = 0$, то по теореме 8.1 вектор z_k является оптимальным планом задачи (8.1). Процесс заканчивается. В противном случае (когда $\Delta_k^* < 0$) переходим к очередному приближению $z_{k+1} = z_k^*$. Так же, как при доказательстве необходимости в теореме 8.1, проверяется, что z_{k+1} принадлежит Ω и $\eta_{k+1} := \eta(z_{k+1}) < \eta_k$.

Выбрав в качестве начального приближения произвольный вектор z_0 из Ω, построим описанным методом последовательность $\{z_k\}$. Если она конечная, то последний ее элемент по построению является оптимальным планом задачи (8.1). Предположим, что последовательность $\{z_k\}$ бесконечная. Введем обозначение

$$\eta_* = \inf_{z \in \Omega} \eta(z).$$

Теорема 8.2 (о сходимости метода). Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{k \to \infty} \eta_k = \eta_*.$$

Доказательство. Последовательность $\{\eta_k\}$ монотонно убывает и ограничена снизу числом $\eta_* \geqslant 0$, поэтому она имеет предел η^*. Требуется установить, что $\eta^* = \eta_*$.

Допустим, рассуждая от противного, что $\eta^* > \eta_*$. Тогда $\eta_k \geqslant \eta^*$ при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$, и существует вектор $z^+ = \{x^+, y^+\}$ из Ω, на котором $\eta^+ := \eta(z^+) < \eta^*$.

Согласно (8.4) имеем

$$\Delta_k(z^+) = \max_{t \in T} \left\{ [\,|H(z^+, t) - f(t)| - \eta_k] \frac{D(y^+, t)}{D(y_k, t)} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant -[\eta_k - \eta^+] \min_{t \in T} \{D(y^+, t)/D(y_k, t)\} \leqslant -\varepsilon^+ (\eta_k - \eta^+)/\beta,$$

где $\varepsilon^+ = \min_{t \in T} D(y^+, t)$. Поскольку $z_{k+1} = z_k^*$, то

$$\max_{t \in T} \left\{ [\,|H(z_{k+1}, t) - f(t)| - \eta_k] \frac{D(y_{k+1}, t)}{D(y_k, t)} \right\} = \Delta_k^* \leqslant$$
$$\leqslant \Delta_k(z^+) \leqslant -\varepsilon^+ (\eta_k - \eta^+)/\beta. \tag{8.5}$$

В частности, $-\eta_k D(y_{k+1}, t)/D(y_k, t) \leqslant -\varepsilon^+ (\eta_k - \eta^+)/\beta$, откуда следует, что

$$D(y_{k+1}, t) \geqslant [\varepsilon^+ (1 - \eta^+/\eta^*)/\beta]\, D(y_k, t) \qquad \forall t \in T.$$

Положив $\alpha = \min\{1/2, \varepsilon^+ (1 - \eta^+/\eta^*)/\beta\}$, получим

$$D(y_{k+1}, t) \geqslant \alpha D(y_k, t) \qquad \forall t \in T. \tag{8.6}$$

Вернемся к неравенству (8.5) и заметим, что при всех $t \in T$

$$|H(z_{k+1},\ t)-f(t)|-\eta_k\leqslant-\varepsilon^+(\eta^*-\eta^+)/\beta\cdot\min_{t\in T}\frac{D(y_k,\ t)}{D(y_{k+1},\ t)}.$$

Значит,

$$\eta_k-\eta_{k+1}\geqslant\varepsilon^+(\eta^*-\eta^+)/\beta\cdot\min_{t\in T}\{D(y_k,\ t)/D(y_{k+1},\ t)\}. \qquad (8.7)$$

Обозначим t_k точку из T, в которой отношение $D(y_k,\ t)/D(y_{k+1},\ t)$ достигает минимального значения. Поскольку $\eta_k-\eta_{k+1}\to 0$, то согласно (8.7) при больших k

$$D(y_k,\ t_k)/D(y_{k+1},\ t_k)\leqslant\alpha^q \qquad (8.8)$$

(напомним, что $q=|T|$). Объединяя (8.6) и (8.8), имеем

$$\Pi_{i=1}^q D(y_{k+1},\ t_i)=D(y_{k+1},\ t_k)\,\Pi_{i\in 1:q\setminus\{k\}}D(y_{k+1},\ t_i)\geqslant$$

$$\geqslant(1/\alpha)\,\Pi_{i=1}^q D(y_k,\ t_i)\geqslant 2\Pi_{i=1}^q D(y_k,\ t_i).$$

Получили, что числовая последовательность $d_k=\Pi_{i=1}^q D(y_k, t_i)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, стремится к $+\infty$. Но это противоречит неравенству $d_k\leqslant\beta^q$. Теорема доказана.

Согласно лемме 8.1 реализация данного метода сводится к решению последовательности задач линейного программирования.

Упражнения

8.1. Указать критерий непустоты множества G.

8.2. Привести пример дискретной чебышевской задачи дробно-рационального приближения, не имеющей решения.

ДОБАВЛЕНИЕ

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ КУБИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Исследование любой математической задачи, в которой ищется какой-то объект, нельзя считать законченным, если не доказано существование решения. Такое доказательство может служить подтверждением основательности математической модели, достаточного ее соответствия действительности. Сказанное остается верным, даже если в реальной задаче, послужившей источником для математической, существование решения представляется очевидным из «физических соображений».

В данной книге теоремы существования минимума установлены для всех классов экстремальных задач, которые в ней рассматриваются. В качестве добавления приведем один новый результат о существовании решения экстремальной задачи в евклидовом пространстве при линейных ограничениях.

Теорема. Пусть $f(x)$ есть полином степени $r \leqslant 3$ в $\mathbf{R}^N$, Ω — непустое выпуклое многогранное множество в $\mathbf{R}^N$ и $\mu = \inf_{x \in \Omega} f(x)$. Тогда справедливо одно из следующих двух утверждений:

1) $\mu > -\infty$ и в Ω существует такая точка x_*, что $f(x_*) = \mu$;

2) $\mu = -\infty$ и существует такой луч $x = x_0 + th$, $t \geqslant 0$, содержащийся в Ω, что $\lim_{t \to +\infty} f(x_0 + th) = -\infty = \mu$.

Перед тем как перейти к доказательству, сделаем несколько замечаний. При $r = 1$ первое утверждение теоремы содержится в теореме I.4.2. При $r = 2$ первое утверждение при дополнительном предположении выпуклости f доказано в теореме III.9.1. Таким образом, сформулированная теорема даже для полиномов второй степени существенно дополняет результаты, приведенные в книге.

Совсем иная ситуация имеет место при $r \geqslant 4$, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример. Пусть $\Omega = \{x = (x[1], \ x[2]) \mid x[1] \geqslant 0, \ x[2] \geqslant 0\}$ и

$$f(x) = (1 - x[1]\, x[2])^2 + (x[1])^r.$$

Ясно, что $f(x) > 0$ в Ω. Вместе с тем $\inf_{x \in \Omega} f(x) = 0$. Действительно, $f(x) = (x[1])^r$ при $x[1] > 0$, $x[2] = 1/x[1]$, а величину $(x[1])^r$ можно сделать сколь угодно малой за счет малости $x[1]$. Значит, утверждение 1) ложно для данных, приведенных в настоящем примере. Утверждение 2) также ложно, поскольку $\mu = 0 > -\infty$.

Таким образом, случай $r = 3$ является в некотором смысле пограничным, что повышает интерес к доказываемой теореме.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по размерности Ω. При $\dim \Omega = 1$ теорема очевидным образом верна. Пусть ее справедливость установлена при $\dim \Omega \leqslant n - 1$.

Рассмотрим выпуклое многогранное множество Ω, для которого $\dim \Omega = n$. Не нарушая общности, будем считать, что $0 \in \Omega$. Тогда $\operatorname{aff} \Omega$ есть подпространство $\mathbf{R}^N$, и, снова не нарушая общности, можно принять, что aff Ω совпадает с $\mathbf{R}^N$.

Лемма. Если в Ω существует минимизирующая последовательность $\{x_k\}$ для f, принадлежащая $\partial\Omega$, то верно одно из двух утверждений 1) или 2).

Доказательство леммы. Так как граница Ω совпадает с относительной границей, то в соответствии с формулой (II.2.6)

$$\partial\Omega = \bigcup \omega_i,$$

где объединяются непустые грани Ω с размерностями $\dim \omega_i < \dim \Omega$. В силу замкнутости $\partial\Omega$ справедлива также формула

$$\partial\Omega = \bigcup \overline{\omega}_i,$$

где $\overline{\omega}_i$ есть замыкание ω_i. Каждое $\overline{\omega}_i$ является выпуклым многогранным множеством. Рассуждая от противного, нетрудно доказать, что $\dim \overline{\omega}_i = \dim \omega_i$, и потому $\dim \overline{\omega}_i < \dim \Omega = n$.

Из последовательности $\{x_k\}$ можно выделить частичную подпоследовательность $\{x_{k_s}\}$, принадлежащую одному из множеств $\overline{\omega}_i$, скажем, $\overline{\omega}_0$. По индуктивному предположению справедливо утверждение 1) или 2) с заменой Ω на $\overline{\omega}_0$. Остается заметить, что если $x_* \in \overline{\omega}_0$, то $x_* \in \Omega$; если луч содержится в $\overline{\omega}_0$, то он содержится и в Ω. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $\{x_k\}$ — минимизирующая последовательность для f в Ω. Если $f(0) = \mu$, то справедливо утверждение 1) при $x_* = 0$. Поэтому дальше предполагаем, что $f(0) > \mu$. Тогда для k достаточно больших $f(0) > f(x_k)$.

Введем множества

$$B_k = \{x \in \Omega \mid f(x) \leqslant f(x_k)\}.$$

Это непустые замкнутые множества, не содержащие точки 0. У каждого из них существует точка y_k, ближайшая к нулю. Поскольку $f(y_k) \leqslant f(x_k)$, то последовательность $\{y_k\}$ также минимизирующая. Чтобы упростить обозначения, предположим, что последовательность $\{y_k\}$ совпадает с $\{x_k\}$. В этом случае из условий $x \in \Omega$, $\|x\| < \|x_k\|$ следует строгое неравенство $f(x) > f(x_k)$.

Если последовательность $\{x_k\}$ ограничена, то, не теряя общности, можно предположить, что существует предел $x_* = \lim x_k$. В силу непрерывности f получим $f(x_*) = \lim f(x_k) = \mu$, т. е. справедливо утверждение 1). Аналогичная ситуация возникает, когда $\{x_k\}$ содержит ограниченную подпоследовательность. Поэтому в дальнейшем предполагается, что $\lim \|x_k\| = +\infty$.

Если среди элементов последовательности $\{x_k\}$ имеется бесконечно много принадлежащих $\partial\Omega$, то, как показывает лемма, верно утверждение 1) или 2). Остается рассмотреть случай, когда, начиная с некоторого места, все точки x_k являются внутренними для Ω.

Можно считать, что $f(x_k) > f(x_{k+1})$ при $k = 1, 2, \ldots$ Не нарушая общности, допускаем также, что векторы $h_k = x_k / \|x_k\|$ сходятся, т. е. существует предел $h_* = \lim h_k$, $\|h_*\| = 1$.

Проведенный анализ дает возможность продолжить доказательство теоремы при следующих предположениях:

$$\begin{gathered}
\textit{все точки } x_k,\ k = 1, 2, \ldots, \textit{ лежат внутри } \Omega; \\
x_k = t_k h_k, \quad \|h_k\| = 1, \quad t_k \to +\infty, \\
h_k \to h_*, \quad \|h_*\| = 1, \quad \|h_k - h_*\| < 1; \\
f(x_k) > f(x_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots; \quad f(x_k) \to \mu; \\
\textit{из условий } x \in \Omega,\ \|x\| < \|x_k\| \textit{ следует } f(x) > f(x_k).
\end{gathered} \tag{1}$$

Так как x_k — внутренняя точка Ω, то найдется $\tau_k \in (0, t_k)$, такое, что $x_k - \tau_k h_* \in \Omega$. Имеем оценку

$$\|x_k - \tau_k h_*\| = \|t_k h_k - \tau_k h_*\| \leqslant (t_k - \tau_k)\|h_k\| + \tau_k \|h_k - h_*\| < (t_k - \tau_k) + \tau_k = t_k = \|x_k\|.$$

В силу (1) получаем

$$f(x_k-\tau_k h_*)>f(x_k). \tag{2}$$

Докажем, что h_* есть рецессивное направление для Ω. Достаточно установить, что при любом $t>0$ точка th_* принадлежит Ω. Зафиксируем $t>0$. При k достаточно большом $t<t_k$, и потому $th_k\in\Omega$. Переходя к пределу при $k\to+\infty$ и учитывая замкнутость Ω, получаем требуемое включение $th_*\in\Omega$. Таким образом, при каждом k луч $x=x_k+th_*$, $t\geqslant 0$, содержится в Ω.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_k(t)=f(x_k+th_*);\quad -\infty<t<+\infty.$$

Согласно (2) эта функция (полином степени не выше трех) не является постоянной, и, следовательно, при $t\to+\infty$ ее значение стремится к бесконечному пределу того или иного знака. Если $\lim_{t\to+\infty}\varphi_k(t)=-\infty$ хотя бы при одном значении k, то справедливо утверждение 2). Поэтому в дальнейшем предполагается, что

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi_k(t)=+\infty \tag{3}$$

при всех $k=1, 2, \dots$

Согласно (3) найдется такое положительное число λ_k, что

$$f(x_k+\lambda_k h_*)=\varphi_k(\lambda_k)>f(x_k). \tag{4}$$

Зафиксируем на время k и положим

$$g_{mk}=(x_m-x_k)/\|x_m-x_k\|,\quad m>k;$$
$$\psi_m(t)=f(x_k+tg_{mk}),\quad -\infty<t<+\infty.$$

Луч $x=x_k+tg_{mk}$, $t\geqslant 0$, может не содержаться в Ω.

Имеем

$$\lim_{m\to\infty} g_{mk}=\lim_{m\to\infty} x_m/\|x_m\|=h_*.$$

Учитывая (2) и (4), получаем

$$\lim_{m\to\infty}\psi_m(-\tau_k)=\lim_{m\to\infty} f(x_k-\tau_k g_{mk})=f(x_k-\tau_k h_*)>f(x_k)=\psi_m(0),$$
$$\lim_{m\to\infty}\psi_m(\lambda_k)=f(x_k+\lambda_k h_*)>f(x_k)=\psi_m(0).$$

Вместе с тем

$$\psi_m(\|x_m-x_k\|)=f(x_m)<f(x_k)=\psi_m(0).$$

Отметим, что при достаточно большом m выполняется неравенство $\|x_m-x_k\|>\lambda_k$.

Таким образом, при m достаточно большом $-\tau_k<0<\lambda_k<\|x_m-x_k\|$ и $\psi_m(-\tau_k)>\psi_m(0)$, $\psi_m(\lambda_k)>\psi_m(0)$, $\psi_m(\|x_m-x_k\|)<\psi_m(0)$. Полином третьей степени ψ_m имеет локальный минимум в интервале $(-\tau_k, \lambda_k)$ и локальный максимум в $(0, \|x_m-x_k\|)$. Более двух стационарных точек полином третьей степени иметь не может, и потому $\psi_m(t)$ при $t\geqslant\|x_m-x_k\|$ строго убывает. Отсюда следует, что $\lim_{t\to+\infty}\psi_m(t)=-\infty$.

Зафиксируем достаточно большое $m=m_k>k$. Если луч $x=x_k+tg_{m_k k}$, $t\geqslant 0$, содержится в Ω, то справедливо утверждение 2). Предположим, что этот луч пересекается с $\partial\Omega$ при $t=\gamma_k$. Так как точка $x_{m_k}=x_k+\|x_{m_k}-x_k\|g_{m_k k}$ принадлежит Ω, то $\gamma_k\geqslant\|x_{m_k}-x_k\|$. Значит,

$$(x_k+\gamma_k g_{m_k k})=\psi_{m_k}(\gamma_k)\leqslant\psi_{m_k}(\|x_{m_k}-x_k\|)<\psi_{m_k}(0)=f(x_k).$$

Получили минимизирующую последовательность $z_k=x_k+\gamma_k g_{m_k k}$, $k=1, 2, \dots$ Поскольку все z_k принадлежат $\partial\Omega$, то применима лемма. Теорема доказана.

Замечание. Анализ приведенного доказательства показывает, что в нем используются лишь следующие свойства полинома третьей степени $f(x)$:

а) функция $f(x)$ непрерывна в $\mathbf{R}^N$;

б) при любых x_0, x_1 из $\mathbf{R}^N$ функция одной переменной $\varphi(t)=f(x_0+t(x_1-x_0))$ либо постоянна на $(-\infty, +\infty)$, либо имеет на $(-\infty, +\infty)$ не более двух локальных экстремумов, и существует $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)$, равный $+\infty$ или $-\infty$.

Таким образом, теорема остается справедливой, если полином степени $r\leqslant 3$ заменить произвольной функцией f, обладающей свойствами а), б).

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава I

3.1. Возьмем план первой задачи $x_0 \in P$ и положим $u_0 = \max_{i \in I} F_i(x_0)$. Тогда $\{x_0, u_0\}$ — план второй задачи и $\Phi(x_0) = u_0$.

Возьмем план второй задачи $\{x_0, u_0\}$. Очевидно, что x_0 — план первой задачи и $\Phi(x_0) := \max_{i \in I} F_i(x_0) \leqslant u_0$.

Полезно отметить, что для оптимального плана второй задачи $\{x_*, u_*\}$ выполняется соотношение $u_* = \max_{i \in I} F_i(x_*)$.

3.2. Пусть $x \in P$. Положим $w_i = f_i(x)$, $u_i = (|w_i| + w_i)/2$, $v_i = (|w_i| - w_i)/2$. Очевидно, что $f_i(x) = u_i - v_i$, $u_i \geqslant 0$, $v_i \geqslant 0$ и

$$\sum\nolimits_{i \in I}(u_i + v_i) = \sum\nolimits_{i \in I} |f_i(x)|.$$

Наоборот, если $\{x, \{u_i\}, \{v_i\}\}$ — план второй задачи, то x — план первой и $\sum_{i \in I} |f(x)| \leqslant \sum_{i \in I}(u_i + v_i)$.

4.2. Имеются лишь два базисных плана $x_1 = (1, 1, 0)$ и $x_2 = (0, 0, 1)$. Оптимальным является второй.

5.1. Пусть $\|x_0\| < \delta$, $\|x_1\| < \delta$. Тогда при $t \in [0, 1]$

$$\|tx_1 + (1-t)x_0\| \leqslant t\|x_1\| + (1-t)\|x_0\| < \delta,$$

что и доказывает выпуклость U_δ.

5.3. Рассмотреть конусы

$$K_1 = \{w = (x, y, z) \mid x = 0,\ y \leqslant 0,\ z = 0\},$$
$$K_2 = \{w = (x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leqslant 2zy,\ y \leqslant 0\}$$

и показать, что

$$K_1 + K_2 = \{w \mid z > 0\} \cup \{w \mid x = 0,\ z = 0\}.$$

5.4. Допустим, что конус $K = K_1 + \ldots + K_p$ не является замкнутым. Тогда существует нетривиальное представление нуля. Действительно, по условию найдется последовательность $\{z_k\}$ точек из K, сходящаяся к $z_* \notin K$. Имеем

$$z_k = y_1^{(k)} + \ldots + y_p^{(k)}, \qquad (1)$$

где $y_i^{(k)} \in K_i$. Покажем, что числовая последовательность $\gamma_k = \sum_{i=1}^{p} \| y_i^{(k)} \|$ неограничена. В противном случае, переходя к сходящимся подпоследовательностям $y_i^{(k_s)} \to y_i^*$, получаем $z_* = y_1^* + \ldots + y_p^* \in K$, ибо $y_i^* \in K_i$ в силу замкнутости K_i. Но это противоречит условию $z_* \notin K$. Итак $\{\varphi_k\}$ — неограниченная последовательность. Пусть для простоты $\gamma_k \to \infty$. Положим $x_i^{(k)} = y_i^{(k)}/\gamma_k$. Согласно (1)

$$x_1^{(k)} + \ldots + x_p^{(k)} = z_k/\gamma_k, \tag{2}$$

причем

$$\sum_{i=1}^p \| x_i^{(k)} \| = 1. \tag{3}$$

Переходя к сходящимся подпоследовательностям $x_i^{(k_j)} \to x_i$, на основании (2), (3) получаем

$$x_1 + \ldots + x_p = 0, \quad \sum_{i=1}^p \| x_i \| = 1.$$

Остается отметить, что $x_i \in K_i$ при всех $i \in 1:p$.

5.5. Нетрудно проверить, опираясь на теорему 5.4, что

$$\left(\sum_{i=1}^p K_i^+\right)^+ = \bigcap_{i=1}^p K_i.$$

Поэтому

$$\left(\bigcap_{i=1}^p K_i\right)^+ = \left(\sum_{i=1}^p K_i^+\right)^{++} = \sum_{i=1}^p K_i^+.$$

6.1. Пусть при некотором x_0 выполняется неравенство $Ax_0 > b$. Возьмем любой ненулевой вектор u, удовлетворяющий условиям $uA = 0$, $u \geqslant 0$ (если таких векторов не существует, то доказывать нечего). В этом случае

$$\langle u, b \rangle < \langle u, Ax_0 \rangle = \langle uA, x_0 \rangle = 0.$$

Предположим теперь, что система $Ax > b$ несовместна. Тогда при всех натуральных k несовместна система $Ax \geqslant b + \mathbf{e}/k$, где $\mathbf{e} = \mathbf{e}[M]$ — вектор, все компоненты которого равны единице. По теореме Фань-Цзы найдутся неотрицательные векторы u_k, удовлетворяющие системе линейных уравнений $uA = \mathbf{0}$ и такие, что $\langle u_k, b + \mathbf{e}/k \rangle > 0$. Можно считать, что $\|u_k\| = 1$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ Выделяя из $\{u_k\}$ сходящуюся подпоследовательность $u_{k_s} \to u_*$, в пределе получаем $u_* A = 0$, $u_* \geqslant 0$, $\|u_*\| = 1$ и $\langle u_*, b \rangle \geqslant 0$, что противоречит исходному условию.

6.2. Если исходная система несовместна, то несовместна и такая система:

$$\begin{aligned} A[M_0, N] \times x[N] &\geqslant \mathbf{e}[M_0], \\ A[M_1, N] \times x[N] &\geqslant \mathbf{0}[M_1], \\ A[M_2, N] \times x[N] &= \mathbf{0}[M_2], \end{aligned}$$

где $\mathbf{e}[M_0]$ — вектор, все компоненты которого равны единице. Существование требуемого $u[M]$ следует теперь из теоремы 6.3.

Достаточность легко доказывается от противного. Действительно, если x_0 удовлетворяет исходной системе и существует вектор u_0 со свойствами $u_0 A = 0$, $u_0[M_0] \geqslant \mathbf{0}[M_0]$, $u_0[M_0] \neq \mathbf{0}[M_0]$, $u_0[M_1] \geqslant \mathbf{0}[M_1]$, то

$$\begin{aligned} 0 = \langle u_0 A, x_0 \rangle = \langle u_0, Ax_0 \rangle = u_0[M_0] \times (A[M_0, N] \times x_0[N]) + \\ + u_0[M_1] \times (A[M_1, N] \times x_0[N]) > 0, \end{aligned}$$

что невозможно.

6.3. Рассмотрим систему

$$Ax \geqslant \mathbf{e}_i, \quad x \geqslant 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{e}_i$ — i-й орт, $i \in N$. Возможны два случая.

I. Система (4) имеет решение y_i. Тогда $Ay_i + y_i \geqslant \mathbf{e}_i$.

II. Система (4) несовместна. По теореме 6.3 найдется вектор y_i, удовлетворяющий условиям $y_i A \leqslant 0$, $y_i \geqslant 0$, $\langle y_i, \mathbf{e}_i \rangle > 0$. В силу кососимметричности матрицы A неравенство $y_i A \leqslant \mathbf{0}$ эквивалентно $Ay_i \geqslant \mathbf{0}$. Поэтому $Ay_i + y_i \geqslant \mathbf{0}$, причем i-я компонента вектора, стоящего слева, положительна.

Нетрудно понять, что вектор $x_0 = \sum_{i \in N} y_i$ является требуемым.

7.1. Решение задачи (7.4) можно заменить решением системы

$$\begin{aligned}
&\langle c, x\rangle - \langle b, u\rangle = 0,\\
&A[M_1, N] \times x[N] \geqslant b[M_1],\\
&A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2],\\
&u[M] \times A[M, N_1] \leqslant c[N_1],\\
&u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2],\\
&x[N_1] \geqslant \mathbf{0}[N_1], \; u[M] \geqslant \mathbf{0}[M_1].
\end{aligned}$$

8.1. Необходимость. Имеем

$$\sup_{u\in\Gamma} L(x_*, u) = L(x_*, u_*) = \inf_{x\in K} L(x, u_*). \tag{5}$$

Согласно (5) при любом $x \in K$

$$\sup_{u\in\Gamma} L(x, u) \geqslant L(x, u_*) \geqslant L(x_*, u_*) = \sup_{u\in\Gamma} L(x_*, u),$$

поэтому
$$\min_{x\in K}\sup_{u\in\Gamma} L(x, u) = \sup_{u\in\Gamma} L(x_*, u).$$

Аналогично показываем, что

$$\max_{u\in\Gamma}\inf_{x\in K} L(x, u) = \inf_{x\in K} L(x, u_*).$$

Остается воспользоваться равенством

$$\sup_{u\in\Gamma} L(x_*, u) = \inf_{x\in K} L(x, u_*).$$

Достаточность. Поскольку

$$L(x_*, u_*) \leqslant \sup_{u\in\Gamma} L(x_*, u) = \min_{x\in K}\sup_{u\in\Gamma} L(x, u) =$$
$$= \max_{u\in\Gamma}\inf_{x\in K} L(x, u) = \inf_{x\in K} L(x, u_*) \leqslant L(x_*, u_*),$$

то справедливы соотношения (5), равносильные (8.1).

8.3. Имеем

$$\inf_{x\in K} L(x, u) = \inf_{x\in K}\{\langle b, u\rangle + \langle c - uA, x\rangle\} =$$
$$= \langle b, u\rangle + \inf_{x\in K}\langle c - uA, x\rangle = \begin{cases} \langle b, u\rangle, & \text{если } u \in \Lambda,\\ -\infty, & \text{если } u \in \Gamma\setminus\Lambda, \end{cases}$$

где множество Λ определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
&u[M] \times A[M, N_1] \leqslant c[N_1],\\
&u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2],\\
&u[M_1] \geqslant \mathbf{0}[M_1].
\end{aligned}$$

9.1. Двойственная задача имеет вид

$$\langle b, u\rangle + \langle d, v\rangle - \langle h, w\rangle \to \max,$$
$$uA + v - w = 0, \; v \geqslant 0, \; w \geqslant 0.$$

9.2. Положим для простоты $M = 1:m$, $N = 1:n$ и запишем матрицы C и X в виде одномерных массивов

$$c = (C[1, 1], \ldots, C[1, n], C[2, 1], \ldots, C[2, n], \ldots, C[m, 1], \ldots, C[m, n])$$
$$x = (X[1, 1], \ldots, X[1, n], X[2, 1], \ldots, X[2, n], \ldots, X[m, 1], \ldots, X[m, n]).$$

Тогда транспортная задача примет вид

$$
\begin{gathered}
\langle c,\ x\rangle \to \min, \\
Ax = h, \quad x \geqslant 0,
\end{gathered} \tag{6}
$$

где $h = (a\,[1], \ldots, a\,[n],\ b\,[1], \ldots, b\,[m])$ и

$$
A = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & \ldots & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1 \\
\hline
1 & 1 & \ldots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \ldots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \ldots & 1
\end{array}\right)
$$

(в матрице A выписаны только ненулевые элементы). Легко видеть, что задачей, двойственной к (6), является следующая задача:

$$
\begin{gathered}
a\,[N] \times v\,[N] + b\,[M] \times u\,[M] \to \max, \\
v\,[j] + u\,[i] \leqslant C\,[i,\ j] \quad \forall i \in M,\ \forall j \in N.
\end{gathered}
$$

Этот результат справедлив и для произвольных индексных множеств M, N.

9.3. У пары двойственных задач

$$
\begin{array}{ll}
-x\,[1] \to \min, & u\,[1] + u\,[2] \to \max, \\
x\,[1] + x\,[2] \geqslant 1, & u\,[1] \qquad\quad \leqslant -1, \\
\quad -x\,[2] \geqslant 1, & u\,[1] - u\,[2] \leqslant 0, \\
x\,[1] \geqslant 0,\ x\,[2] \geqslant 0, & u\,[1] \geqslant 0,\ u\,[2] \geqslant 0
\end{array}
$$

множества планов пусты.

9.4. Положим $v_0 = c - u_0 A \in K^+$. По определению сопряженного конуса $\langle v_0,\ x\rangle \geqslant 0$ при всех $x \in K$. Возьмем любой план x первой задачи. Тогда

$$
\langle c,\ x\rangle = \langle v_0 + u_0 A,\ x\rangle \geqslant \langle u_0,\ Ax\rangle = \langle u_0,\ b\rangle = \langle c,\ x_0\rangle,
$$

что доказывает оптимальность x_0. Возьмем теперь любой план u второй задачи. Положив $v = c - uA \in K^+$, получим

$$
\langle b,\ u\rangle = \langle u,\ Ax_0\rangle = \langle uA,\ x_0\rangle = \langle c - v,\ x_0\rangle \leqslant \langle c,\ x_0\rangle = \langle b,\ u_0\rangle,
$$

что доказывает оптимальность u_0.

9.5. Для простоты рассмотрим пару двойственных задач вида

$$
\begin{array}{ll}
\langle c,\ x\rangle \to \min, & \langle b,\ u\rangle \to \max, \\
Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0, & uA \leqslant c,\ u \geqslant 0.
\end{array}
$$

Общий случай сводится к этому. Как отмечалось в упражнении 6.3, система линейных однородных неравенств

$$
\begin{array}{lll}
Ax - tb & \geqslant 0, & u \geqslant 0, \\
-A^T u + tc & \geqslant 0, & x \geqslant 0, \\
\langle b,\ u\rangle - \langle c,\ x\rangle & \geqslant 0, & t \geqslant 0
\end{array}
$$

с кососимметричной матрицей имеет решение $\{u_0,\ x_0,\ t_0\}$, удовлетворяющее условиям

$$
\begin{aligned}
&Ax_0 - t_0 b + u_0 &> 0,\\
&-A^T u_0 + t_0 c + x_0 &> 0,\\
&\langle b, u_0\rangle - \langle c, x_0\rangle + t_0 &> 0.
\end{aligned}
$$

Покажем, что $t_0>0$. В противном случае выполняются неравенства

$$Ax_0 \geqslant 0,\ u_0 A \leqslant 0,\ x_0 \geqslant 0,\ u_0 \geqslant 0,\ \langle b, u_0\rangle > \langle c, x_0\rangle.$$

Возьмем некоторые планы x_1, u_1 двойственных задач. С их помощью получаем

$$
\begin{aligned}
&\langle c, x_0\rangle \geqslant \langle u_1 A, x_0\rangle = \langle u_1, Ax_0\rangle \geqslant 0,\\
&\langle b, u_0\rangle \leqslant \langle u_0, Ax_1\rangle = \langle u_0 A, x_1\rangle \leqslant 0,
\end{aligned}
$$

что противоречит неравенству $\langle b, u_0\rangle > \langle c, x_0\rangle$.

Итак, $t_0>0$. Теперь нетрудно проверить, что $x_* = x_0/t_0$, $u_* = u_0/t_0$ — оптимальные планы и

$$(Ax_* - b) + u_* > 0,\ (c - u_* A) + x_* > 0.$$

Замечание. Поскольку для x_*, u_* выполняются и обычные условия дополняющей нежесткости, то во всех парах

$$
\begin{aligned}
&A[i, N] \times x_*[N] - b[i],\ u_*[i];\\
&x_*[j],\ c[j] - u_*[M] \times A[M, j]
\end{aligned}
$$

одно число равно нулю, а второе положительно.

10.2. Пусть

$$
\begin{aligned}
\varkappa &:= \max_{i\in M} \min_{j\in N} A[i, j] = \min_{j\in N} A[i_1, j] = A[i_1, j_1],\\
\mu &:= \min_{j\in N} \max_{i\in M} A[i, j] = \max_{i\in M} A[i, j_2] = A[i_2, j_2].
\end{aligned}
$$

Поскольку $A[i_1, j_1] \leqslant A[i_1, j_2] \leqslant A[i_2, j_2]$, то $\varkappa \leqslant \mu$. Для единичной матрицы $E=E[N, N]$ при $|N|>1$ имеем $\varkappa=0<1=\mu$.

11.1. Заметим, что для любого комплексного числа $z=u+iv$ справедлива формула

$$|z| = \max_{\varphi\in[0,\pi]} |\operatorname{Re}\{z\exp(-i\varphi)\}| = \max_{\varphi\in[0,\pi]} |u\cos\varphi + v\sin\varphi|.$$

Поэтому исходную задачу можно заменить линейной вещественной задачей чебышевского приближения

$$\max_{t\in[\alpha,\beta],\ \varphi\in[0,\pi]} \left|\sum\nolimits_{j\in N} x[j]\, u_j(t, \varphi) - f(t, \varphi)\right| \to \min_{x\in\mathbf{R}^N},$$

где $u_j(t, \varphi) = \operatorname{Re} v_j(t)\cos\varphi + \operatorname{Im} v_j(t)\sin\varphi$ и

$$f(t, \varphi) = \operatorname{Re} g(t)\cos\varphi + \operatorname{Im} g(t)\sin\varphi.$$

Глава II

2.1. Отметим, что ограничения, описывающие Ω, можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&A[M, N] \times x[N] = b[M],\\
&E[N, N] \times x[N] \geqslant 0[N].
\end{aligned}
$$

Пусть $\{x_0\} = \Omega(I_0)$ — вершина Ω. Очевидно, что $I_0 = M \cup N_0$, где $N_0 \subset N$. Положим $N_+ = N \setminus N_0$. Тогда x_0 удовлетворяет соотношениям

$$A[M, N_+] \times x_0[N_+] + A[M, N_0] \times x_0[N_0] = b[M],$$
$$0[N_0, N_+] \times x_0[N_+] + E[N_0, N_0] \times x_0[N_0] = 0[N_0],$$
$$x_0[N_+] > 0[N_+],$$

причем столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} A[M, N_+] & A[M, N_0] \\ 0[N_0, N_+] & E[N_0, N_0] \end{pmatrix}$$

линейно независимы. В частности, линейно независимы столбцы матрицы $A[M, N_+]$. По определению план x_0 является базисным. Столь же очевидно и обратное утверждение.

2.2. Учесть, что в данном случае полная матрица ограничений имеет максимальный ранг.

2.3. Крайняя точка x_0 множества Ω не может принадлежать грани положительной размерности. Действительно, допустим, вопреки утверждению, что $x_0 \in \Omega(I)$, $\dim \Omega(I) > 0$. Тогда $\operatorname{aff} \Omega(I)$ содержит прямую l, проходящую через точку x_0. Поскольку грань открыта в своей аффинной оболочке, то найдется окрестность x_0, пересечение которой с l принадлежит $\Omega(I)$. Но это противоречит определению крайней точки. Значит, крайняя точка является вершиной Ω.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\{x_0\} = \Omega(I_0)$ — вершина Ω и $x_0 = (x_1 + x_2)/2$, где $x_1, x_2 \in \Omega$. Нужно проверить, что $x_1 = x_2$. Имеем

$$A[I_0, N] \times x_1[N] = A[I_0, N] \times x_2[N] = b[I_0].$$

Отсюда следует, что $A[I_0, N] \times (x_2[N] - x_1[N]) = 0[I_0]$, а поскольку $\operatorname{rank} A[I_0, N] = |N|$, то $x_1 = x_2$.

2.4. Существование грани нулевой размерности при $r = |N|$ установлено в теореме 2.2. Пусть $r < |N|$. Возьмем непустую грань $\Omega(I)$. Согласно (2.9) $\dim \Omega(I) \geqslant |N| - r$. Если $\dim \Omega(I) = |N| - r$, то грань $\Omega(I)$ — требуемая. Предположим, что $\dim \Omega(I) > |N| - r$. Покажем, что в этом случае $\Omega(I) \neq \operatorname{aff} \Omega(I)$.

Рассмотрим две системы уравнений

$$A[M, N] \times z[N] = 0[M], \tag{1}$$
$$A[I, N] \times z[N] = 0[I]. \tag{2}$$

Система (1) имеет $k = |N| - r$ линейно независимых решений. Обозначим их $z_1, \ldots, z_k$. Очевидно, что z_i удовлетворяют и (2). По условию $\operatorname{rank} A[I, N] < r$, поэтому у (2) существует по крайней мере еще одно решение z_{k+1}, линейно независимое с $z_1, \ldots, z_k$. Возьмем $x_0 \in \Omega(I)$. Прямая

$$l = \{x = x_0 + t z_{k+1} \mid -\infty < t < \infty\}$$

содержится в $\operatorname{aff} \Omega(I)$. Однако она не содержится в Ω, поскольку $A[M, N] \times z_{k+1}[N] \neq 0[M]$. Тем более $l \not\subset \Omega(I)$. Показано, что $\Omega(I) \neq \operatorname{aff} \Omega(I)$.

По теореме 2.1 у Ω существует грань, размерность которой меньше $\dim \Omega(I)$. Продолжая аналогично, придем к грани размерности $|N| - r$.

3.1. Рассмотрим систему вида

$$A[I, N] \times z[N] = 0[I],$$
$$A[M \setminus I, N] \times z[N] > 0[M \setminus I],$$

где $M = M_1 \cup M_2$, $M_2 \subset I \subset M$ и $\operatorname{rank} A[I, N] = |N| - 1$. Эта система может не иметь решения. Если же решение существует, то оно единственно с точностью до положительного множителя. Обозначим $z_1, \ldots, z_r$ решения всех таких систем (при различных I). Тогда множество решений K исходной системы совпадает с выпуклой конической оболочкой, натянутой на векторы $z_1, \ldots, z_r$. При $r = 0$ будет $K = \{0\}$.

4.1. Если задача (4.1) разрешима, то включение $c \in K_0^+$ легко доказывается от противного.

Пусть теперь $c \in K_0^+$. По теореме 3.1 $\langle c, h \rangle \geqslant 0$ при всех h, удовлетворяющих соотношениям

$$A[M_1, N]\times h[N]\geqslant 0[M_1],$$
$$A[M_2, N]\times h[N]=0[M_2].$$

Согласно теореме I.6.2 (Фаркаша) вектор c допускает представление $c[N]=u[M]\times A[M, N]$, где $u[M_1]\geqslant 0[M_1]$. Это значит, что множество планов двойственной к (4.1) задачи непусто, а тогда по теореме I.9.2 задача (4.1) разрешима.

4.2. Зафиксируем $x\in\Omega$. Поскольку

$$x=x_* + \sum_{j=1}^{r}\beta[j]z_j,$$

где $\beta[j]\geqslant 0$ и $\|z_j\|=1$, то $\|x-x_*\|\leqslant\sum_{j=1}^{r}\beta[j]$. Положим $\gamma:=$ $:=\min_{j\in 1:r}\langle c, z_j\rangle>0$. Тогда

$$f(x)-f(x_*)=\sum_{j=1}^{r}\beta[j]\langle c, z_j\rangle\geqslant\gamma\sum_{j=1}^{r}\beta[j]\geqslant\gamma\|x-x_*\|.$$

5.1. Неравенства

$$2x[1]-x[2]\geqslant 0,$$
$$-x[1]+x[2]\geqslant 0,$$
$$x[1]\geqslant 0,\ x[2]\geqslant 0$$

определяют множество Ω, изображенное на рис. 14. Начало координат является вырожденной вершиной Ω.

Возьмем $J=\{3, 4\}$. В этом случае $\Omega_J=$ $=\{x\mid x[1]\geqslant 0,\ x[2]\geqslant 0\}$, и ни одно ребро Ω_J не совпадает с ребром Ω.

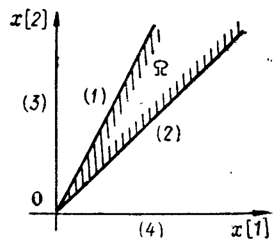


Рис. 14.

5.2. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$-x[1]+2x[2]\to\min_{x\in\Omega},$$

где Ω — множество из ответа к предыдущему упражнению. Очевидно, что вершина $x_*=0$ оптимальна. Она имеет три оптимальных базиса $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ и три неоптимальных $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{3, 4\}$.

5.3. Включение $\Omega\subset\bigcap_{J\in G}\Omega_J$ очевидно. Проверим обратное включение. Пусть $x_0\in\Omega_J$ при всех J, удовлетворяющих условиям (5.3). Имеем

$$A[M\setminus I_*, N]\times x_0[N]\geqslant b[M\setminus I_*],$$
$$A[M_2, N]\times x_0[N]=b[M_2]. \qquad (3)$$

Покажем, что

$$A[I_*\setminus M_2, N]\times x_0[N]\geqslant b[I_*\setminus M_2]. \qquad (4)$$

Зафиксируем $i_0\in I_*\setminus M_2$. Если строка $A[i_0, N]$ линейно независима со строками матрицы $A[M_2, N]$, то i_0 принадлежит некоторому строчному базису J. Поскольку $x_0\in\Omega_J$, то $A[i_0, N]\times x_0[N]\geqslant b[i_0]$.

Предположим, что

$$A[i_0, N]=\sum_{i\in M_2}u[i]\times A[i, N].$$

Множество Ω непусто, поэтому согласно теореме I.6.3 выполняется неравенство

$$b[i_0]\leqslant\sum_{i\in M_2}u[i]\times b[i].$$

Но тогда

$$A[i_0, N] \times x_0[N] = \sum\nolimits_{i \in M_2} u[i] \times (A[i, N] \times x_0[N]) =$$
$$= \sum\nolimits_{i \in M_2} u[i] \times b[i] \geqslant b[i_0].$$

Неравенство (4) установлено.

Из (3) и (4) следует требуемое включение $x_0 \in \Omega$.

6.2. Матрица $\left(L_k\left[N_*^{(k)}, N_*^{(k+1)}\right]\right)^{-1}$ отличается от единичной только строкой с номером j_k. А эта строка равна $y_k\left[N_*^{(k)}\right]$.

7.1. У задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} -x[1] + 2x[2] &\to \min, \\ 2x[1] - x[2] - x[3] &= 0, \\ -x[1] + x[2] - x[4] &= 0, \\ x[1:4] &\geqslant \mathbf{0}[1:4] \end{aligned}$$

столбцовые базисы {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} являются строго оптимальными.

7.2. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &x[2] \to \min, \\ &x[2] = 1, \\ &x[1] \geqslant 0, \quad x[2] \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ее единственный столбцовый базис {2} невырожден и оптимален, но не строго оптимален. Этот пример показывает, что единственная оптимальная вершина может не быть единственным оптимальным планом. В данном случае множество оптимальных планов имеет вид $\Omega_* = \{x \mid x[1] \geqslant 0,\ x[2] = 1\}$.

8.1. У параметрической задачи

$$\begin{aligned} -x[1] + \theta x[2] &\to \min, \\ x[2] &= 1, \\ x[1] \geqslant 0, \quad x[2] &\geqslant 0 \end{aligned}$$

множество T пусто.

8.2. Если множество планов Ω задачи (8.1) ограничено, то $T = (-\infty, \infty)$. Последнее равенство возможно и в случае неограниченного Ω, о чем свидетельствует следующий пример:

$$\begin{aligned} x[1] + \theta x[2] &\to \min, \\ x[2] &= 1, \\ x[1] \geqslant 0, \quad x[2] &\geqslant 0. \end{aligned}$$

8.3. Допустим, что пара $\{u_0, \theta_0\}$ удовлетворяет неравенству $A^T u - \theta c_\infty \leqslant c_0$. Если $c_\infty \leqslant \mathbf{0}$, то этому неравенству удовлетворяет также пара $\{u_0, \theta\}$ при любом $\theta < \theta_0$, откуда следует, что $\theta_* = -\infty$. Аналогично показывается, что $\theta^* = +\infty$ при $c_\infty \geqslant \mathbf{0}$.

8.4. Функция μ конечна лишь при $\theta \in [-1, +\infty)$. Ее график изображен на рис. 15.

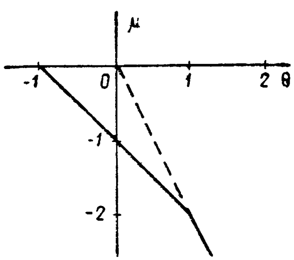


Рис. 15.

При $\theta = -1$ имеются две оптимальные вершины $x_1 = (1, 0, 0)$ и $x_2 = (0, 1, 0)$. Интересно отметить, что вершина x_1 не будет оптимальной ни при каком другом θ.

9.1. Соотношения $T = \varnothing$, $T = \{0\}$, $T = (-\infty, +\infty)$ выполняются соответственно для параметрических задач со следующими ограничениями:

$$-x[1]-x[2]=1, \qquad x[1]+x[2]=0,$$
$$x[2]=\theta, \qquad x[1]-x[2]=\theta,$$
$$x[1]\geqslant 0,\ x[2]\geqslant 0; \qquad x[1]\geqslant 0,\ x[2]\geqslant 0;$$
$$x[1]-x[2]=\theta,$$
$$x[1]\geqslant 0,\ x[2]\geqslant 0.$$

Глава III

2.2. По теореме 2.1 найдется число λ со свойствами
$$\langle f'(x_*),\ x_*\rangle=\lambda,$$
$$\lambda\leqslant \partial f(x_*)/\partial x[j],\quad j\in N.$$
В частности, $\partial f(x_*)/\partial x[j]\geqslant\lambda$ при $x_*[j]=0$. Поскольку
$$\sum\nolimits_{j\in N}(\partial f(x_*)/\partial x[j]-\lambda)\times x_*[j]=\langle f'(x_*),\ x_*\rangle-\lambda=0,$$
то $(\partial f(x_*)/\partial x[j]-\lambda)\times x_*[j]=0$ при всех $j\in N$. Отсюда следует, что $\partial f(x_*)/\partial x[j]=\lambda$ при $x_*[j]>0$.

2.3. См. [12, с. 22—24]. Очевидно, что эта задача имеет решение x_*. По лемме Гиббса найдется число λ, такое, что
$$a[j]\times b[j]\times\exp(-b[j]\times x_*[j])=\lambda \quad \text{при } x_*[j]>0,$$
$$a[j]\times b[j] \leqslant\lambda \quad \text{при } x_*[j]=0.$$
Значит,
$$x_*[j]=\ln_+(a[j]\times b[j]/\lambda)/b[j],\quad j\in N, \tag{1}$$
где
$$\ln_+ u=\begin{cases}\ln u, & \text{если } u>1,\\ 0, & \text{если } u\leqslant 1.\end{cases}$$

Число λ определяется из уравнения $\sum_{j\in N}x_*[j]=1$. Покажем, что это уравнение имеет единственное решение. Введем обозначения $\lambda_j=a[j]\times b[j]$, $\lambda_*=\max_{j\in N}\lambda_j$. Поскольку функция
$$h(\lambda)=\sum\nolimits_{j\in N}\ln_+(\lambda_j/\lambda)/b[j]$$
является непрерывной и строго убывающей от $+\infty$ до 0 на $(0,\ \lambda_*]$, то интересующее нас уравнение $h(\lambda)=1$ действительно имеет единственное решение. Найдя его и подставив в (1), получим единственное решение исходной задачи.

3.2. Необходимость. Возьмем две различные точки x_0, x_1 из P. По лемме 3.1
$$f(x_1)-f(x_0)\geqslant\langle f'(x_0),\ x_1-x_0\rangle.$$
Допустим, что $f(x_1)-f(x_0)=\langle f'(x_0),\ x_1-x_0\rangle$. Зафиксируем $t\in(0,\ 1)$ и положим $x(t)=x_0+t(x_1-x_0)$. В силу строгой выпуклости функции f имеем
$$f(x(t))-f(x_0)<t[f(x_1)-f(x_0)]=t\langle f'(x_0),\ x_1-x_0\rangle.$$
С другой стороны, по лемме 3.1
$$f(x(t))-f(x_0)\geqslant t\langle f'(x_0),\ x_1-x_0\rangle.$$
Полученные неравенства противоречат друг другу.

Достаточность доказывается так же, как в лемме 3.1.

3.3. Строгая выпуклость функции f следует из формулы (3.5) и предыдущего упражнения.

Функция одной переменной $y=x^4$ является строго выпуклой на $(-\infty,\ \infty)$, однако $y''(0)=0$.

3.4. У функции $y=\exp(x)$ нет точки минимума, хотя она строго выпукла и ограничена снизу на $(-\infty, \infty)$.

3.5. При $x>0$ имеем $y''(x)=1/x>0$, поэтому функция y строго выпукла на $(0, \infty)$. Остается заметить, что в случае $x_0=0$, $x_1>0$, $t\in(0,1)$ неравенство $y(tx_1+(1-t)x_0)<ty(x_1)+(1-t)y(x_0)$ сводится к очевидному неравенству $y(tx_1)<ty(x_1)$.

4.1. По лемме 4.1 найдется ненулевой вектор u_0, такой, что

$$<u_0, x> \geqslant <u_0, x_0> \quad \forall x\in K. \tag{2}$$

Отсюда так же, как при доказательстве теоремы 1.5.2, следует, что $<u_0, x>\geqslant 0$ при всех $x\in K$ и $<u_0, x_0>\leqslant 0$. Подставляя в (2) $x=2x_0$, получаем $<u_0, x_0>\geqslant 0$. Таким образом, $u_0\in K^+$ и $<u_0, x_0>=0$, т. е. u_0 — требуемый вектор.

4.2. Рассмотрим множество на плоскости

$$P=\{(x, y)\mid -\infty<x<\infty,\ y=\exp(-|x|)\}.$$

Оно замкнутое, однако его выпуклая оболочка

$$\operatorname{conv} P=\{(x, y)\mid -\infty<x<\infty,\ 0<y<1\}\cup\{(0, 1)\}$$

замкнутой не является.

5.1. Считаем для простоты, что $N=1:n$. Пусть $x_0\in Q$. Тогда при некотором $\beta>0$ имеем $x_0\pm h_i\in Q$, где $h_i=\beta e_i$, $i\in 1:n$. Любая точка $x\in Q$ допускает представление

$$x=x_0+\sum_{i=1}^{2n} u[i]\, h_i,$$

где $h_{n+i}=-h_i$ и $\min\{u[i], u[n+i]\}=0$ при всех $i\in 1:n$. Если $x\to x_0$, то $\sum_{i=1}^{2n} u[i]\to 0$. Действительно, $x[i]-x_0[i]=(u[i]-u[n+i])\beta$, а поскольку один из коэффициентов $u[i]$, $u[n+i]$ равен нулю, то все $u[i]$, $i\in 1:2n$, стремятся к нулю. Допустим, что $\sum_{i=1}^{2n} u[i]<1$. В этом случае

$$x=\left(1-\sum_{i=1}^{2n} u[i]\right)x_0+\sum_{i=1}^{2n} u[i]\,(x_0+h_i),$$

причем все коэффициенты в правой части неотрицательны и в сумме равны единице. Опираясь на выпуклость функции f на Q, нетрудно проверить, что

$$f(x)-f(x_0)\leqslant\sum_{i=1}^{2n} u[i]\,(f(x_0+h_i)-f(x_0)). \tag{3}$$

Введем точку $y=x_0-(x-x_0)=2x_0-x$. Имеем

$$\begin{aligned} y-x_0 &= -\sum_{i=1}^{2n} u[i]\, h_i=-\sum_{i=1}^{n} u[i]\, h_i-\sum_{i=n+1}^{2n} u[i]\, h_i= \\ &=\sum_{i=n+1}^{2n} u[i-n]\, h_i+\sum_{i=1}^{n} u[i+n]\, h_i=\sum_{i=1}^{2n} v[i]\, h_i, \end{aligned}$$

где
$$v[i]=\begin{cases} u[i+n], & i\in 1:n,\\ u[i-n], & i\in n+1:2n.\end{cases}$$

Очевидно, что $v[i]\geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{2n} v[i]=\sum_{i=1}^{2n} u[i]$. Аналогично предыдущему получаем

$$f(y)-f(x_0)\leqslant\sum_{i=1}^{2n} v[i]\,(f(x_0+h_i)-f(x_0)).$$

Поскольку $x_0=(y+x)/2$, то $f(x_0)\leqslant[f(y)+f(x)]/2$. Значит,

$$f(x_0)-f(x)\leqslant f(y)-f(x_0)\leqslant\sum_{i=1}^{2n} v[i]\,(f(x_0+h_i)-f(x_0)). \tag{4}$$

Положим $C=\max_{i\in 1:2n}(f(x_0+h_i)-f(x_0))$. Из (3) и (4) следует неравенство

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant C \sum_{i=1}^{2n} u[i],$$

гарантирующее непрерывность функции f в точке x_0.

5.2. Точка $z_0=\{x_0, y_0\}$, где $y_0=f(x_0)$, не принадлежит выпуклому множеству $V_2=\{z=\{x, y\} | x\in Q, y>f(x)\}$. По теореме 4.1 найдется ненулевой вектор $a=\{u, \gamma\}$, отделяющий $\{z_0\}$ от V_2:

$$<u, x-x_0>+\gamma(y-y_0)\geqslant 0$$

при всех $x\in Q$ и $y>f(x)$. Нетрудно проверить, что $\gamma>0$ и что вектор $c=-u/\gamma$ принадлежит $\partial f(x_0)$. Тем самым установлена непустота $\partial f(x_0)$. Выпуклость и замкнутость субдифференциала следуют из его определения, а ограниченность — из непрерывности выпуклой функции f на Q.

5.3. Возьмем $x\in Q$. При малом $t>0$ точка $x_1=x_0+t(x-x_0)$ принадлежит $U(x_0)$, поэтому

$$f(x_1)-f(x_0)\geqslant <c, x_1-x_0>.$$

В силу выпуклости функции f на Q

$$f(x_1)\leqslant f(x_0)+t[f(x)-f(x_0)].$$

Значит,

$$f(x)-f(x_0)\geqslant [f(x_1)-f(x_0)]/t\geqslant <c, x_1-x_0>/t=<c, x-x_0>,$$

что и требовалось доказать.

5.4. Выпуклая функция

$$y=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant 1, \\ 1, & x=0, \end{cases}$$

не имеет точки минимума на $[0, 1]$.

5.5. По теореме 5.3 у функции Лагранжа задачи (5.8) существует седловая точка. Это гарантирует разрешимость двойственной задачи и равенство

$$\min_{x\in K}\sup_{u\in\Gamma} \mathcal{L}(x, u)=\max_{u\in\Gamma}\inf_{x\in K} \mathcal{L}(x, u)$$

(см. упражнение I.8.1). Поскольку

$$\sup_{u\in\Gamma} \mathcal{L}(x, u)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\in\Omega, \\ +\infty, & \text{если } x\in K\setminus\Omega, \end{cases}$$

то

$$\min_{x\in\Omega} f(x)=\max_{u\in\Gamma}\inf_{x\in K} \mathcal{L}(x, u).$$

6.1. При $\Phi(x_0)=0$ справедлива формула

$$\partial\Phi(x_0)=\operatorname{conv}\{g=\pm U(t) \mid t\in Q\}.$$

7.1. Достаточность очевидна. Проверим необходимость. Обозначим k максимальный ранг матриц, составленных из столбцов $U(t_1), \ldots, U(t_n)$, где t_i — попарно различные точки из Q, и допустим вопреки утверждению, что $k<n$. Выделим отличный от нуля определитель k-го порядка. Пусть это будет

$$\Delta=\begin{vmatrix} u_1(t_1) & \ldots & u_1(t_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_k(t_1) & \ldots & u_k(t_k) \end{vmatrix}.$$

Зафиксируем $s>k$ и $t\in Q$. Определитель

$$\begin{vmatrix} u_1(t_1) & \ldots & u_1(t_k) & u_1(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_k(t_1) & \ldots & u_k(t_k) & u_k(t) \\ u_s(t_1) & \ldots & u_s(t_k) & u_s(t) \end{vmatrix}$$

равен нулю. Разложим его по элементам последнего столбца. Получим

$$\Delta u_s(t)+\sum_{i=1}^{k}\beta[i]\,u_i(t)=0,$$

причем коэффициенты $\beta[i]$ не зависят от t. Это значит, что функции $u_1, \ldots, u_k, u_s$ линейно зависимы на Q, хотя по условию они должны быть линейно независимыми.

7.2. Чебышевский ранг указанной системы равен $n+1$. Действительно, векторы $U(t_1), \ldots, U(t_{n+1})$ линейно независимы за счет первых $n+1$ компонент. Если же взять $a<t_1<\ldots<t_{n+2}<z_1$, то векторы $U(t_1), \ldots, U(t_{n+2})$ будут линейно зависимыми.

7.3. При $n=1$ утверждение тривиально. Пусть $n\geqslant 2$. Введем множество $G=\operatorname{conv}\{g=U(t)\,|\,t\in[a, b]\}$ и покажем, что $0\notin G$. В противном случае найдутся точки $t_0<t_1<\ldots<t_n$ из $[a, b]$ и положительные числа $\alpha[i]$, $i\in 0:n$, такие, что

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha[i]\,U(t_i)=0.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha[i]\,U(t_i)=-\alpha[0]\,U(t_0).$$

По формуле Крамера

$$\alpha[i]=(-1)^i\alpha[0]\,\Delta_i/\Delta_0,\quad i\in 1:n, \tag{5}$$

где Δ_i, $i\in 0:n$, — определитель матрицы, составленной из столбцов $U(t_0),\ldots, U(t_{i-1}), U(t_{i+1}), \ldots, U(t_n)$. Используя чебышевские свойства системы $u_1, \ldots, u_n$ на $[a, b]$, нетрудно проверить, что все определители $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ отличны от нуля и одного знака. Но тогда (5) противоречит положительности $\alpha[i]$, $i\in 0:n$. Значит, действительно, $0\notin G$.

По теореме о строгой отделимости найдется вектор $x_0\in\mathbf{R}^n$, такой, что $\langle x_0, g\rangle>0$ при всех $g\in G$. В частности, $P(x_0, t)>0$ при всех $t\in[a, b]$.

Обобщение этого результата имеется в [54].

8.1. Неотрицательно определенной и несимметричной является, например, матрица $D=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

8.2. Нетрудно проверить, что матрица $D_1=D-\lambda_1 E$ неотрицательно определена и симметрична. Кроме того, $\langle D_1x_1, x_1\rangle=0$. По следствию из леммы 8.1 $D_1x_1=0$, или $Dx_1=\lambda_1x_1$.

8.3. Поскольку

$$\tfrac{1}{2}\|x-c\|^2=\tfrac{1}{2}\langle Ex,\ x\rangle-\langle c,\ x\rangle+\tfrac{1}{2}\|c\|^2,$$

то исходную задачу можно заменить следующей:

$$\tfrac{1}{2}\langle Ex,\ x\rangle-\langle c,\ x\rangle\to\min,\ Ax=0.$$

По лемме 8.4 эта задача разрешима. Запишем для нее критерий оптимальности

$$x-c=A^Tu,\quad Ax=0.$$

Умножив первое равенство слева на A, получим $AA^Tu=-Ac$. По лемме 1.6.2 матрица AA^T обратима. Значит, $u_*=-\left(AA^T\right)^{-1}Ac$ и

$$x_*=\left(E-A^T\left(AA^T\right)^{-1}A\right)c.$$

9.1 Критерий оптимальности плана x_* можно записать в виде

$$Dx_*+c=u_*,\ u_*\geqslant 0,$$
$$u_*[j]\times x_*[j]=0\quad\forall j\in N.$$

9.2. Решение этой задачи существует и единственно, поскольку множество планов компактно, а целевая функция строго выпукла. Запишем критерий оптимальности

$$x - c = u - v, \quad u \geqslant 0, \ v \geqslant 0,$$
$$u[j] \times (1 + x[j]) = 0, \quad v[j] \times (1 - x[j]) = 0 \quad \forall j \in N.$$

Нетрудно проверить, что план x_* с компонентами

$$x_*[j] = s(c[j]), \quad j \in N,$$

где

$$s(t) = \begin{cases} t, & |t| \leqslant 1, \\ \operatorname{sign} t, & |t| > 1, \end{cases}$$

удовлетворяет критерию оптимальности и потому является **единственным решением** исходной задачи.

9.3. Задача (9.1) эквивалентна следующей задаче **квадратичного программирования**:

$$^1/_2 \langle D_0 z, z\rangle + \langle c_0, z\rangle \to \min,$$
$$A_0 z = b, \quad z \geqslant 0,$$

где

$$c_0 = (c[N], \ -c[N_2], \ 0[M_1]),$$
$$A_0 = (A[M, N], \ -A[M, N_2], \ -E[M, M_1]),$$
$$D_0 = \begin{pmatrix} D[N, N] & -D[N, N_2] & 0[N, M_1] \\ -D[N_2, N] & D[N_2, N_2] & 0[N_2, M_1] \\ 0[M_1, N] & 0[M_1, N_2] & 0[M_1, M_1] \end{pmatrix}.$$

Если $z_* = (z_*[N], v_*[N_2], u_*[M_1])$ — оптимальный план **последней задачи** то $x_* = (z_*[N_1], z_*[N_2] - v_*[N_2])$ — оптимальный план задачи **(9.1)**.

10.1. Составим матрицу H из столбцов $h_j = a_j - c$, $j \in N$, **и положим** $D = H^T H$. Тогда исходную задачу можно переписать так:

$$^1/_2 \langle Dx, x\rangle \to \min,$$
$$\langle e, x\rangle = 1, \quad x \geqslant 0, \tag{6}$$

где $e = e[N]$ — вектор, все компоненты которого равны единице. **Двойственной** к (6) будет следующая задача:

$$-{}^1/_2 \langle Dv, v\rangle + \lambda \to \max,$$
$$-Dv + \lambda e \leqslant 0.$$

Она эквивалентна экстремальной задаче без ограничений

$$-{}^1/_2 \langle Dv, v\rangle + \min_{i \in N} D[i, N] \times v[N] \to \max_{v \in \mathbf{R}^N}.$$

11.1. Единственность решения следует из строгой выпуклости **целевой** функции f на $\mathbf{R}^N$ (см. упражнения 3.3. и 3.1).

11.2. Учесть формулу

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) - tf(x_1) - (1-t)f(x_0) =$$
$$= -{}^1/_2 t(1-t) \langle D(x_1 - x_0), x_1 - x_0\rangle.$$

12.2. Считаем, что $c \neq 0$. Положим $a = D^{-1}c$. Имеем

$$-\langle c, x\rangle = -\langle Da, x\rangle = -\langle a, x\rangle_D \leqslant \|a\|_D \cdot \|x\|_D = \|a\|_D,$$

причем равенство в неравенстве Коши достигается только при $x = -a/\|a\|_D$. Таким образом, единственным решением исходной задачи будет вектор

$$x_* = -D^{-1}c/\langle D^{-1}c, c\rangle^{1/2}.$$

12.3. Обозначим A матрицу, составленную из строк a_i, $i \in M$, а Ω — множество планов данной задачи. Если вектор c допускает представление $c = A^T u$, то любой план x будет оптимальным, ибо $\langle c, x\rangle = \langle A^T u, x\rangle = \langle u, Ax\rangle = 0$. Поэтому считаем, что $A^T u \neq c$ при всех $u \in \mathbf{R}^M$. Возьмем матрицу $\Phi = D^{-1} A^T (AD^{-1} A^T)^{-1}$. Для нее $A\Phi A = A$ и $(\Phi A D^{-1})^T = \Phi A D^{-1}$. Положим $a = D^{-1} c$. При любом $x \in \Omega$ имеем

$$\langle c, x\rangle = \langle Da, x\rangle = \langle Da, (E - \Phi A)x\rangle = \langle Da, (E - \Phi A) D^{-1} Dx\rangle =$$
$$= \langle (E - \Phi A) a, Dx\rangle = \langle (E - \Phi A) a, x\rangle_D \geqslant - \|(E - \Phi A) a\|_D.$$

Поскольку $(E - \Phi A) a = D^{-1} c - (\Phi A D^{-1}) c = D^{-1} (c - A^T (\Phi^T c)) \neq 0$, то равенство в последнем неравенстве достигается только при

$$x = x_* := -(E - \Phi A) a / \|(E - \Phi A) a\|_D.$$

Учитывая соотношение $Ax_* = 0$, заключаем, что x_* является единственным решением исходной задачи.

12.4. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} &{}^1/_2 \left\| D^{-1} \left(\textstyle\sum_{i \in M} u[i]\, a_i - c \right) \right\|_D^2 \to \min, \\ &u[M] \geqslant 0[M]. \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим A матрицу, составленную из строк a_i, $i \in M$. Тогда (7) сводится к задаче квадратичного программирования

$$\begin{aligned} &{}^1/_2 \langle AD^{-1} A^T u, u\rangle - \langle AD^{-1} c, u\rangle \to \min, \\ &u \geqslant 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Эта задача разрешима, ибо целевая функция ограничена снизу величиной $-\langle D^{-1} c, c\rangle/2$. Обозначим u_* ее решение. Тогда (см. упражнение 9.1)

$$\begin{aligned} &v_* := AD^{-1} (A^T u_* - c) \geqslant 0, \\ &v_*[i] \times u_*[i] = 0 \quad \forall i \in M. \end{aligned} \tag{9}$$

Введем ненулевой вектор $z_* = D^{-1} (A^T u_* - c)$ и покажем, что $x_* = z_* / \|z_*\|_D$ будет единственным решением исходной задачи. Согласно (9)

$$Ax_* = Az_* / \|z_*\|_D = v_* / \|z_*\|_D \geqslant 0.$$

Значит, x_* — план исходной задачи. Кроме того,

$$\langle z_*, A^T u_*\rangle = \langle Az_*, u_*\rangle = \langle v_*, u_*\rangle = 0.$$

Найдем значение целевой функции на плане x_*. Для этого заметим, что

$$\langle c, z_*\rangle = -\langle A^T u_* - c, z_*\rangle = -\|z_*\|_D^2.$$

Значит, $\langle c, x_*\rangle = -\|z_*\|_D$.

Возьмем любой план x, отличный от x_*. Получим

$$\langle c, x\rangle = \langle A^T u_* - Dz_*, x\rangle = \langle u_*, Ax\rangle - \langle z_*, x\rangle_D \geqslant$$
$$\geqslant -\|z_*\|_D \langle x_*, x\rangle_D > -\|z_*\|_D = \langle c, x_*\rangle,$$

что и требовалось доказать. По существу, решение исходной задачи в случае $c \notin K$ сведено к решению задачи квадратичного программирования (8).

13.1. См. теорему II.8.2.

13.2. Учесть, что

$$f(x_*, y_*) = \min_{x\in\Omega_1} f(x, y_*) = \varphi(y_*) \leqslant \varphi(y) = \min_{x\in\Omega_1} f(x, y) \leqslant f(x, y)$$

при всех $x\in\Omega_1$, $y\in\Omega_2$.

Глава IV

2.1. Имеем

$$f(x) = \frac{\langle c, x - x_0\rangle + \langle c, x_0\rangle + \xi}{\langle a, x - x_0\rangle + \langle a, x_0\rangle + \beta}.$$

Поскольку векторы a и c линейно независимы, то можно выбрать x_0 так, чтобы $\langle c, x_0\rangle+\xi=0$, $\langle a, x_0\rangle+\beta=0$. Ограничения перепишем в виде $A(x-x_0)\geqslant b-Ax_0=: b_0$. Сделав замену переменной $z=x-x_0$, придем к задаче

$$\langle c, z\rangle/\langle a, z\rangle \to \min,$$
$$Az \geqslant b_0.$$

2.2. Если $a=0$, то утверждение тривиально. Пусть $a\neq0$ и $c=\lambda a$. Тогда

$$f(x) = \frac{\lambda[\langle a, x\rangle + \beta] + \xi - \lambda\beta}{\langle a, x\rangle + \beta} = \lambda + \frac{\xi - \lambda\beta}{\langle a, x\rangle + \beta}.$$

Исходная задача свелась к максимизации или минимизации (в зависимости от знака $\xi-\lambda\beta$) линейной функции $\langle a, x\rangle$ на Ω.

2.3. Интересен лишь случай, когда пересечение $P=\Omega\cap H_\infty$ непусто. В силу условия II) числитель $\langle c, x\rangle+\xi$ сохраняет знак на P. Если этот знак «+», то согласно условию I) $f(x)\to+\infty$ при приближении плана x к H_∞. Инфимум f достигается «вдали от H_∞», так что картина получается такой же, как и при выполнении условия (2.6). Если же $\langle c, x\rangle+\xi<0$ на P, то $f(x)\to-\infty$ при приближении плана x к H_∞, и $\inf\limits_{x\in\Omega} f(x) = -\infty$.

Функция f не определена на P, поэтому, строго говоря, надо принять, что инфимум f ищется на $\Omega\setminus H_\infty$.

3.1. Линиями уровня функции $f(x)=x[2]/x[1]$ являются прямые, вращающиеся вокруг начала координат. В окрестности начала координат функция f принимает любые вещественные значения.

3.2. При $q\geqslant1$ задача разрешима, а при $q<1$ — нет.

4.1. Пусть функция F квазивыпукла на Ω. Зададимся λ, точками x_0, x_1 из G_λ и $t\in[0, 1]$. Тогда точка $x(t)=tx_1+(1-t)x_0$ принадлежит Ω и $F(x(t))\leqslant\max\{F(x_0), F(x_1)\}\leqslant\lambda$, т. е. $x(t)\in G_\lambda$.

Наоборот, пусть все множества G_λ выпуклые. Выберем x_0, x_1 из Ω и $t\in[0, 1]$. Обозначим $\lambda=\max\{F(x_0), F(x_1)\}$. Множество G_λ содержит точки x_0, x_1, а вместе с ними и точку $tx_1+(1-t)x_0$. Поэтому $F(tx_1+(1-t)x_0)\leqslant$ $\leqslant\max\{F(x_0), F(x_1)\}$.

4.2. Функция

$$s(t) = \begin{cases} t, & \text{если } |t|\leqslant1, \\ \operatorname{sign} t, & \text{если } |t|>1, \end{cases}$$

является квазивыпуклой, но не строго квазивыпуклой на вещественной оси.

Функция

$$l(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t=0, \\ 0 & \text{при } t\neq0 \end{cases}$$

удовлетворяет условию (4.4), но не является квазивыпуклой.

4.3. Допустим, что $x_0 \in \Omega$ — точка локального минимума строго квазивыпуклой функции F, и существует точка $x_1 \in \Omega$, в которой $F(x_1) < F(x_0)$. При $t \in (0, 1)$ имеем

$$F(tx_1 + (1-t)x_0) < \max\{F(x_0), F(x_1)\} = F(x_0),$$

что противоречит определению x_0.

У функции s из ответа к предыдущему упражнению любая точка $t > 1$ есть точка локального, но не глобального минимума.

5.1. Конус $K_0^{(?)}$ состоит из пар $\{h, \lambda\}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &\langle a, h\rangle + \lambda\beta = 0, \\ &Ah - \lambda\beta \geqslant \mathbf{0}, \quad \lambda \geqslant 0, \\ &\{h, \lambda\} \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Допустив, что $\lambda > 0$, получим вектор $x = h/\lambda$ из Ω, на котором $\langle a, x\rangle + \beta = 0$. Но это противоречит (2.6). Таким образом, необходимо $\lambda = 0$, откуда и следует требуемое.

5.2. Ранг матрицы ограничений задачи (5.4) максимален, что следует из максимальности ранга матрицы A и условий

$$\begin{aligned} Aw - \gamma b &\geqslant 0, \\ \gamma &\geqslant 0. \end{aligned}$$

6.1. Запишем ограничения двойственной задачи:

$$\begin{aligned} &\alpha + u[1] + u[2] = 0, \\ &\alpha + u[2] = 1, \\ &u[1] \geqslant 0, \quad u[2] \geqslant 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что они несовместны. По теореме 6.1 целевая функция исходной задачи не ограничена снизу на множестве планов.

7.1. В силу (i) существует вектор $h \neq \mathbf{0}$, такой, что $Ah \geqslant \mathbf{0}$, $Ah \neq \mathbf{0}$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} \eta(h) := |\langle c, h\rangle| + |\langle a, h\rangle| &\to \min, \\ Ah &\geqslant \mathbf{0}, \\ \left(\sum\nolimits_{i \in M} A[i, N]\right) \times h[N] &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Она эквивалентна задаче линейного программирования (см. упражнение I.3.2). Последняя разрешима, поскольку имеет непустое множество планов и неотрицательную целевую функцию. Значит, разрешима и задача (1). Обозначим h^* ее оптимальный план. Тогда условие (ii) выполняется, если $\eta(h^*) > 0$, и не выполняется, если $\eta(h^*) = 0$.

7.2. Рассмотрим задачу дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned} &x[2]/x[1] \to \min, \\ &x[1] \geqslant 1, \quad x[2] \geqslant 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что в данном случае условия (i)—(iii) выполнены, $\varphi_0 = 0$ и $\Omega_1 = \{x \mid x[1] \geqslant 1,\ x[2] = 0\}$.

8.1. Обозначим A матрицу, составленную из строк $V_i = (v_1(t_i), \ldots, v_m(t_i))$, $i \in 1:q$. Нужно указать критерий совместности системы линейных однородных неравенств $Ay > \mathbf{0}$. Нетрудно проверить, что эта система совместна тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \notin \operatorname{conv}\{V_1, \ldots, V_q\}$ (см. упражнения I.6.2 и III.7.3).

8.2. На отрезке $[-1, 1]$ введем сетку

$$T = \{t_i = -1 + (i-1)/s \mid i \in 1:q,\ q = 2s+1,\ s \geqslant 2\}.$$

Отметим, что $t_{s+1} = 0$. Положим

$$H(z, t) = \frac{x[1]}{y[1] + y[2]t^2}$$

и рассмотрим задачу (8.1) наилучшего равномерного приближения следующей функции:

$$f(t_i)=\begin{cases}1, & i=s+1,\\ 0, & i\neq s+1.\end{cases}$$

Очевидно, что условия I), II) в данном случае выполнены.

При $0<\varepsilon<1$ имеем

$$\max_{i\in 1:q}\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon+t_i^2}-f(t_i)\right|=\max_{i\in 1:q\setminus\{s+1\}}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+t_i^2}<\varepsilon s^2.$$

Отсюда следует, что $\eta_*:=\inf\limits_{z\in\Omega}\eta(z)=0$. Однако не существует допустимой дроби $H(z, t)$, тождественно равной $f(t)$ на T.

КОММЕНТАРИИ

К главе I

Основы линейного программирования были заложены в работе Л. В. Канторовича [17] и нескольких статьях Дж. Данцига конца 40-х — начала 50-х годов. Популяризации этой науки в нашей стране способствовали монографии [9, 11, 13, 39]. Из последних книг, посвященных линейному программированию, отметим [3, 5, 8].

С теорией линейных неравенств более подробно можно ознакомиться по сборнику [23] и монографии [36].

Матричные игры и их связь с линейным программированием обсуждаются в книгах [19, 23, 26].

Классическим руководством по теории линейных чебышевских приближений является монография [31].

Наряду с алгебраическим доказательством основной леммы линейного программирования имеется геометрическое доказательство [57].

Приведенные в данной главе доказательства теоремы 4.1 о существовании решения в задаче линейного программирования и теоремы 11.1 о существовании решения в линейней задаче чебышевского приближения предложены В. Н. Малоземовым. Некоторым обобщениям линейной чебышевской задачи посвящены работы [56, 66].

К главе II

Первые результаты о структуре выпуклых многогранных множеств были получены Минковским, Вейлем, Фаркашем и Моцкином. Современное состояние этого вопроса применительно к задачам оптимизации представлено в сборнике [23] и монографии [32].

Первый алгоритм линейного программирования разработал Л. В. Канторович [17]. Несколько позже Дж. Данциг изобрел свой симплекс-метод. Монография Дж. Данцига [13] и сейчас представляет несомненный интерес.

Для дальнейшего знакомства с методами линейного программирования рекомендуются книги [5, 34, 35] и задачник [16].

Вопрос о борьбе с зацикливанием обсуждается практически во всех руководствах по линейному программированию. Из недавних работ на эту тему отметим [62].

Первые работы по параметрическому линейному программированию появились в 50-е годы. При этом вначале рассматривались простейшие случаи, разобранные нами в § 8 и 9 (см. также [1, 7, 11, 22]).

Современное состояние параметрического программирования отражено в монографиях [40, 42].

Представляет интерес работа [59], в которой идея доказательства теоремы 10.1 использована в гораздо более общей ситуации.

К главе III

Теория нелинейных экстремальных задач развивалась вместе с математическим анализом. Для гладких задач без ограничений дело сводилось к решению системы уравнений. При наличии ограничений-равенств вступал в действие метод множителей Лагранжа. Этот метод обобщается и совершенствуется до настоящего времени.

Литература по нелинейному и, в частности, выпуклому программированию обширна. Упомянем лишь недавние монографии [2, 4, 6, 15, 20, 25, 28, 29, 41], непосредственно примыкающий к данной главе сборник [38] и обзорные статьи [72, 74].

Теория двойственности в математическом программировании рассматривается в книгах [10, 33].

Исследования по выпуклым экстремальным задачам способствовали становлению новой дисциплины — выпуклого анализа. Ему посвящены монографии [14, 30, 32].

В связи с чебышевскими приближениями отметим статьи [52, 53].

Основы квадратичного программирования были заложены в работах [68, 70, 71] (см. также [50, 51]). Дальнейшие результаты представлены в [13, 21, 29, 43].

Более трудная задача невыпуклого квадратичного программирования изучается в статьях [48, 67].

Специальный класс невыпуклых квадратичных задач образуют задачи билинейного программирования. Алгоритмы решения таких задач построены в [58, 60].

К главе IV

Первые работы по дробно-линейному программированию появились в конце 50-х — начале 60-х годов. В них для решения исходной задачи приспосабливались различные варианты симплекс-метода (см., например, [73]). Метод сведения к задаче линейного программирования был предложен в статье [64].

В работе [75] замечено, что один из вариантов симплекс-метода выдает ту же последовательность вершин Ω, что и метод сведения к линейному программированию.

Во всех этих работах авторы ограничивались разысканием точки минимума при условии, что она существует. В такой постановке методы решения приведены в книгах [4, 24, 37].

Методы решения задачи дробно-линейного программирования на неограниченном выпуклом многогранном множестве, когда минимум целевой функции может и не достигаться, с достаточной полнотой разработаны в статьях [45, 49].

Теорема 3.1 об условиях разрешимости задачи дробно-линейного программирования доказана В. Н. Малоземовым и публикуется впервые.

Метод решения задачи дробно-рационального чебышевского приближения, описанный в § 8. называется методом дифференциальной коррекции. Он был предложен в [65]. В [61] установлено, что при выполнении некоторых условий этот метод имеет квадратичную скорость сходимости.

По поводу дальнейших результатов о дробно-рациональных чебышевских приближениях см. статьи [46, 47, 55, 63].

К Добавлению

Теорема существования минимума на выпуклом многогранном множестве Ω для ограниченного снизу полинома степени $r=1$ известна давно, и ее автора указать трудно (см., в частности, [23, с. 176—180]). При $r=2$ и положительно определенной квадратичной части полинома $f(x)$ она тривиальна —

легко проверить, что $f(x)$ равномерно стремится к $+\infty$ при $\|x\| \to +\infty$, а это позволяет свести дело к минимизации $f(x)$ на компакте. Случай неотрицательно определенной главной части сложнее, в чем можно убедиться по доказательству теоремы III.9.1. На сходных идеях строится доказательство существования минимума для произвольного ограниченного снизу на Ω полинома второй степени. Справедливость этого факта, по-видимому, впервые была установлена в статье [70] (см. также [69]).

Изящная теорема из Добавления опубликована в заметке [44]. Первое утверждение этой теоремы одновременно и независимо доказал М. К. Гаврин.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебные пособия, монографии, сборники

1. Абрамов А. М., Капустин В. Ф. Математическое программирование. Л., 1976. 183 с.
2. Аоки М. Введение в методы оптимизации. М., 1977. 343 с.
3. Ашманов С. А. Линейное программирование. М., 1981. 304 с.
4. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М., 1982. 583 с.
5. Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А. Численные методы линейного программирования. М., 1977. 367 с.
6. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М., 1980. 518 с.
7. Вильямс Н. Н. Параметрическое программирование в экономике. М., 1976. 95 с.
8. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Ч. 3. Специальные задачи. Минск, 1980. 368 с.
9. Гасс С. Линейное программирование. Методы и приложения. М., 1961. 303 с.
10. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М., 1971. 351 с.
11. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании. М., 1966. 524 с.
12. Данскин Дж. М. Теория максимина. М., 1970. 200 с.
13. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М., 1966. 600 с.
14. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М., 1981. 384 с.
15. Еремин И. И., Астафьев Н. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М., 1976. 191 с.
16. Заславский Ю. Л. Сборник задач по линейному программированию. М., 1969. 256 с.
17. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. Л., 1939. 64 с.
18. Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., 1959. 344 с.
19. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., 1964. 838 с.
20. Карманов В. Г. Математическое программирование. М., 1980. 256 с.
21. Кюнци Г. П., Крелле В. Нелинейное программирование. М., 1965. 303 с.
22. Линейное и нелинейное программирование / Под ред И. Н. Ляшенко. Киев, 1975. 371 с.

23. Линейные неравенства и смежные вопросы / Под ред. Г. Куна и А. Таккера. М., 1959. 470 с.
24. Лэсдон Л. С. Оптимизация больших систем. М., 1975. 431 с.
25. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М., 1978. 351 с.
26. Оуэн Г. Теория игр. М., 1971. 230 с.
27. Пинскер А. Г., Брыжина Э. Ф. Основы оптимального программирования. Л., 1974. 188 с.
28. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М., 1983. 226 с.
29. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М., 1975. 319 с.
30. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., 1980. 319 с.
31. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев, 1969. 624 с.
32. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., 1973. 469 с.
33. Рубинштейн Г. Ш. Конечномерные модели оптимизации. Курс лекций. Новосибирск, 1970. 228 с.
34. Романовский И. В. Алгоритмы решения экстремальных задач. М., 1977. 352 с.
35. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., 1974. 519 с.
36. Черников С. Н. Линейные неравенства. М., 1968. 488 с.
37. Чернов Ю. П., Ланге Э. Г. Задачи нелинейного программирования с удельными экономическими показателями. Методы и приложения. Фрунзе, 1978. 290 с.
38. Численные методы условной оптимизации / Под ред. Ф. Гилла и У. Мюррея. М., 1977. 290 с.
39. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. Теория и конечные методы. М, 1963. 775 с.
40. Bank B., Guddat J. e. a. Non-linear parametric optimization. Berlin, 1982. 228 p.
41. Martos B. Nonlinear programming. Theory and methods. Budapest, 1975. 279 p.
42. Nožička F., Guddat J. e. a. Theorie der linearen parametrischen Optimierung. Berlin, 1974. 312 S.
43. Паппе С. van de. Methods for linear and quadratic programming. Amsterdam, 1975. 477 p.

Статьи

44. Андронов В. Г., Белоусов Е. Г., Широнин В. М. О разрешимости задачи полиномиального программирования. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1982, № 4, с. 194—197.
45. Белых В. М., Гаврурин М. К. Алгоритм минимизации дробно-линейной функции. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1980, № 19, с. 10—15.
46. Белых В. М., Малоземов В. Н. Наилучшая дробно-рациональная аппроксимация на системе отрезков. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1978, № 7, с. 5—8.
47. Белых В. М., Малоземов В. Н. О размерности множества решений задачи наилучшей дробно-рациональной аппроксимации. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1979, № 1, с. 21—27.
48. Гаврурин М. К. Развитие метода Тейла и Ван де Панне в выпуклом и невыпуклом квадратичном программировании. — В кн.: Исследование операций и статистическое моделирование. Вып. 5. Л., 1979, с. 3—27.
49. Гаврурин М. К. Дробно-линейное программирование на неограниченных множествах. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1982, № 19, с. 12—16.
50. Гаврурин М. К., Малоземов В. Н. Основы теории квадратичного программирования. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1980, № 1, с. 9—16.

51. Даугавет В. А. Модификация метода Вулфа. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1981, т. 21, № 2, с. 504—508.
52. Даугавет В. А., Малоземов В. Н. О характеристических множествах. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1978, № 7, с. 9—14.
53. Даугавет В. А., Малоземов В. Н. Нелинейные задачи аппроксимации. — В кн.: Современное состояние теории исследования операций. М., 1979, с. 336—363.
54. Малоземов В. Н. О положительных полиномах. — В кн.: Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач. Л., 1977, с. 100—103.
55. Малоземов В. Н. Задача синтеза многополосного электрического фильтра. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1979, т. 19, № 3, с. 601—609.
56. Малоземова Л. К. Совместное приближение нескольких функций при наличии ограничений. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1977, № 7, с. 52—56.
57. Малоземова Л. К., Малоземов В. Н. О седловой точке функции Лагранжа. — В кн.: Исследование операций. Вып. 5. М., 1976, с. 23—28.
58. Мухамедиев Б. М. О решении задачи билинейного программирования и отыскания всех ситуаций равновесия в биматричных играх. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1978, т. 18, № 2, с. 351—359.
59. Пинскер А. Г., Кузьмина В. В., Брыжина Э. Ф. Полиномиальная динамическая задача линейного программирования. Деп. ВИНИТИ от 2 июля 1981, № 3284—81.
60. Сокирянская Е. Н. Некоторые алгоритмы билинейного программирования. — Кибернетика, 1974, № 4, с. 106—112.
61. Barrodale I., Powell M. J. D., Roberts F. D. K. The differential correction algorithm for rational l_∞-approximation. — SIAM J. Numer. Anal., 1972, vol. 9, N 3, p. 493—504.
62. Bland R. G. New finite pivoting rules for the simplex method. — Math. of Oper. Res., 1977, vol. 2, N 2, p. 103—107.
63. Brosowski B. Über die Eindeutigkeit der rationalen Tschebyscheff-Approximationen. — Numer. Math., 1965, Bd. 7, H. 2, S. 176—186.
64. Charnes A., Cooper W. W. Programming with linear fractional functionals. — Naval Res. Logist. Quart., 1962, vol. 9, N 3—4, p. 181—186.
65. Cheney E. W., Loeb H. L. Two new algorithms for rational approximation. — Numer. Math., 1961, vol. 3, N 1, p. 72—75.
66. Clashoff K., Roleff K. A new method for Chebyshev approximation of complex-valued functions. — Math. Comput., 1981, vol. 36, N 153, p. 233—239.
67. Cottle R. W., Mylander W. C. Ritter's cutting plane method for nonconvex quadratic programming. — In: Integer and nonlinear programming / Ed. J. Abadie. Amsterdam, 1970, p. 257—283.
68. Dorn W. S. Duality in quadratic programming. — Quart. Appl. Math., 1960, vol. 18, N 2, p. 155—162.
69. Eaves B. C. On quadratic programming. — Manag. Sci., 1971, vol. 17, N 11, p. 698—711.
70. Frank M., Wolfe P. An algorithm for quadratic programming. — Naval Res. Logist. Quart., 1956, vol. 3, N 1—2, p. 95—110.
71. Hildreth C. A quadratic programming procedure. — Naval Res. Logist. Quart., 1957, vol. 14, N 1, p. 79—85.
72. Kuhn H. W. Nonlinear programming: A historical view. — In: Nonlinear programming. SIAM-AMS Proceedings. Vol. IX / Ed. R. W. Cottle and C. E. Lemke. Providence, 1976, p. 1—26.
73. Martos B. Hyperbolic programming. — Naval Res. Logist. Quart., 1964, vol. 11, N 2—3, p. 135—156.
74. Powell M. J. D. Optimization algorithms in 1979. — Lecture Notes in Control and Inf. Sci., 1980, N 22, p. 83—98.
75. Wagner H. M., Yuan J. S. C. Algorithmic equivalence in linear fractional programming. — Manag. Sci., 1968, vol. 14, N 5, p. 301—306.

ИБ № 1959

Марк Константинович Гаврин
Василий Николаевич Малозёмов

Экстремальные задачи с линейными ограничениями

Редактор *Г. И. Чередниченко*
Художественный редактор *О. Н. Советникова*
Технический редактор *Е. Г. Учаева*
Корректоры *Е. К. Терентьева, М. В. Унковская*

Сдано в набор 04.01.84. Подписано в печать 19.06.84. М-11109. Формат бум. 60×90[1]/16. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 11. Усл. кр.-отт. 11,19. Уч.-изд. л. 9,68. Тираж 3466 экз. Заказ № 66. Цена 30 коп. Издательство ЛГУ имени А. А. Жданова. 199164, Ленинград, Университетская наб., 7/9.

Типография Издательства ЛГУ имени А. А. Жданова. 199164, Ленинград, Университетская наб., 7/9.

30 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА