БАЙКАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ

В.И. Зоркальцев

СВОЙСТВА МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ (БЛИЖАЙШИЕ К НАЧАЛУ КООРДИНАТ ТОЧКИ ЛИНЕЙНЫХ МНОГООБРАЗИЙ)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ВЫПУСК 1

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Байкальский государственный университет
Лаборатория математического моделирования

НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
Выпуск 1

В.И. Зоркальцев

СВОЙСТВА МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ (БЛИЖАЙШИЕ К НАЧАЛУ КООРДИНАТ ТОЧКИ ЛИНЕЙНЫХ МНОГООБРАЗИЙ)

Иркутск
Издательский дом БГУ
2025

УДК 51
ББК 22.1
З86

Издается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Автор
Зоркальцев Валерий Иванович – заведующий лабораторией математического моделирования Байкальского государственного университета, доктор технических наук, профессор

Научный редактор
В.Н. Малоземов – почетный профессор Санкт-Петербургского государственного университета, доктор физико-математических наук

Рецензенты
С.П. Епифанов – кандидат физико-математических наук

В.И. Ерохин – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник Военного института (научно-исследовательского) Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского

Л.Д. Попов – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН

Зоркальцев, В.И.
З86 Свойства методов аппроксимации (ближайшие к началу координат точки линейных многообразий) / В.И. Зоркальцев. – Иркутск : Изд. дом БГУ, 2025. – 82 с. (Научные доклады. Математические науки. Вып. 1).

ISBN 978-5-7253-3281-0.

В прикладной математике часто используются модели и вычислительные методы, опирающиеся на задачи поиска ближайших к началу координат точек линейного многообразия. В этих задачах могут применяться различные определения понятия «близость». Это может быть сумма модулей компонент (метод наименьших модулей) или квадрат евклидовой нормы вектора линейного многообразия (метод наименьших квадратов). Применяется минимизация чебышевской и гёльдеровской норм. В каждой из указанных минимизируемых функций можно варьировать положительные весовые коэффициенты при компонентах векторов. Используются и другие формулировки задач поиска ближайших к началу координат точек линейного многообразия. Автор в течение многих лет проводил исследования свойств и взаимосвязей решений таких задач. В данной книге обобщены результаты этих исследований. Приводится ряд фактов о несимметричных проекциях начала координат на линейное многообразие. Особое внимание уделено двойственным задачам в проектировании на линейное многообразие. Рассмотрены некоторые области приложений полученных результатов.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-7253-3281-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первой прикладной математической задачей, с которой автор этой книги познакомился еще студентом, была оценка параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов. Затем в течение многих лет доводилось применять метод наименьших квадратов в различных прикладных работах. Это были экономические и энергетические модели, алгоритмы вычислительной математики.

Во многих разработках были неуместны использовавшиеся в литературе вероятностные обоснования метода наименьших квадратов и конкурирующих с ним постановок. Анализируемые экономические показатели, тренды и сезонные колебания производства, запасов и потребления энергоресурсов, многолетние ряды наблюдений метеорологических данных не позволяли «без натяжек» считать, что это случайные выборки. Часто данные имели просто уникальный характер. При этом в задачах аппроксимации так называемый «остаточный член» зависел не столько от действия «случайных факторов», сколько от состава используемых аппроксимирующих функций.

Нельзя было пользоваться вероятностным обоснованием при применении процедуры наименьших квадратов в вычислительных методах, в разрабатывавшихся алгоритмах оптимизации, в алгоритмах решения нелинейных систем, при формировании сбалансированных показателей математических моделей.

Конечно, во многих других случаях вероятностно-статистический подход к обоснованию метода наименьших квадратов, введенный еще Гауссом, может считаться уместным. Этот подход представлен в книгах А.С. Чеботарева [1], Н.И. Идельсона [2], Ю.В. Линника [3] и многих других авторов (например, [4–6]). Такой путь обоснования методов прочно вошел в учебники. Впрочем, имеются и критические публикации по вероятностно-статистическому обоснованию метода наименьших квадратов и конкурирующих с ним постановок (представленные, например, в книге [7]). Почему-то остались незамеченными в учебной литературе и критика вероятностного обоснования метода наименьших квадратов самого Гаусса, изначально введшего такое обоснование [8].

Имеется также большое количество публикаций по конкурирующим с методом наименьших квадратов постановкам, в том числе по методу наименьших модулей (например, [9–12]), по чебышевской аппроксимации [13–21]. Выбор одной из конкурирующих постановок часто имел явный произвол. Это происходило и из-за того, что сам факт «случайности» и постулируемые законы вероятности реализаций «остаточного члена» при аппроксимациях нельзя было достоверно установить.

Неизбежно приходилось размышлять и о проблеме выбора весовых коэффициентов для данных разных наблюдений. Далеко не всегда эти весовые коэффициенты можно было связать только с точностью наблюдений.

В связи с этим возникают вопросы другого плана: как соотносятся решения, получаемые при упомянутых выше и других возможных постановках? какими свойствами, преимуществами и недостатками обладают эти решения? Результаты исследований таких вопросов представлены в данной книге.

Приводимые математические утверждения (теоремы, леммы) даются без доказательств. Акцент делается на пояснение смысла этих утверждений. Иногда приводятся основные идеи доказательств. Полные доказательства теорем и лемм можно найти в указанных статьях автора этой книги.

Используемые обозначения вводятся последовательно. В каждом новом разделе – только новые обозначения, которые будут применяться в дополнение к введенным в предыдущих разделах. В каждом разделе формулы нумеруются подряд начиная с первой. При ссылках на формулы из других разделов используется двойная нумерация с указанием номера раздела и номера формулы в этом разделе.

Автор выражает благодарность Е.Г. Анциферову, Н.Н. Астафьеву, В.П. Булатову, А.И. Голикову, Ю.Г. Евтушенко, И.И. Еремину, В.Н. Жадану, В.Н. Малоземову, С.П. Шарому и многим другим коллегам, обсуждения исследований с которыми были очень важны для формирования представленных здесь результатов. Особо хотелось бы поблагодарить безымянных для меня благожелательных рецензентов моих статей, советы и замечания которых способствовали улучшению изложения материала. Огромную работу по редактированию текста проделал мой сын, магистрант кафедры фундаментальной и прикладной лингвистики Новосибирского государственного университета А.В. Зоркальцев. Автор благодарен кандидату физико-ма-

тематических наук С.П. Епифанову, доктору физико-математических наук Л.Д. Попову, доктору физико-математических наук В.И. Ерохину за оказанную поддержку в издании этой книги, за рецензии и высказанные замечания. Очень ценными были советы научного редактора книги, почетного профессора Санкт-Петербургского государственного университета, доктора физико-математических наук В.Н. Малоземова.

1. О СОДЕРЖАНИИ НАУЧНОГО ДОКЛАДА

В математическом моделировании и в вычислительных методах часто используются задачи поиска ближайших к началу координат точек линейного многообразия. Эти задачи могут формулироваться в существенно различных вариантах, выбор между которыми является часто только проявлением субъективных предпочтений, исторически сложившихся пристрастий разработчика. Обычно нет абсолютно неоспоримых аргументов в пользу выбранной постановки.

В связи с этим возникают вопросы: насколько различаются решения, получаемые при разных конкурирующих постановках? какими свойствами, достоинствами, недостатками они обладают? Приводимые в данной книге факты являются в основном систематизацией результатов исследований автора, опубликованных ранее [22–35]. Приводятся и новые факты, в том числе по гёльдеровским, октаэдральным и чебышевским несимметричным нормам и порождаемым ими проекциям, по использованию теории двойственности в рассматриваемых задачах.

Исследуются три вида постановок обсуждаемой проблемы:

1) поиск векторов линейного многообразия с максимальными (не расширяемыми) наборами нулевых компонент;

2) поиск векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент;

3) минимизация штрафных за отклонения от нулевого вектора функций.

Первые две из этих постановок широко не используются при моделировании и в вычислительных методах. Они, как будет показано, важны для описания свойств и взаимосвязей решений, получаемых путем минимизации различных штрафных функций на линейном многообразии.

В данной книге аксиоматически определяется семейство возможных штрафных дифференцируемых функций, в которое входят гёльдеровские и, как их частный случай, евклидовы нормы. Минимизация гёльдеровской нормы на линейном многообразии называется задачей поиска гёльдеровской проекции начала координат на линейное многообразие. Минимизация евклидовых норм является задачей поиска евклидовых проекций. Поиск евклидовой проекции означает, что обсуждаемая проблема решается методом наименьших квадратов.

Рассматривается также два множества не дифференцируемых штрафных функций. Это октаэдральные и чебышевские нормы векторов, которые являются предельными случаями гёльдеровских норм. Одна из целей представленных исследований состояла в изучении свойств и взаимосвязей множеств гёльдеровских, евклидовых (метод наименьших квадратов), октаэдральных (метод наименьших модулей) и чебышевских проекций начала координат на линейное многообразие.

Следует подчеркнуть, что в данной книге рассматриваются множества евклидовых, октаэдральных, чебышевских норм, поскольку в каждой из них могут варьироваться положительные весовые коэффициенты при компонентах векторов. Множество гёльдеровских норм образуется также в результате варьирования степенного коэффициента гёльдеровской нормы. Таким образом, имеем множества евклидовых, октаэдральных, чебышевских, гёльдеровских проекций начала координат на одно и то же линейное многообразие.

Векторами линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент называются такие векторы, у которых нельзя уменьшить абсолютное значение любой из компонент, оставаясь в рамках данного многообразия, не увеличив абсолютное значение какой-либо другой компоненты. Это наиболее общее из рассматриваемых в данной работе определение ближайших к началу координат точек линейного многообразия. Согласно приводимым далее утверждениям, ближайшие к началу координат векторы линейного многообразия при всех других рассматриваемых постановках находятся в множестве векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент.

В начале данной книги представлены результаты исследований структур множества векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. В двух- и трехмерном пространствах это множество выпуклое. На примерах показано, что это множество может быть невыпуклым. Оно обычно и бывает невыпуклым, начиная с четырехмерного пространства. При этом данное множество всегда является замкнутым, связным. Оно состоит из объединения конечного числа политопов, выпуклых оболочек конечного числа векторов, составляющих их вершины.

Вершинами этих политопов являются векторы с несужаемыми наборами ненулевых компонент. Это одна из причин специального выделения первой из указанных трех типов постановок рассматриваемой общей проблемы.

Как известно, важность теоретических результатов проявляется в их последствиях. Для примера можно привести одно из таких, казалось бы, отдаленных следствий представленных здесь результатов. Речь идет о доказательстве ограниченности множества векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Следовательно, ограниченным является и множество евклидовых проекций начала координат на линейное многообразие, получаемое за счет варьирования положительных весовых коэффициентов в евклидовой норме. Этот факт оказался очень полезным для разработки и теоретического обоснования алгоритмов оптимизации методом внутренних точек [36; 37].

Ныне алгоритмы внутренних точек считаются наиболее эффективными в вычислительном отношении, удобными для программных реализаций. В этих алгоритмах при решении задач линейного программирования поиск направления улучшения решений на каждой итерации можно представлять в виде задачи вычисления евклидовой проекции начала координат на линейное многообразие.

Оригинальность алгоритмов метода внутренних точек состоит в итеративных изменениях весовых коэффициентов минимизируемой евклидовой нормы при поиске направлений корректировки решения. Эта особенность затрудняет использование стандартных методов теоретического обоснования алгоритмов оптимизации [38–41], базирующихся на использовании теоремы Пифагора или неравенства треугольника. В алгоритмах внутренних точек [36; 37] на каждой итерации «своя» евклидова норма, что не позволяет пользоваться единой на всех итерациях теоремой Пифагора, единой формулировкой понятия ортогональности.

Установленная ограниченность множества евклидовых проекций на линейное многообразие стала важным фактом для доказательства сходимости итеративно вырабатываемых приближений к оптимальным решениям исходной и двойственной задач линейного программирования. При этом было установлено, что вырабатываются особые решения исходной и двойственной задач оптимизации – относительно внутренние точки множеств оптимальных решений. Этим термином называются точки множества внутренние относительно минимального линейного многообразия, содержащего данное множество [42].

Свойство алгоритмов внутренних точек вырабатывать именно относительно внутренние точки оптимальных решений полезно в ряде приложений. Один из примеров эффективного использования этого свойства – разработанный автором данной книги ([32–35; 43; 44]) алгоритм поиска чебышевской проекции начала координат на линейное многообразие, не нуждающийся в условии Хаара [45; 46]. Алгоритм базируется на поиске относительно внутренних точек оптимальных решений конечной последовательности задач линейного программирования. Применение такого алгоритма существенно расширяет и облегчает чебышевскую аппроксимацию. Этот алгоритм представлен в конце данной книги.

Два класса приложений. Первый класс составляют задачи поиска псевдорешений несовместной системы линейных уравнений. Сюда входит задача построения линейной зависимости результирующего показателя от конечного набора показателей факторов по располагаемым данным. Линейным многообразием, исследуемым в данной книге, будет множество векторов «невязок» несовместной системы линейных уравнений.

Второй класс образуют задачи поиска решений совместной системы линейных уравнений, наиболее близких к нулевому вектору. Как известно, множество решений системы линейных уравнений образует также линейное многообразие. К рассматриваемому классу относятся задачи согласования в балансовых моделях располагаемых несбалансированных данных. Требуется подобрать такие сбалансированные данные, которые были бы по возможности максимально близки к располагаемым несбалансированным данным. Эта задача возникает при формировании моделей межотраслевых балансов (МОБ) [47–51] в задачах оценки параметров функционирования технических систем, в том числе элекроэнергетических [52–56], трубопроводных систем водоснабжения и теплоснабжения [57–60], нефтеперерабатывающих предприятий [61].

Рассматриваемые штрафные функции. Рассматриваемый в данной книге класс дифференцируемых штрафных функций включает все гёльдеровские нормы. Многие факты обобщаются на некоторые не дифференцируемые функции, что использовалось в [23]. В предлагаемом исследовании было принято решение не усложнять текст такими модификациями. Исключение составляют два вида функций, являющихся предельными для гёльдеровских норм. Это октаэдральные и чебышевские нормы.

Подчеркнем, что в составе штрафных функций в данной книге рассматриваются функции от вектора переменных, возрастающие при увеличении любой положительной компоненты и при уменьшении любой отрицательной компоненты вектора. Таким свойством обладают не все нормы, в том числе им не обладают энергетические нормы, за исключением частных случаев, когда эти нормы являются евклидовыми. Энергетические нормы, не совпадающие с евклидовыми, здесь не рассматриваются.

Некоторым исключением являются чебышевские нормы. Для них это свойство выполняется в ослабленном виде – при возрастании до некоторой величины одной из положительных компонент вектора значение чебышевской нормы может не меняться, но обязательно начнет возрастать после дальнейшего увеличения этой компоненты. Аналогичные события происходят при уменьшении отрицательной компоненты, т.е. при некотором уменьшении такой компоненты значение чебышевской нормы может не меняться, но обязательно начнет увеличиваться после дальнейшего уменьшения этой компоненты.

Чебышевская аппроксимация, не нуждающаяся в условии Хаара. Долго не удавалось вовлечь в исследования чебышевские проекции. Дело в том, что исходная, обычно рассматриваемая задача линейного программирования поиска чебышевской проекции на линейное многообразие, может иметь не единственное решение, и среди ее решений могут оказаться точки многообразия, не находящиеся среди векторов с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Такая «нехорошая» неединственность доставляла много неудобств при чебышевских линейных и нелинейных аппроксимациях.

Эти неудобства преодолевались путем введения условия Хаара [45; 46]. Это условие фактически является постулируемым предположением невырожденности задачи линейного программирования, к которой сводится проблема определения чебышевской проекции. Условие Хаара гарантирует существование только одного решения у задачи поиска чебышевской проекции точки на линейное многообразие. Это условие не всегда легко проверить, и не ясно, что делать, когда оно не выполняется.

Трудности отпали, когда автору данной книги удалось разработать алгоритм получения однозначной чебышевской проекции точки на линейное многообразие, независимо от того, выполняется или нет условие Хаара [32–35; 43; 44]. Этот алгоритм основывается на поиске относительно внутренних точек [42] оптимальных решений конечной последовательности задач линейного программирования. Свойством вырабатывать именно относительно внутренние точки оптимальных решений задач линейного программирования обладают, как отмечалось, алгоритмы внутренних точек.

Используя предложенный алгоритм, можно осуществлять однозначную чебышевскую аппроксимацию как в случае выполнения, так и в случае невыполнения условия Хаара. Отпадает необходимость проверки этого условия, а такую проверку не всегда легко осуществить. Расширяется и область применения чебышевской аппроксимации. Например, теперь чебышевское приближение можно применять и в случаях, когда условие Хаара заведомо не выполняется.

Было доказано, что предложенный алгоритм получения всегда однозначных чебышевских проекций дает проекции, находящиеся среди множества векторов линейного многообразия с минимальными по Парето абсолютными значениями компонент. Это свидетельствовало о «правильности» предлагаемой однозначной чебышевской проекции.

Доказано также, что для любой чебышевской проекции (т.е. при любом наборе положительных весовых коэффициентов в чебышевской норме) найдется евклидова норма (т.е. такой вектор положительных весовых коэффициентов в евклидовой норме), при которой данная чебышевская проекция будет евклидовой проекцией. Оказалось справедливым и обратное утверждение: для каждой евклидовой проекции начала координат на линейное многообразие (с конкретным набором весовых коэффициентов в евклидовой норме) существует совпадающая с ней чебышевская проекция начала координат на линейное многообразие, т.е. множества евклидовых и чебышевских проекций, получаемые в результате варьирования весовых коэффициентов в евклидовой и чебышевской нормах, совпадают.

Указанные свойства означают, что аппроксимация методом наименьших квадратов и чебышевская аппрооксимация могут рассматриваться как равносильные. Результаты расчетов по одной из них можно получить как итог расчета по другой аппроксимации. Этот любопытный результат также может служить и обоснованием «правильности» разработанного алгоритма однозначной чебышевской проекции, не использующего условие Хаара.

Было доказано еще одно утверждение [35], которое может служить не только подтверждением «правильности» разработанного правила получения чебышевской проекции, но и еще одним альтернативным алгоритмом построения такой чебышевской проекции. Доказано, что гёльдеровские проекции на линейное многообразие при стремлении степенного коэффициента гёльдеровской нормы к бесконечности сходятся к предельной точке. И этой точкой является предложенная чебышевская проекция в качестве единственно «правильной». При этом в гёльдеровских и чебышевской нормах должны использоваться одни и те же весовые коэффициенты. Этот непростой в доказательстве результат идейно связан с известным утверждением о сходимости гёльдеровских норм вектора к чебышевской норме при стремлении степенного коэффициента гёльдеровских норм к бесконечности.

Гёльдеровские, евклидовы, октаэдральные и чебышевские несимметричные проекции. Для представленных в данной книге разработок и теоретических результатов возможны разные полезные обобщения. Одно из них – использование гёльдеровских, евклидовых, октаэдральных и чебышевских несимметричных норм, имеющих разные весовые коэффициенты при одной и той же компоненте вектора, когда эта компонента принимает положительное и отрицательное значения. Во многих прикладных задачах есть резон при аппроксимациях по-разному штрафовать за отклонения в сторону превышения и в сторону занижения. В данной книге будет представлено такое направление обобщений задач поиска гёльдеровских, евклидовых, октаэдральных и чебышевских проекций.

При использовании разных положительных штрафных коэффициентов требование линейной однородности норм при умножении векторов на вещественный скаляр не выполняется (на этот факт обратил внимание С.П. Шарый). Вместо этого требования справедливо более слабое свойство – линейной однородности при умножении на неотрицательный скаляр. Поэтому получаемые в результате такой модификации из норм функции будем называть несимметричными нормами. Соответственно векторы линейного многообразия с минимальными гёльдеровскими, евклидовыми, октаэдральными, чебышевскими несимметричными нормами будем называть гёльдеровскими, евклидовыми, октаэдральными, чебышевскими несимметричными проекциями.

Ближайшие к началу координат точки выпуклых полиэдров. Другое направление обобщения – исследование свойств ближайших к началу координат векторов у более общих, чем линейное многообразие множеств. Практический и теоретический интерес представляет изучение свойств ближайших к началу координат точек не только линейного многообразия, но и других, прежде всего выпуклых множеств. В данную книгу включены только материалы, относящиеся к случаю линейных многообразий. Этот случай полезен сам по себе, поскольку объектом многих моделей и используемых вычислительных методов являются системы линейных уравнений. Этот случай может рассматриваться как основа при использовании процедур линеаризации, для моделирования и в процессе применения вычислительных методов в нелинейных ситуациях. Существенно усложняющим моментом является использование ограничений в форме неравенств.

Многие из представленных здесь результатов удалось обобщить на задачи поиска ближайших к началу координат точек выпуклых полиэдров [62; 63]. Их образуют множества решений систем линейных неравенств. Как известно, любую систему линейных уравнений можно представить в виде системы линейных неравенств. А обратное неверно: систему линейных неравенств далеко не всегда можно представить в виде системы линейных уравнений. Системы линейных неравенств являются более общим объектом, чем системы линейных уравнений. Такое обобщение важно для многих приложений.

Можно надеяться, что в будущем удастся представить в виде монографии исследования свойств ближайших к началу координат точек выпуклых полиэдров.

Пояснения. Данная книга предназначена прежде всего для научных работников, занимающихся задачами аппроксимации, вычислительной математикой, математическим моделированием, линейной алгеброй. Она может служить учебным пособием для студентов и аспирантов.

В следующем разделе обсуждается на примерах происхождение исследуемых проблем. Раздел имеет цель показать, что содержательно очень разные задачи прикладной математики (в математическом моделировании и в вычислительных методах) представляются в виде общей геометрической проблемы – поиска ближайших к нулевому вектору точек линейного многообразия. Вторая цель – показать, что эта общая геометрическая проблема имеет разные варианты конкретных постановок.

2. ИСХОДНЫЕ ОБЪЕКТЫ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Обозначения и определения. Конечномерное линейное вещественное пространство размерности n обозначим R^n, где n – заданное натуральное число. Основным объектом в данной книге будет линейное многообразие Y из R^n. Под линейным многообразием понимается множество векторов в R^n, замкнутое относительно операции аффинной комбинации векторов (линейной комбинации с весами, в сумме равными единице): если векторы x^1 и x^2 находятся в Y, то в Y находится и вектор $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ при любом вещественном λ.

Этому общему определению линейного многообразия соответствуют многие алгебраические формы его задания. Приведем две из них, наиболее часто используемые.

1. Сдвиг на вектор c из R^n образа матрицы G размера $n\times r$ при некотором натуральном числе r :

$$Y = \{y = c - Gx : x \in R^r\}. \quad (1)$$

2. Множество решений системы линейных уравнений:

$$Y = \{y \in R^n : Ay = b\}, \quad (2)$$

где заданы вектор $b \in R^k$ и матрица A размера $k\times n$, при некотором натуральном числе k.

Можно отметить, что приведенные алгебраические определения линейных многообразий задают одно и то же множество в том и только в том случае, если

$$Ac = b,\ AG = 0,\ rank\ A + rank\ G = n, \quad (3)$$

где 0 – матрица размера $k\times r$, состоящая из нулевых коэффициентов; $rank$ в данном случае – максимальное число линейно независимых векторов столбцов (и векторов строк) матрицы, стоящей после этого символа.

Линейное подпространство, параллельное многообразию Y, обозначим S. Напомним, линейным подпространством называется множество векторов в R^n замкнутое относительно операции линейных комбинаций: если векторы x^1 и x^2 находятся в S, то в находится и вектор $\lambda^1 x^1 + \lambda^2 x^2$ при любых вещественных λ^1 и λ^2. Линейное подпространство, параллельное рассматриваемому линейному многообразию, можно определить в виде сдвига этого линейного многообразия на вектор $(-y)$ при любом $y \in Y$:

$$S = Y - y. \tag{4}$$

Для алгебраической формы (1) задания линейного многообразия параллельное линейное подпространство является образом матрицы G:

$$S = \{s = Gz: \ z \in R^r\}. \tag{5}$$

Для алгебраической формы (2) параллельное линейное подпространство определяется как ядро, называемое также нуль-пространство матрицы A. Этими терминами (ядро матрицы, нуль-пространство матрицы) называется множество решений однородной системы линейных уравнений, порождаемой исходной системой линейных уравнений:

$$S = \{s \in R^n: As = 0\}. \tag{6}$$

Здесь 0 – нулевой вектор (все компоненты которого равны нулю). Отметим, что линейное многообразие Y будет линейным подпространством в том и только в том случае, если $0 \in Y$.

Ортогональное дополнение (дополняющее подпространство, ортогональное S) обозначим $S^\perp$. Это линейное подпространство состоит из векторов R^n ортогональных всем векторам из S:

$$S^\perp = \{z \in R^n : \textstyle\sum_1^n s_j z_j = 0, \text{ для всех } s \in S\}. \tag{7}$$

Для алгебраических форм (5), (6) задания линейного подпространства ортогональное подпространство определяется как нуль-пространство транспонированной матрицы G и как образ транспонированной матрицы A:

$$S^\perp = \{z \in R^n : G^T z = 0\}, \tag{8}$$

$$S^\perp = \{z = A^T u: \ u \in R^k\}. \tag{9}$$

Поскольку ортогональным дополнением к ортогональному дополнению подпространства является исходное подпространство, то подпространства S и $S^\perp$ будем называть взаимно ортогональными. Два линейных многообразия будут взаимно ортогональными, если взаимно ортогональны параллельные им линейные подпространства.

Размерность линейного многообразия определяется как размерность линейного подпространства, ему параллельного. Считаем далее, что размерность линейного многообразия Y равна некоторому натуральному m:

$$m = rank\ Y = rank\ S = n - rank\ S^\perp. \tag{10}$$

В данном случае символ *rank* обозначает размерность линейного подпространства, либо линейного многообразия, стоящих за этим символом. Размерностью линейного подпространства называется максимальное число линейно независимых векторов в этом подпространстве. Размерность линейного многообразия, согласно (10), равна размерности линейного подпространства параллельного рассматриваемому линейному многообразию.

Основываясь на введенных здесь двух способах алгебраического задания линейного многообразия, рассмотрим два типа задач, сводящихся к обсуждаемой геометрической проблеме.

1. Линейная аппроксимация. Рассмотрим представление линейного многообразия в виде (1).

В качестве первого примера уместно будет выделить задачу вычисления коэффициентов линейной аппроксимации зависимости результирующего показателя от показателей факторов по располагаемому набору наблюдений. Такую зависимость принято называть линейной регрессией.

Пусть $j = 1, \ldots, n$ номера наблюдений, c – вектор значений результирующего показателя в наблюдениях, коэффициент g_{ji} матрицы G соответствует полученному (в результате наблюдений или экспериментов) значению фактора $i = 1, \ldots, r$ в наблюдении $j = 1, \ldots, n$. Требуется определить значения коэффициентов линейной аппроксимации, составляющих вектор x, при которых минимальны (в каком-то из рассматриваемых далее смыслах) абсолютные значения всех компонент вектора невязок y.

В качестве конкретизаций этой общей постановки можно рассматривать минимизацию взвешенной суммы модулей отклонений (метод наименьших модулей), минимизацию взвешенной суммы квадратов отклонений (метод наименьших квадратов), минимизацию максимальных взвешенных абсолютных отклонений (чебышевская аппроксимация):

$$\sum_1^n h_j|y_j| \to min, \qquad y \in Y; \tag{11}$$

$$0{,}5 \sum_1^n (h_j y_j)^2 \to min, \quad y \in Y; \tag{12}$$

$$max\ h_j|y_j| \to min, \qquad y \in Y. \tag{13}$$

Здесь h_j – заданные положительные весовые коэффициенты. Весовые коэффициенты h_j могут иметь различный смысл. Часто их интерпретируют как показатели точности наблюдений.

Например, в моделях оценки режима функционирования сложных технических систем (электрических, трубопроводных и др.) по располагаемым измерениям отдельных показателей в разных точках системы весовые коэффициенты принято задавать равными величинам обратным к погрешностям используемых измерительных приборов [52–61]. Весовые коэффициенты могут также служить в качестве управляемых параметров для достижения желательных результатов, в целях соизмерения показателей разной природы, разных физических размерностей, для учета разной информативности наблюдений [23].

Целевые функции в задачах (11), (13) являются октаэдральной и чебышевской нормами. Поэтому решения этих задач будем называть октаэдральной и, соответственно, чебышевской проекцией (если решение не единственное, то «проекциями») начала координат на линейное многообразие.

В задаче (12) в качестве целевой функции используется не евклидова норма, а квадрат евклидовой нормы. При любом возрастающем (увеличивающемся при увеличении аргумента, в данном случае абсолютной величины любой компоненты вектора переменных) преобразовании значения исходной целевой функции оптимальное решение любой задачи оптимизации не меняется. Поэтому задача (12) равносильна минимизации евклидовой нормы, получаемой в результате извлечения корня квадратного из целевой функции этой задачи. Данный факт позволяет называть оптимальное решение задачи (12) евклидовой проекцией начала координат на линейное многообразие.

Во многих работах исследуются задачи аппроксимации в более сложных, в том числе нелинейных постановках, для которых приведенные здесь постановки являются важной теоретической и вычислительной основой. Как известно, первой важной прикладной математической проблемой в истории человечества была задача оценки параметров движения планет по данным астрономических наблюдений. Первая известная строгая формулировка этой проблемы сделана независимо итальянским (хорватом или, по другим данным, сербом по национальности) физиком Босковичем и французским ученым Лапласом. Они сформулировали эту проблему в виде задачи минимизации суммы абсолютных отклонений наблюдаемых значений параметров орбит от расчетных значений [64]. Аппроксимация на основе минимизации суммы модулей отклонений ныне используется и исследуется во многих работах (например, [9–12]).

В своей статье, посвященной методу наименьших квадратов в задаче оценки параметров орбит планет, К.Ф. Гаусс ввел используемые до сих пор способы обоснования метода наименьших квадратов статистическими критериями (как способ получения асимптотически несмещенных, эффективных оценок). В другой своей статье, посвященной (так же по названию) методу наименьших квадратов в задаче триангуляции, он подверг критике данные им же ранее подходы в обосновании метода наименьших квадратов (из-за того, что эти подходы предполагали наличие больших объемов статистически однородных реализаций), и предложил интерпретировать метод наименьших квадратов как использование одной из возможных штрафных функций за отклонение от нуля погрешностей аппроксимаций. К.Ф. Гаусс отмечал, что можно было использовать минимизацию сумм четвертой, восьмой и т.д. степеней от погрешностей аппроксимации, но вторая удобна в вычислительном отношении [8].

Линейная аппроксимация методом наименьших квадратов сводится к относительно простой вычислительной задаче поиска решения системы линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей. Оптимальное значение для задачи (12) вектора переменных x при задании линейного многообразия в форме (1) определяется как решение следующей системы линейных уравнений:

$$(G^T HG)x = G^T Hd, \tag{14}$$

где

$$H = diag\ h \tag{15}$$

является диагональной матрицей размера n, составленной из весовых коэффициентов. Вычислив вектор x, из (1) можем непосредственно вычислить вектор y.

Действительно, задача (12) с линейным многообразием (1) сводится к безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции:

$$f(x) = 0{,}5(d - Gx)^T H(d - Gx). \tag{16}$$

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы вектор x был точкой минимума этой функции, является равенство нулевому вектору градиента (вектора частных производных) этой функции:

$$\nabla f(x) = 0. \tag{17}$$

Это приводит к системе линейных уравнений (14).

Метод наименьших квадратов активно используется в различных прикладных задачах. По этому методу имеется много научной и учебной литературы. Особенно много публикаций посвящено исследованиям свойств этого метода с позиций математической статистики, алгоритмам вычислений (например, [1–6]). Вместе с тем нельзя считать, что этот метод исчерпывающе изучен, в частности мало исследовано влияние на получаемые решения весовых коэффициентов при квадратах отклонений. Материалы данной книги отчасти восполняют потребность в таких исследованиях.

Чебышевской аппроксимации также уделено большое внимание в научной литературе [13–21]. Поиск чебышевской аппроксимации, так же, как и задача минимизации суммы модулей, сводится к нетрудным в вычислительном отношении для нынешнего времени задачам линейного программирования. Сложности порождает возможная неединственность решения у задач линейного программирования. При этом у чебышевской аппроксимации среди этих неединственных решений могут оказаться явно неудовлетворительные в содержательном отношении. В качестве противодействия этому используется так называемое условие Хаара [45; 46], согласно которому чебышевская аппроксимация должна применяться только в случае, если эта задача гарантированно имеет единственное решение. Это не всегда легко проверить и не ясно, что делать, если такое условие не гарантируется.

В связи с рассмотренными тремя способами линейной аппроксимации возникают следующие вопросы.

1. Как соотносятся между собой решения, получаемые методом наименьших модулей, наименьших квадратов, на основе чебышевской аппроксимации?

2. Как влияет выбор вектора весовых коэффициентов h на получаемые решения?

3. Что означает неоднозначность решения задач аппроксимации методом наименьших модулей и чебышевской аппроксимации, какое из решений следует использовать, когда решение не единственное?

4. Как взаимосвязаны решения в указанных здесь формулировках и получаемые при иных, в том числе более общих постановках (минимизация штрафных функций широкого класса, включая гёльдеровские нормы, Парето-оптимизация)?

5. Какими особенностями, достоинствами и недостатками обладают решения, получаемые при различных конкурирующих постановках?

Два источника неединственности решения. Следует различать два вида возможной неединственности решения задачи поиска ближайшей к началу координат точки линейного многообразия при задании многообразия в виде (1). Во-первых, это может быть неединственность решения при рассматриваемой постановке по вектору переменных y. Тогда будет неединственность и по вектору переменных x. Каждому решению по вектору переменных y будет соответствовать свое решение (возможно, неединственное) по вектору переменных x. Такая неединственность решения может иметь место для задач минимизации октаэдральной (11) и чебышевской (13) норм. Для задачи (12), равносильной минимизации евклидовой нормы на линейном многообразии, такой неединственности быть не может. Во-вторых, неединственность решения по вектору переменных x при фиксированном векторе переменных y возможна и будет иметь место, если у матрицы G столбцы являются линейно зависимыми векторами, т.е. если $rank\ G < r$. Для линейной аппроксимации в виде задачи минимизации суммы квадратов отклонений (12) возможна только такая неоднозначность решений.

2. Поиск решения системы линейных уравнений, максимально приближенного к заданному недопустимому решению. Рассматривается представление линейного многообразия в виде (2).

Пусть требуется найти вектор показателей $z \in R^n$, удовлетворяющий системе линейных уравнений:

$$Az = g, \tag{18}$$

где заданными являются матрица A размера $k \times n$ и вектор $g \in R^k$. Имеется набор значений переменных в виде компонент вектора $s \in R^n$, которые являются «желательными» в качестве решения, но не удовлетворяющими системе линейных уравнений (18). Требуется найти вектор z, удовлетворяющий этой системе, компоненты которого расходились бы минимально по абсолютной величине с соответствующими компонентами вектора s.

Используем замену переменных. Введем вектор расхождения желаемых и достигаемых значений переменных исходной задачи:

$$y = z - s. \tag{19}$$

Тогда при

$$b = g - As \tag{20}$$

проблема сводится к поиску ближайшего к началу координат вектора линейного многообразия, заданного условием (2).

В частности, в виде системы линейных уравнений представляется МОБ. Обсуждаемая здесь задача поиска допустимых решений, максимально приближенная к заданному недопустимому решению, имеет место как при составлении отчетного МОБ [47–49], так и при составлении прогнозного. При формировании отчетного (за прошлые годы) МОБ в результате сбора, обработки, агрегировании исходных данных по разным, в том числе вполне объективным причинам, получается набор показателей, неудовлетворяющий точно условиям модели МОБ. Требуется их, по возможности минимальная, корректировка, чтобы были выполнены все условия модели МОБ. В [50] представлена программная разработка, осуществляющая решение такой задачи путем минимизации чебышевской нормы вектора отклонений.

При прогнозировании и планировании развития экономики страны независимо вырабатываемые разными специалистами прогнозы и пожелания по отдельным показателям должны увязываться в единую систему допустимых вариантов. Для этого требуется решение задачи определения минимальных корректировок несбалансированных прогнозных показателей, чтобы они после этого стали удовлетворять условиям МОБ. В конце 1980-х гг. очень часто менялись приоритеты в предстоящем развитии советской экономики. Это приводило к частым изменениям желаемых значений показателей перспективного межотраслевого баланса. Требовались частые корректировки прогнозируемых (планируемых) МОБ на будущие периоды. Для ускорения процесса корректировки перспективного МОБ России был разработан для Института экономики при Госплане РСФСР вычислительный комплекс [51], осуществляющий поиск требуемых сбалансированных решений МОБ, максимально приближенных к заданным несбалансированным решениям на основе метода наименьших квадратов.

Решение задачи поиска ближайшей к началу координат точки линейного многообразия в виде (2) методом наименьших квадратов также может базироваться на решении системы линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей. Задача (12) с линейным многообразием (2) может быть преобразована в вычислительную проблему безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции в виде двойственной к (12) задачи. Далее более подробно будут рассмотрены факты теории двойственности для задач поиска гёльдеровских проекций на линейные многообразия, в том числе евклидовых проекций.

Приведем только схему вычислений для обсуждаемой здесь задачи (12) при определении линейного многообразия в форме (2). В данном случае требуется сначала решить систему линейных уравнений относительно вектора $v \in R^k$, состоящего из множителей Лагранжа ограничений задачи:

$$(A\mathrm{H}^{-1}A^t)v = b. \tag{21}$$

Вычислив вектор v, затем можем определить значение искомого вектора по правилу:

$$y = \mathrm{H}^{-1} A^T v. \tag{22}$$

Задачи минимальных корректировок показателей балансовых экономических моделей возникают при переходе от моделей одной детализации (например, 200 отраслевых) к моделям другой детализации (допустим, к 30-ти отраслевым). Нет и не может быть корректных во всех отношениях процедур для таких переходов [65; 66], поэтому неизбежно использование процедур корректировки показателей типа приведенной выше.

Процедуры поиска минимальных корректировок в балансовых моделях могут быть полезны для разного рода содержательных экономических разработок. В работе «Рента, налоги и структура цен» [67] изложена балансовая модель формирования структуры цен в экономике (на базе МОБ) в виде задачи минимизации расхождения желаемых и сбалансированных ценовых значений, финансовых потоков.

В этой модели минимизация расхождений желаемых и сбалансированных показателей также решалась на базе метода наименьших квадратов. По моим оценкам, совпавшим с оценками некоторых зарубежных экономистов, в конце 1980-х гг. возможные рентные доходы от добычи угля, нефти и газа в СССР составляли 165 млрд р. [68]. В это время госбюджет СССР был равен примерно 155 млрд р., а консолидированный бюджет СССР и всех союзных республик составлял примерно 600 млрд р. (естественно, в рублях тех лет). Рентные доходы от добычи топлива использовались в те годы на поддержание на низком уровне цен энергоресурсов в нашей стране и в поставках их государствам «союзникам», на «помощь» странам «третьего мира», на закупку за рубежом оборудования и товаров.

При обсуждении идеи наполнения госбюджета за счет рентных доходов с природных ресурсов высказывалось замечание, что это приведет к росту цен на энергоресурсы в стране, что негативно скажется на всей экономике. Цель разработки [67] – показать, что введение рентных платежей за добычу природных ресурсов может и должно сопровождаться масштабным сокращением налогов, и это может приводить не к росту всех цен, а к изменению структуры, соотношения цен, что даст экономические преимущества перерабатывающим, высокотехнологичным отраслям.

3. ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНОГО МНОГООБРАЗИЯ С МИНИМАЛЬНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

Рассматриваемая в данном разделе проблема определения ближайшей к началу координат точки линейного многообразия имеет ключевое значение для понимания и описания свойств решений при других обсуждаемых далее формализациях. Описанные здесь точки линейного многообразия с минимальным носителем иногда используются при математическом моделировании, в частности при разработке так называемого комитетного подхода в изучении несовместных систем линейных уравнений рассматривались наборы максимальных по составу подсистем [69], что соответствует вектору невязок системы с максимальным набором нулевых компонент.

Обозначения и определения. Для вектора $x \in R^n$ множества номеров его компонент с нулевыми, положительными, отрицательными и ненулевыми значениями обозначим:

$$\begin{gathered} J_0(x) = \{j: x_j = 0\}, \quad J_+(x) = \{j: x_j > 0\}, \\ J_-(x) = \{j: x_j < 0\}, \quad J(x) = \{j: x_j \neq 0\}. \end{gathered} \tag{1}$$

Набор номеров ненулевых компонент $J(x)$ принято называть [42] носителем вектора x.

Ситуации нестрогого включения (включено и, возможно, совпадают) и строгого включения (включено и не может совпадать) одного множества в другое будем различать использованием символов $\subseteq$ и $\subset$.

Если для векторов q и y из R^n выполняется соотношение

$$J(q) \subset J(y), \tag{2}$$

то будем говорить, что вектор q имеет суженный относительно вектора y носитель, а вектор y имеет расширенный относительно вектора q носитель. Если в дополнение к (2) выполняются соотношения

$$J_+(q) \subseteq J_+(y), \qquad J_-(q) \subseteq J_-(y), \tag{3}$$

то будем говорить, что вектор q имеет суженные относительно вектора y наборы положительных и отрицательных компонент, а вектор y имеет расширенные относительно вектора q наборы положительных и отрицательных компонент. Отметим, что выполнение (2) и (3) гарантирует, что только одно из включений в (3) должно быть обязательно строгим, а второе может оказаться и равенством.

Совпадение или несовпадение множеств $J(q)$ и $J(y)$ означает, что векторы q и y имеют одинаковые или, соответственно, разные носители. Выполнение обоих равенств –

$$J_{+}(q) = J_{+}(y), \qquad J_{-}(q) = J_{-}(y), \tag{4}$$

означает, что векторы q и y имеют одинаковые наборы положительных и отрицательных компонент. Иначе, если не выполняется хотя бы одно из равенств (4), то считаем, что векторы q и y имеют неодинаковые (разные) наборы положительных и отрицательных компонент (даже если различаются наборы только положительных или только отрицательных компонент).

Пусть L множество векторов в R^n. Вектор y из L будем называть вектором с минимальным (или, как синоним, с несужаемым) носителем в рамках L, если не существует вектора q в L, при котором справедливо соотношение (2). Вектор y из L будем называть вектором с минимальными (с несужаемыми) наборами номеров положительных и отрицательных компонент в рамках L, если не существует вектора q в L при котором справедливы соотношения (2) и (3).

Вектор q из L будем назвать вектором с максимальным (с нерасширяемым) носителем в множестве L, если в этом множестве не существует вектора y, при котором справедливо (2). Вектор q из L будем назвать вектором с максимальными (с нерасширяемыми) наборами положительных и отрицательных компонент в L, если не существует вектора y в L при которых выполняются соотношения (2) и (3).

Особые векторы линейного многообразия. Векторы линейного многообразия Y с минимальным носителем (в рамках этого линейного многообразия) будем называть **особыми векторами** данного линейного многообразия. Множество особых векторов линейного многообразия Y обозначим B. Стандартно доказываются следующие факты.

1. Множество B состоит из векторов линейного многообразия с минимальными наборами положительных и отрицательных компонент в рамках многообразия Y, что можно считать вторым, равносильным определением особых векторов. Можно дать и третье равносильное определение особым векторам. Это векторы линейного многообразия с максимальными (нерасширяемыми в рамках многообразия) наборами нулевых компонент.

2. Любые два вектора из B имеют различающиеся носители (доказательство методом от обратного, если два различающихся вектора в линейном многообразии имеют одинаковые носители, то среди их аффинных комбинаций будет вектор, имеющий суженный относительно исходных двух векторов носитель).

3. Число номеров в носителе любого вектора из B не больше размерности линейного многообразия, т.е. не больше числа m. Напомним, что число m, согласно (2.10) равно размерности линейного многообразия Y.

Из последних двух утверждений следует.

Теорема 1. *Число особых векторов в линейном многообразии Y конечно, не превышает*

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \tag{5}$$

Для дальнейшего полезен следующий критерий.

Лемма 1. *Вектор q из Y являет особым вектором линейного многообразия Y в том и только в том случае, если не существует вектора s в линейном подпространстве S такого, что*

$$s \neq 0,\ J(s) \subseteq J(q). \tag{6}$$

Обсуждения. Как будет показано далее, введенные здесь «особые» векторы линейного многообразия играют определяющую роль в описании множеств ближайших к началу координат точек линейного многообразия при различных определениях понятия «ближайших к началу координат». Существует проблема в выборе названия таких векторов. В первых работах я называл эти векторы опорными, но термин «опорный вектор» уже занят. Конечно, можно было ограничиться названием «векторы линейного многообразия с минимальным носителем», или с «несужаемым носителем». Такие названия несколько длиннее, но зато точные в данном случае.

Увы, такие названия совсем не подходят для аналогичных конечных наборов «особых» векторов при описаниях свойств и взаимосвязей ближайших к началу координат точек выпуклых полиэдров – множеств решений систем линейных неравенств. В этом случае играющие аналогичную роль «особые» векторы определяются как точки выпуклых полиэдров одновременно с несужаемыми носителями и несужаемыми наборами неактивных ограничений-неравенств. Таких векторов тоже конечное количество. Хотелось бы иметь одинаковые и краткие названия «особых» векторов в обоих случаях.

При описаниях множеств ближайших к началу координат точек выпуклых полиэдров требуется рассматривать указанные «особые» векторы, только находящиеся среди векторов полиэдра с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Из-за этого необходимо поменять порядок введения множеств по сравнению с используемым в данной книге. Сначала надо определить множество векторов выпуклого полиэдра с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Затем определить наборы «особых» векторов из множества векторов выпуклого полиэдра с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Только потом перейти к описанию множества векторов выпуклого полиэдра с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент с использованием введенных «особых» векторов.

В рассматриваемом в данной книге случае линейного многообразия определения «особых» векторов и векторов многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент независимые. При этом для описания множества векторов с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент и свойств векторов этого множества (что будет сделано в следующем разделе) используются «особые» векторы.

4. ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНОГО МНОГООБРАЗИЯ С ПАРЕТО-МИНИМАЛЬНЫМИ АБСОЛЮТНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ КОМПОНЕНТ

В данном разделе рассматривается самая общая постановка для обсуждаемых в этой книге формулировок задач определения ближайших к началу координат точек линейного многообразия.

Используемые обозначения и понятия. Для произвольного множества векторов $D \subseteq R^n$ его выпуклую оболочку обозначим $co\ D$. Напомним, что выпуклой оболочкой множества называется совокупность выпуклых комбинаций векторов этого множества.

Замыкание множества D обозначим $cl\ D$. Напомним, что замыканием множества называется множество, включающее все векторы из исходного множества, а также все другие «предельные» векторы этого множества, в том числе возможно и не находящиеся в исходном множестве, т.е. предельные точки любых сходящихся к одной точке последовательностей векторов из исходного множества. Например, замыканием множества положительных вещественных чисел является множество неотрицательных чисел (напомним, что вещественное число можно рассматривать как вектор в одномерном пространстве). Ноль не входит в исходное множество, но является предельной точкой векторов этого множества.

Множество называется замкнутым, если любая предельная точка последовательности векторов из этого множества ему принадлежит. Иначе множество не замкнуто. В этом случае существуют предельные точки последовательностей векторов из этого множества, которые не принадлежат ему. Частными случаями незамкнутых множеств являются открытые множества, любой вектор которых находится внутри этого множества.

Множество векторов называется связным, если при любом его разбиении на два подмножества одно из этих подмножеств содержит предельные точки второго подмножества. Здесь термин «разбиение» означает, что оба подмножества не пусты, они не пересекаются, их объединение составляет все исходное множество.

Подмножество относительно внутренних точек множества $D \subseteq R^n$ будем обозначать $ri\,D$. Напомним, что относительно внутренними называются векторы множества внутренние в нем относительно минимального линейного многообразия, содержащего данное множество [42].

Минимальное линейное многообразие, содержащее D, определяется как пересечение линейных многообразий, содержащих это множество. Это минимальное линейное многообразие можно определить и как аффинную оболочку (множество аффинных комбинаций) векторов из D. Выпуклое непустое множество всегда имеет относительную внутренность [там же], даже если оно не телесно (не имеющее внутренности).

Рассматриваемую геометрическую проблему в самом общем виде будем представлять как поиск Парето-оптимального решения многокритериальной задачи минимизации абсолютных значений всех компонент вектора линейного многообразия. Напомним, что критерием оптимальности называется максимизируемая или минимизируемая функция на множестве допустимых решений (удовлетворяющих заданным ограничениям) задачи. Такая функция называется также «целевой функцией». Многокритериальные задачи оптимизации обладают свойством возможной противоречивости критериев – решение оптимальное по одному из рассматриваемых критериев может быть не оптимальным по другому критерию. Термин «Парето-оптимальные» избавляет от противоречивости критериев многокритериальных задач оптимизации. Парето-оптимальным решением многокритериальной задачи называют решение, находящееся в множестве допустимых решений, которое нельзя улучшить в области допустимых решений ни по одному из рассматриваемых критериев, не ухудшив по другим критериям.

В случае, когда рассматриваемое линейное многообразие является линейным подпространством, т.е. содержит нулевой вектор, все n критериев минимизации абсолютных значений разных компонент векторов не будут противоречивыми. Нулевой вектор будет решением такой задачи по всем этим критериям оптимизации.

В общем случае в качестве непротиворечивой постановки многокритериальной задачи можно рассматривать поиск Парето-оптимальных решений, которые нельзя улучшить по любому из критериев, не ухудшив по какому-то другому критерию.

Введем множество векторов линейного многообразия Y с Парето-минимальными абсолютными значениями всех компонент:

$$Q = \{q \in Y \colon \nexists\, y \in Y, |y_j| \leq |q_j|,\ \mathrm{j} = 1, \dots n,\ \textstyle\sum_1^n |y_j| < \sum_1^n |q_j|\,\}. \quad (1)$$

Из приведенного определения вытекает следующее утверждение, использующее тот факт, что Y является линейным многообразием.

Лемма 2*. Вектор* $x \in Y$ *не находится в* Q *в том и только в том случае, если существует вектор* $s \in S$, $s \neq 0$ *такой что*

$$J_+(s) \subseteq J_-(x),\ \ J_-(s) \subseteq J_+(x). \quad (2)$$

Данная лемма, как и исходное определение (1), могут быть полезны в качестве критериев для выявления векторов, не принадлежащих Q. Согласно определению (1), чтобы убедится, что вектор q не находится в Q, достаточно указать вектор $y \in Y$, при котором выполняются неравенства в определении (1). По лемме 2 достаточно указать вектор $s \in S$, $s \neq 0$, при котором выполняются соотношения (2).

Из леммы 2 и теоремы Гордона об альтернативных системах линейных неравенств [69] получаем утверждение, которое может служить в качестве конструктивного критерия для выявления векторов, находящихся в Q.

Лемма 3. *Вектор* $q \in Y$ *находится в множестве* Q *в том и только в том случае, если существует вектор* $s \in S^{\perp}$, *такой что*

$$J_+(q) \subseteq J_+(s),\ \ J_-(q) \subseteq J_-(s). \quad (3)$$

Пояснение. Для восприятия определения (1) удобно сначала понять, в каком случае вектор линейного многообразия не находится в множестве векторов многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент.

Вектор $q \in Y$ не принадлежит множеству Q в том и только в том случае, если найдется другой вектор $y \in Y$, у которого абсолютные значения всех компонент не превышают абсолютные значения соответствующих компонент вектора q, что выражает неравенство

$$|y_j| \leq |q_j|,\ \mathrm{j} = 1, \dots n, \quad (4)$$

и хотя бы одна компонента меньше, что, в дополнение к приведенному выше соотношению, выражает неравенство

$$\textstyle\sum_1^n |y_j| < \sum_1^n |q_j|. \quad (5)$$

Определение (1) векторов q, составляющих множество Q, построено как отрицание существования такого вектора $y \in Y$.

Лемма 2 является переложением определяющих свойств (4), (5) векторов из линейного многообразия Y, не находящихся в множестве Q. Условия на вектор при заданном векторе x в лемме 2 можно представить как систему линейных уравнений и неравенств. Теория альтернативных систем линейных неравенств, на которой базируется переход от леммы 2 к лемме 3, представлена в статье «Проекции точки на полиэдр» [63].

Связь с особыми векторами линейного многообразия. Стандартно, методом от обратного на основе лемм 1 и 2, доказывается, что любой особый вектор линейного многообразия является вектором линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Справедлива теорема 2.

Теорема 2.

$$B \subseteq Q \tag{6}$$

Действительно, если бы какой-либо вектор x из B не находился бы в Q, то, согласно лемме 2, существовало бы направление $s \in S$, по которому можно перейти к вектору из Y, имеющему суженный набор положительных и отрицательных компонент. А это, по лемме 1, противоречит тому, что x «особый» вектор.

Важно, что любой вектор из Q можно представить в виде выпуклой комбинации векторов из B. В работе «Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения» [23] доказано следующее утверждение.

Теорема 3.

$$Q \subseteq co\,B. \tag{7}$$

Доказательство этой теоремы основывается на представлении вектора q из Q в виде выпуклой оболочки конечного набора векторов из Y, имеющих суженные наборы положительных и отрицательных компонент относительно исходного вектора q. Первоначально вектор q рассматривается как «выпуклая комбинация» самого себя. Если на очередном этапе построения какой-либо вектор, образующий выпуклую комбинацию, не является «особым», то его можно представить как выпуклую комбинацию двух векторов, имеющих суженные наборы положительных и отрицательных компонент относительно этого вектора. Это следует из леммы 1. Заменим такой вектор на эти два вектора. Через конечное число таких замен получим конечный набор векторов с несужаемыми в рамках Y наборами положительных и отрицательных компонент (т.е. векторов из B), выпуклая комбинация которых образует исходный вектор q, что и было целью доказательства.

Из теоремы 1 и 3 следует, что множество Q является ограниченным. Оно находится в политопе *co B.*

Из теорем 2 и 3 непосредственно следует, что выпуклые оболочки множеств Q и B совпадают. Справедлива теорема 4.

Теорема 4.

$$co\,Q = co\,B \tag{8}$$

Эта теорема позволяет, в частности, оценивать диапазоны возможных вариаций компонент векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент на основе конечного набора особых векторов линейного многообразия.

При $n = 2$ и $n = 3$ множество Q выпуклое. При $n \geq 4$ множество Q может быть (и обычно бывает) невыпуклым. При этом оно, согласно приведенным ниже теоремам, замкнутое, связное, является объединением конечного числа выпуклых политопов.

Строение множества векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. В множестве Q имеется конечное число векторов с нерасширяющимися и различающимися в этом множестве наборами номеров положительных и отрицательных компонент. Пусть z^i, $i = 1, \dots k$ – максимальный (нерасширяемый) в рамках Q набор таких векторов. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 4. *Любой вектор из Y с одинаковым или суженными наборами номеров положительных и отрицательных компонент относительно одного из векторов z^i, $i = 1, \dots, k$ находится в множестве Q.*

Лемма 5. *Любой вектор из Q является вектором с суженными или одинаковыми наборами номеров положительных и отрицательных компонент относительно одного из векторов z^i, $i = 1, \dots, k$.*

Из приведенных лемм следует.

Лемма 6. *Для каждого из векторов z^i, $i = 1, \dots, k$ имеется подмножество «особых» векторов $B^i \subsetneq B$, выпуклая оболочка которых $Q^i = co\,B^i$ состоит из векторов множества Q с одинаковыми и суженными относительно z^i наборами номеров положительных и отрицательных компонент.*

Множество Q^i является выпуклым политопом, вершинами которого являются векторы из B^i. Один и тот же вектор из B может быть вершиной у нескольких политопов Q^i. При этом каждый из особых векторов будет вершиной хотя бы у одного политопа Q^i.

***Лемма** 7. Любой особый вектор находится в одном из подмножеств*

$$B^i,\ i = 1, \dots, k,\ \textit{причем}\ \ B = \cup_1^k B^i. \tag{9}$$

Из приведенных лемм следует.

Теорема 5.

$$Q = \cup_1^k Q^i. \tag{10}$$

В завершение обзора свойств множества векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент приведем еще два важных свойства этого множества.

Терема 6. Множество Q является замкнутым и связным.

Замкнутость непосредственно следует из теоремы 5. Связность можно доказывать на основе результатов последующих разделов. Связным является рассматриваемое далее множество евклидовых проекций начала координат на линейное многообразие, замыкание которого совпадает с Q. Здесь факт связности отмечен для полноты сведений о свойствах множества Q.

Отметим также, что множество относительно внутренних точек $ri\ Q$ может быть несвязным, в отличие от множества Q. В предпоследнем разделе этой книги приводится пример этому.

Замечания о структуре множества векторов линейного многообразия. Компоненты векторов, составляющих линейное многообразие Y разбиваются на два типа. Один из них – компоненты с неизменными значениями на всем многообразии. Второй тип составляют компоненты, которые могут принимать разные численные значения для векторов линейного многообразия.

Компоненты второго типа обязательно могут принимать на множестве векторов линейного многообразия все вещественные значения. Каждая из компонент второго типа разбивает линейное многообразие на три подмножества. На одном из них эта компонента только отрицательная, на другом – только положительная. На третьем подмножестве эта компонента всегда равна нулю.

Ранее был введен набор векторов линейного многообразия $z^i,\ i = 1, \dots k$ с нерасширяемыми и различающимися номерами компонент, находящихся только в множестве Q. Можно расширить этот набор. Пусть $z^i,\ i = 1, \dots, K$ – максимальный (нерасширяемый далее) набор векторов линейного многообразия Y с нерасширяемыми и разными наборами номеров положительных и отрицательных компонент. Первые k векторов набора – это введенные ранее векторы из подмножества линейного многообразия Q. Поэтому $K > k$. Справедливы следующие утверждения.

1. У всех векторов z^i, $i = 1, ..., K$ один и тот же носитель, т.е. у всех векторов указанного набора один и тот же набор нулевых компонент, причем эти компоненты нулевые для любого вектора из исходного линейного многообразия.

2. Для любого вектора z^i, $i = k + 1, ..., K$ из рассматриваемого набора, не принадлежащего Q, существует ненулевое направление $s \in S$, такое что

$$J_+(s) \subseteq J_+(z^i),\ \ J_-(s) \subseteq J_-(z^i). \tag{11}$$

Приведенное утверждение является прямым следствием леммы 2. По направлению s можно сколько угодно далеко перемещаться от точки z^i, оставаясь в линейном многообразии. Множество векторов линейного многообразия с одинаковыми или с суженными наборами номеров относительно вектора z^i при $i = k + 1, ..., K$ является неограниченным.

Обозначим S^i множество векторов линейного многообразия S, удовлетворяющих условию (11). Это конус с конечным числом образующих. Пусть B^i – подмножество особых векторов, состоящих из набора векторов линейного многообразия с суженными относительно вектора z^i наборами номеров. Тогда все множество векторов линейного многообразия с одинаковыми или с суженными наборами номеров относительно z^i (обозначим его L^i, $i = k + 1, ..., K$) можно представить как сумму двух множеств:

$$L^i = S^i + B^i \tag{12}$$

Первое из них – конус рецессивных направлений с конечным числом образующих. Рецессивным названо здесь направление, по которому можно удаляться до бесконечности, не выходя из линейного многообразия и не изменяя знаки у компонент векторов. Этому удовлетворяет вектор s в условии (11). Второе множество – выпуклый политоп с вершинами из особых векторов с суженными наборами номеров положительных и отрицательных компонент относительно вектора z^i. В сумме эти два множества образуют выпуклый неограниченный полиэдр R^i, относительно внутренние точки которого имеют одинаковые знаки у каждой ненулевой компоненты (положительными или отрицательными). На границах (рассматриваемых в рамках множества относительно внутренних точек линейного многообразия Y) этих полиэдров некоторые ненулевые компоненты принимают нулевые значения.

3. В конусе S^i выберем вектор с максимальными наборами номеров относительно всех векторов этого множества. Обозначим его s^i. Стандартно доказывается, что при достаточно большом положительным λ вектор

$$z^l = z^i - \lambda s^i \tag{15}$$

будет вектором рассматриваемого линейного многообразия с максимальным набором номеров компонент и таким, что знаки у компонент вектора z^i с номерами из $J(s^i)$ при переходе по правилу (15) к вектору y^l поменяются. Отметим, что некоторые из ненулевых компонент у векторов z^i и z^l могут оказаться одинаковыми при переходе (15), если это нулевые компоненты вектора s^i.

Отсюда следует, что число $(K - k)$ четное. Каждому z^i при $i = k + 1, \dots K$ соответствует в указанном смысле его «антипод», некоторый вектор z^l при $l \in \{k + 1, \dots K\}$.

5. ПРИМЕРЫ

Для облегчения восприятия изложенных выше фактов приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть $n = 2$, линейное многообразие является прямой линией, удовлетворяющей уравнению $x_1 + x_2 = 1$.

У этого линейного многообразия два вектора с минимальным носителем. Обозначим их y^1, y^2. Они имеют компоненты:

$$y_1^1 = 1,\ y_2^1 = 0;\ \ y_1^2 = 0,\ y_2^2 = 1.$$

Рассматриваемое линейное многообразие изображено на рис. 1. Представляющая его прямая линия пересекает каждую из осей координат в точках, соответствующих указанным «особым» векторам.

Линейное подпространство S, параллельное линейному многообразию, состоит из векторов $s \in R^2$, удовлетворяющих уравнению $s_1 + s_2 = 0$.

Ортогональное линейное подпространство $S^\perp$ состоит из векторов $s \in R^2$ с компонентами, удовлетворяющими условию $s_1 = s_2$.

В $S^\perp$ находится вектор с обоими компонентами равными единице, а у любого вектора q из интервала $[y^1, y^2]$ обе компоненты неотрицательные, поэтому будут выполняться соотношения (4.3). Согласно лемме 3, точки из указанного интервала образуют Q, что является иллюстрацией теоремы 4.

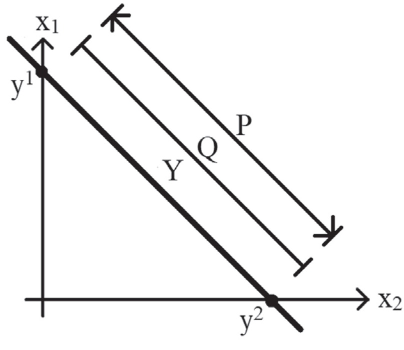

Рис. 1. *Одномерное линейное многообразие в R^2 с двумя особыми векторами*

В рассматриваемом примере у множества Q не может быть двух векторов с разными нерасширяемыми наборами номеров ненулевых компонент. Вектором из Q с нерасширяемыми наборами номеров ненулевых компонент будет, в частности, вектор с компонентами $z_1 = z_2 = 0{,}5$.

Обозначим такой вектор z^1.

Множество Q состоит в данном случае из одного политопа, которым является указанный выше интервал. В этом случае $k = 1$.

Нерасширяемое множество векторов линейного многообразия с различающимися нерасширяемыми номерами компонент в данном случае состоит из трех векторов, поэтому $K = 3$. Кроме введенного вектора z^1 в это множество могут входить, например, следующие два вектора с компонентами:

$$z_1^2 = 2,\ z_2^2 = -1;\ z_1^3 = -1,\ z_2^3 = 2.$$

Эти два вектора находятся на двух ограниченных с одной стороны и неограниченных с другой стороны лучей на прямой рассматриваемого линейного многообразия. Эти лучи состоят из точек прямой с отрицательной второй компонентой и точек прямой с отрицательной первой компонентой.

На рис. 1 также схематически обозначен открытый интервал P между указанными выше особыми векторами. Этот интервал, как будет показано далее, соответствует множеству ближайших к началу координат точек линейного многообразия, получаемых путем решения задачи минимизации штрафных функций (из определяемых в следующем разделе класса). Множество P совпадает с множествами гёльдеровских и евклидовых проекций начала координат на линейное многообразие. Это множество не включает границы интервалов, т.е. сами особые решения, но точки из этих множеств могут быть сколько угодно близки к особым векторам.

Пример 2. Пусть $n = 3$, линейное многообразие является плоскостью в трехмерном пространстве, состоящей из векторов, удовлетворяющих уравнению $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

На рис. 2, который сделан на плоскости самого линейного многообразия, прямые линии соответствуют векторам, у которых одна из компонент нулевая. Пересечения двух таких прямых составляют «особые» векторы рассматриваемого линейного многообразия, у которых нулевое значение имеют две компоненты.

У данного линейного многообразия три особых вектора. Обозначим их y^1, y^2, y^3. Для первого из этих векторов ненулевое, равное 1, значение имеет только первая компонента, остальные две компоненты нулевые. У второго вектора ненулевое значение 1 имеет вторая компонента, остальные нулевые. У третьего особого вектора первая и вторая компоненты нулевые.

Множество векторов линейного многообразия с Парето-минимальными компонентами Q составляет весь треугольник с вершинами в указанных «особых» векторах. Это, в данном случае, множество векторов рассматриваемого линейного многообразия со всеми неотрицательными компонентами. Относительную внутренность Q составляют точки, находящиеся внутри треугольника. Эта относительная внутренность $ri\ Q$ состоит из векторов линейного многообразия со всеми положительными компонентами.

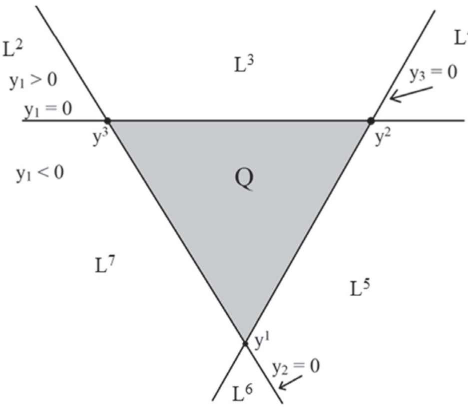

Рис. 2. Двумерное многообразие в R^3 с тремя особыми векторами

Как видно из рис. 2, прямые линии, соответствующие нулевым значениям каждой из компонент, разделяют плоскость линейного многообразия на семь областей. Одна из них – рассмотренный выше треугольник множества векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Шесть областей являются неограниченными множествами векторов, относительная внутренность которых имеет одинаковые наборы отрицательных и положительных компонент. В соответствии с введенными в предыдущем разделе обозначениями они составляют полиэдры L^i, $i = 2, ..., 7$. Причем относительно внутренние точки этих множеств в данном примере состоят из внутренних на этой плоскости точек, представляющих векторы со всеми ненулевыми компонентами. Каждому множеству

L^i, $i = 2, ..., 7$ соответствует другое множество из этого набора, векторы в относительной внутренности которого имеют противоположные знаки у ненулевых компонент. Например, множеству L^2 соответствует как его «антипод» – множество L^5.

Отметим, что среди векторов рассматриваемого линейного многообразия нет имеющих все отрицательные компоненты. Для множества Q нет «антипода» в указанном смысле. Это важная определяющая особенность политопов, составляющих множество Q.

Пример 3. На рис. 3 и 4 отображен случай двумерного линейного многообразия ($m = 2$) в четырехмерном пространстве ($n = 4$), в котором множество векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент невыпуклое.

В двумерном и трехмерном пространствах множество Q всегда выпуклое. Отталкиваясь от этого, автор пытался доказать выпуклость этого множества в любом n-мерном пространстве. После многих неудач в доказательствах этого факта был построен пример для четырехмерного пространства приведенного здесь вида. На основе этого примера удалось убедиться, что множество векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент может быть (и обычно бывает) невыпуклым начиная с четырехмерного линейного пространства.

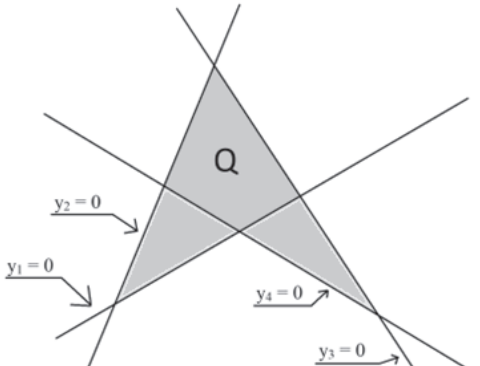

Рис. 3. *Двумерное линейное многообразие в четырехмерном пространстве. Прямые линии состоят из точек с нулевым значением одной из компонент, множество Q невыпуклое*

Считаем, что рис. 3 представлен на линейном многообразии решений системы из двух линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12;$$
$$x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12;$$

У этого линейного многообразия шесть особых векторов, имеющих компоненты:

$$y^1 = (3, 0, 0, 3)^T;\ \ y^2 = (3/2, 0, 6, 0)^T;\ \ y^3 = (0, 6, 0, 3/2)^T;$$
$$y^4 = (0, 0, 12, -3)^T;\ y^5 = (0, 4, 4, 0)^T;\ y^6 = (-3, 12, 0, 0)^T$$

Множество векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент состоит в данном случае из объединения одного четырехугольника и двух треугольников, являющихся политопами Q^i, $i = 1, 2, 3$. Четырехугольник является выпуклой оболочкой векторов y^1, y^2, y^5, y^3. Один из треугольников имеет вершины y^2, y^5, y^4. У второго треугольника вершинами являются векторы y^5, y^3, y^6. Отметим, что в данном примере объединение относительно внутренних точек $ri\ Q^i$, $i = 1, 2, 3$ не совпадет с $ri\ Q$, а будет строго включено в $ri\ Q$.

Выпуклая оболочка множества Q содержит политоп с вершинами y^4, y^5, y^6, который не содержится в множестве Q. Из-за этого множество Q является невыпуклым. При этом оно связное, замкнутое, ограниченное.

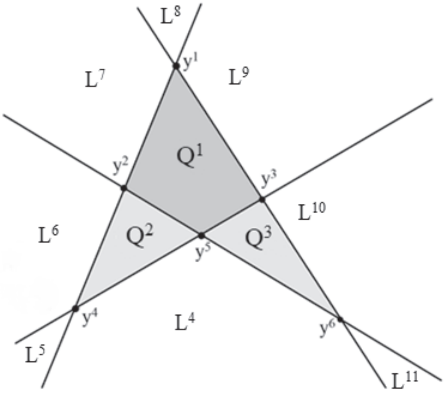

Рис. 4. *Двумерное линейное многообразие в четырехмерном пространстве. Пересечения двух прямых соответствуют опорным векторам y^i, $i = 1, \ldots, 6$. Три политопа Q^1, $i = 1, 2, 3$ образуют Q*

Восемь областей являются неограниченными множествами векторов с одинаковыми наборами неотрицательных и неположительных компонент. В соответствии с введенными в предыдущем разделе обозначениями, они составляют полиэдры L^i, $i = 1, \ldots ,11$. (см. рис. 4).

6. МИНИМИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Определения и обозначения. Пусть f – некоторая штрафная функция от вектора $x \in R^n$. Точку минимума этой функции на рассматриваемом линейном многообразии обозначим

$$y(f) = arg\,min\{f(y): y \in Y\}. \tag{1}$$

Выражение $arg\,min$ обозначает точку минимума или одну из точек минимума, если их несколько. Когда рассматривается все множество точек минимума будем использовать выражение $Arg\,min$.

Обозначим F множество дифференцируемых штрафных функций f от вектора $y \in R^n$, которые обладают двумя свойствами:

– могут быть преобразованы в результате дифференцируемого возрастающего преобразования в строго выпуклые функции;

– для всех $y \in R^n$ –

$$\operatorname{sign} \nabla_j f(y) = \operatorname{sign} y_{j\,i},\ \ j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Здесь функция $sign\,\alpha$ от вещественного числа α принимает значения: –1, 0, +1, если $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ и, соответственно, $\alpha > 0$.

Свойства решений задач минимизации штрафных функций на линейном многообразии. Стандартно доказывается следующее утверждение.

Теорема 7. *При любой функции $f \in F$ существует и единственное решение задачи (1).*

В качестве пояснения отметим, что условие (2) влечет два важных свойства функции f из F. Ее абсолютный минимум находится в нуле, и она монотонно возрастает при перемещении от начала координат по любому ненулевому направлению. Согласно этому условию рассматриваемая целевая функция возрастает при возрастании положительной компоненты и при уменьшении отрицательной компоненты.

Для строго выпуклой функции условие (2) означает, что функция возрастает до бесконечности при перемещении вектора переменных от начала координат по любому направлению. Следовательно, функция имеет точку минимума на любом замкнутом множестве в R^n. В силу строгой выпуклости точка минимума единственная на любом выпуклом множестве, в том числе на линейном многообразии. Любая функция из F имеет ту же точку минимума, что и получаемая из нее в результате возрастающего преобразования функция.

Введем множество решений задачи (1) при различных штрафных функциях из рассматриваемого множества. Пусть

$$PF = \{y(f) : f \in F\} \tag{3}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8.

$$PF \subseteq Q. \tag{4}$$

Необходимым и достаточным условием, чтобы вектор $y(f)$ был точкой минимума функции $f \in F$, является равенство нулю ее производной по любому направлению s линейного подпространства S, что означат выполнение равенства

$$\langle \nabla f(x(f)), s \rangle = 0. \tag{5}$$

Из леммы 2 и условия (2) следует, что $x(f) \in Q$. Это и требовалось установить.

Теорема 9.

$$ri\,Q \subseteq PF. \tag{6}$$

Соотношение (6) может выполняться в виде равенства, как это будет во многих приводимых далее примерах. Оно может иногда выполняться в виде строгого включения, что будет в последнем из рассматриваемых в данной книге примере.

Отметим, что замыканием множества $ri\,Q$ является множество Q. Из теорем 8 и 9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 10.

$$cl\,ri\,Q = cl\,PF = Q. \tag{7}$$

Согласно этой теореме любой вектор из множества векторов линейного многообразия с минимальными по Парето абсолютными значениями компонент может быть получен с любой требуемой точностью как результат минимизации на линейном многообразии функции из F. Здесь не утверждается, что любой вектор из Q является точкой минимума на рассматриваемом линейном многообразии некоторой функции из F. Множество PF может быть и обычно бывает незамкнутым. Согласно теореме 9 все предельные точки этого множества, в том числе ему не принадлежащие, в Q. Более того, все эти точки образуют Q.

7. ГЁЛЬДЕРОВСКИЕ ПРОЕКЦИИ НАЧАЛА КООРДИНАТ НА ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Определения и обозначения. Множеству F принадлежит гёльдеровская норма

$$\rho_p^h(y)=(\sum_1^n |h_j y_j|^p)^{1/p}, \tag{1}$$

где p – заданный степенной коэффициент нормы, $p > 1$; h – заданный вектор положительных весовых коэффициентов, $h \in R_+^n$, где R_+^n – подмножество векторов R^n со всеми положительными компонентами. Эта функция удовлетворяет условию (6.2), является выпуклой, но не строго выпуклой. В результате возрастающего дифференцируемого преобразования (возведение в степень p и умножение на положительную константу p^{-1}) получим строго выпуклую функцию

$$f_p^h(y)= p^{-1} \sum_1^n |h_j y_j|^p. \tag{2}$$

Здесь и далее считаем, что возведение в любую вещественную степень положительного вещественного числа есть величина положительная, а возведение в любую вещественную степень нуля является нулем.

Задача минимизации функции (1) на линейном многообразии дает такое же решение, как и задача минимизации на Y функции (2).

Свойства гёльдеровских проекций. Введем множество гёльдеровских проекций начала координат на линейное многообразие, получаемых при различных положительных весовых коэффициентах с фиксированным степенным коэффициентом $p > 1$ в гёльдеровских нормах:

$$P_p =\{ y\left(f_p^h\right): h \in R_+^n \}. \tag{3}$$

Введем также множество всех гёльдеровских проекций начала координат на линейное многообразие:

$$P = \{\cup P_p:\ p > 1\}. \tag{4}$$

Поскольку множество гёльдеровских норм с фиксированным степенным коэффициентом является подмножеством всех гёльдеровских норм, а множество гёльдеровских норм является подмножеством множества штрафных функций $F,$ то при любом $p > 1$:

$$P_p \subseteq P \subseteq\ PF. \tag{5}$$

Как доказано, справедливы и обратные включения [23; 24]. Получаем следующее утверждение.

Теорема 11.

$$P_p = P = PF \text{ при любом } p > 1. \tag{6}$$

Отметим, что для доказательства теоремы 11 в силу (5) достаточно доказать, что для любой функции $f \in F$ существует вектор $h \in R^n_+$, при котором

$$x(f) = x(f^h_p)\,. \tag{7}$$

Для этого требуется, чтобы градиенты рассматриваемых двух функций совпали в точке $x(f)$. Это произойдет, если h_j имеет любое положительное значение для $j \in J_0(x(f))$. При этом для $j \in J(x(f))$:

$$h_j = \nabla_j f\big(x(f)\big)/(sign\,(x_j)\,(|x_j|)^{p-1})\,. \tag{8}$$

Задача поиска гёльдеровской проекции на линейное многообразие (2.1):

$$f^h_p(y) \to min,\ Gx + y = c. \tag{9}$$

Эта задача сводится к безусловной минимизации выпуклой функции от вектора x, содержащего r компонент:

$$f^h_p(c - Gx) \to min,\ x \in R^r. \tag{10}$$

Найдя оптимальное значение вектора x из ограничений задачи (9), можем вычислить оптимальное значение вектора y. Оптимальное значение вектора y всегда единственное, что следует из строгой выпуклости функции f^h_p. У вектора x будет единственное оптимальное решение в том и только в том случае, если столбцы матрицы G линейно независимы.

Сведение исходной задачи (9) к задаче минимизации выпуклой дифференцируемой функции является важным этапом в формировании алгоритма решения. Путем приравнивания к нулевому вектору градиента минимизируемой функции в задаче (10) придем к задаче решения системы из r уравнений с r неизвестными. При $p = 2$ это будет система линейных уравнений. Если $p \neq 2$ то получим систему нелинейных уравнений.

Задача поиска гёльдеровской проекции на линейное многообразие (2.2). Рассмотрим задачу поиска гёльдеровской проекции начала координат на линейное многообразие со второй из рассмотренных в разд. 2 алгебраической формы его задания:

$$f_p^h(y) \to min,\ Ay = b. \tag{11}$$

В этом случае также возможно сведение исходной проблемы к задаче безусловной минимизации выпуклой дифференцируемой функции, но другим путем, через использование двойственных гёльдеровских норм. Двойственные нормы и порождаемые ими сопряженные функции являются важными аспектами задач поиска проекций начала координат на линейное многообразие.

Двойственные гёльдеровские нормы. Пусть $p,\ q$ – вещественные параметры бóльшие единицы, связанные соотношением

$$p + q = pq. \tag{12}$$

Пусть векторы весовых коэффициентов h, l из R_+^n связаны равенством

$$h_j l_j = 1,\ \ j = 1, \dots, n. \tag{13}$$

Гёльдеровские нормы $\rho_p^h(y)$ и $\rho_q^l(y)$ с весовыми и степенными коэффициентами, удовлетворяющими условиям (12) и (13), будут ***взаимно двойственными нормами***. Для них выполняется следующее определяющее двойственные нормы свойство [71] (для любого $y \in R^n$):

$$\rho_q^l(y) = \max\{y^T x\colon\ \rho_p^h(x) =\ 1\colon x \in R^n\}. \tag{14}$$

Это равенство будет выполнятся, если поменять местами участвующие в нем нормы. Имеет место симметричная двойственность норм.

Порождаемые двойственными нормами строго выпуклые штрафные функции f_p^h, f_q^l являются сопряженными (при любом $y \in R^n$):

$$f_q^l(y) = max\{y^T x - f_p^h(x)\ \colon x \in R^n\}. \tag{15}$$

Здесь также имеет место симметрия. Равенство (15) выполняется, если в нем поменять местами функции f_p^h и f_q^l.

Из (15) следует, что градиенты сопряженных функций являются взаимообратными отображениями (при любом $y \in R^n$):

$$y = \nabla f_p^h\left(\nabla f_q^l(y)\right). \tag{16}$$

Введем специальное обозначение для вектора частных производных (градиента) целевой функции:

$$v = \nabla f_p^h(y). \tag{17}$$

Обозначим u вектор из R^k, состоящий из множителей Лагранжа ограничений задачи (11). Пусть три вектора $\bar{y}, \bar{u}, \bar{v}$ составляют соответственно оптимальное решение задачи (11), вектор множителей Лагранжа ограничений при оптимальном решении и значение вектора градиента (17) для оптимального решения.

Двойственная задача и эффективный путь вычисления гёльдеровской проекции. Двойственной к (11) будет следующая задача минимизации выпуклой функции на линейном подпространстве при ограничениях в виде однородной системы линейных уравнений:

$$f_q^l(v) - b^T u \to min,\ A^T u - v = 0. \tag{18}$$

Оптимальное решение этой задачи и множители Лагранжа ее ограничений в оптимальном решении составят те же векторы $\bar{u}, \bar{v}$ и вектор $\bar{y}$. При этом вектор множителей Лагранжа определяется через градиент функции $f_q^l(v)$

$$y = \nabla f_q^l(v). \tag{19}$$

Отметим, что двойственная задача удобна в вычислительном отношении. Она сводится к безусловной минимизации выпуклой дифференцируемой функции только с k-переменными:

$$f_q^l(A^T u) - b^T u \to min,\ u \in R^m. \tag{20}$$

В результате решения этой задачи будет найден вектор $\bar{u}$. Затем из ограничения задачи (18) прямым счетом определяется вектор $\bar{v}$. После чего на основе (19) вычисляется вектор $\bar{y}$.

Для оптимальных решений взаимно двойственных задач (11), (18) справедливы равенства:

$$q f_q^l(\bar{v}) - b^T \bar{u} = 0, \tag{21}$$

$$f_p^h(\bar{y}) + f_q^l(\bar{v}) - b^T \bar{u} = 0. \tag{22}$$

Эти равенства полезны для контроля точности вычислений и при интерпретациях получаемых результатов.

Представление двойственной задачи в виде задачи минимизации двойственной гёльдеровской нормы на линейном многообразии. Отметим, что при $b = 0$ рассматриваемая задача имеет тривиальное нулевое решение по всем векторам переменных. Интерес представляет случай $b \neq 0$, когда двойственную задачу (18) можно преобразовать в задачу поиска гёльдеровской проекции на линейное многообразие:

$$f_q^l(v) \to min,\ A^T u + v = 0,\ b^T u = -1. \tag{23}$$

Обозначим $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{y}$ векторы оптимальных решений данной задачи и значения для оптимального решения вектора множителей Лагранжа первых ограничений задачи (23). Используя их, можем получить оптимальные решения исходной (11) и двойственной (18) задач по правилу:

$$\bar{u} = \lambda\tilde{u}, \quad \bar{v} = \lambda\tilde{v}, \ \ \bar{y} = \lambda\tilde{y}, \tag{24}$$

где

$$\lambda = (1/f_q^l(\tilde{v}))^{q-1}. \tag{25}$$

Представление задачи поиска гёльдеровской проекции начала координат на линейное многообразие в виде задачи минимизации двойственной гёльдеровской нормы на другом линейном многообразии полезно для интерпретаций получаемых решений. Вычисления лучше осуществлять на основе поиска решения задачи безусловной минимизации выпуклой дифференцируемой функции (20). Приравняв градиент минимизируемой в (20) функции нулевому вектору получим систему из m уравнений с m переменными. В случае $p = 2$ и, следовательно, $q = 2$ имеем систему линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей.

Сходимость гёльдеровских норм к октаэдральной и к чебышевской нормам. Важный факт: гёльдеровские нормы при степенном коэффициенте, стремящемся к единице и стремящемся к бесконечности, переходят в недифференцируемые функции – в октаэдральную и чебышевскую нормы. Для $h \in R_+^n$, $x \in R^n$:

$$\rho_p^h(x) \to \rho_1^h(x), \ \text{при}\ p \to 1; \tag{26}$$

$$\rho_p^h(x) \to \rho_\infty^h(x), \ \text{при}\ p \to \infty. \tag{27}$$

Здесь

$$\rho_1^h(x) = \textstyle\sum_1^n h_j|x_j|, \tag{28}$$

$$\rho_\infty^h(x) = max\{h_j|y_j| : j = 1, \dots, n\}. \tag{29}$$

Выражения (28), (29) соответствуют приведенным в разд. 2 октаэдральной и чебышевской нормам векторов. Поиск октаэдральной (метод наименьших модулей) и чебышевской проекций сводятся к задачам линейного программирования, которые могут иметь не единственное решение. Далее будет рассмотрено, что означают эти две неединственности.

Ниже факт сходимости к чебышевской норме будет дополнен интересным и полезным результатом – сходимостью гёльдеровских проекций при возрастании степенного коэффициента до бесконечности к единственной точке, которую и предлагается использовать в качестве «истинной» чебышевской проекции.

8. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. ЕВКЛИДОВЫ ПРОЕКЦИИ НАЧАЛА КООРДИНАТ НА ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Определение евклидовой проекции. При $p = 2$ гёльдеровская норма является евклидовой нормой. Вектор $y\left(f_2^h\right)$ при любом $h \in R_+^n$ будет одной из евклидовых проекций начала координат на линейное многообразие Y. Как уже было сказано ранее, в этом случае принято говорить, что проблема поиска ближайшего к нулевому вектору точки из линейного многообразия решается методом наименьших квадратов.

Свойства метода наименьших квадратов. Этот метод обладает рядом достоинств. Приведем некоторые из них.

1. Метод наименьших квадратов удобен в вычислительном отношении. Его использование сводится к решению систем линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей. Для поиска решения такой системы может использоваться метод квадратного корня [72; 73].

2. Любую из рассматриваемых в данной книге наименее удаленную от начала координат точку линейного многообразия можно получить с любой точностью методом наименьших квадратов за счет выбора весовых коэффициентов:

$$P_2 = P = PF, \; cl\, P_2 = Q, \; B \subseteq cl\, P_2. \qquad (1)$$

3. На основе соотношения $co\, cl\, P_2 = co\, B$ можно оценивать диапазоны вариации евклидовых проекций при варьировании весовых коэффициентов. Соотношение $P_2 \subseteq coB$ означает ограниченность евклидовых проекций, что оказалось очень полезным для теоретического обоснования алгоритмов внутренних точек в оптимизации [37]. Поиск направления улучшения решения на каждой итерации в этих алгоритмах представляется в виде задачи минимизации на линейном многообразии евклидовой нормы с итеративно изменяющимися весовыми коэффициентами в норме.

4. Евклидова проекция $y\left(f_2^h\right)$ является непрерывным отображением вектора весовых коэффициентов $h \in R_+^n$.

Пример. На рис. 5 представлены (для рассмотренного в разд. 5 примера 1) возможные ситуации с евклидовыми проекциями начала координат на линейное многообразие. Прямой линией изображено рассматриваемое линейное многообразие. Пунктирные кривые – линии уровня евклидовой нормы в случае, когда весовой коэффициент h_2 больше весового коэффициента h_1. Тогда линии уровня евклидовой нормы представляют концентрические эллипсы, вытянутые по оси y_1. На прямой отображающей линейное многообразие точками q^i, $i = 1, 2, 3, 4$ обозначены евклидовы проекции при различных соотношениях весовых коэффициентов. Ситуация для $i = 2$ соответствует одинаковым весовым коэффициентам. В этом случае линии уровня евклидовой нормы будут окружностями.

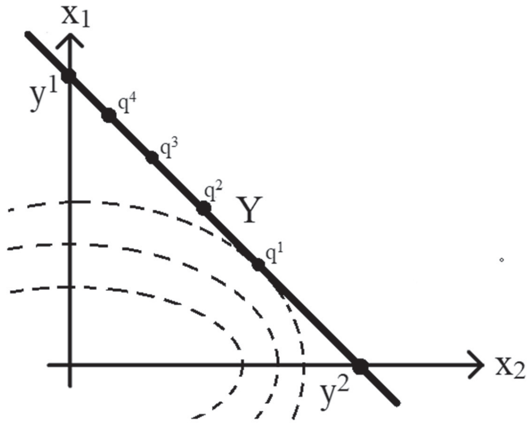

Рис. 5. *Евклидовы проекции начала координат на линейное многообразие*

Из рис. 5 видно, что за счет варьирования соотношений весовых коэффициентов можем получать любую точку внутри открытого интервала между «особыми» векторами. Можем сколько угодно близко приближаться к этим границам, не достигая их.

Система линейных уравнений при вычислении евклидовой проекции начала координат на линейное многообразие (2.1). Рассмотрим задачу безусловной минимизации (7.10) при $p = 2$. Пусть при обозначениях, использовавшихся в описании линейного многообразия (2.1),

$$\varphi_2^h(x) = f_2^h(c - Gx). \tag{2}$$

Следовательно,

$$\varphi_2^h(x) = 0.5(c - Gx)^T H(c - Gx), \tag{3}$$

где

$$H = diag\ h \tag{4}$$

является диагональной матрицей с коэффициентами из компонент вектора h на диагонали.

Необходимым и достаточным условием минимума функции (2) является равенство нулевому вектору ее градиента:

$$\nabla\varphi_2^h(x) = 0, \tag{5}$$

что приводит к системе линейных уравнений:

$$(G^T HG)x = G^T c. \tag{6}$$

Найдя решение этой системы, можем вычислить вектор:

$$y = c - Gx. \tag{7}$$

Система линейных уравнений при вычислении евклидовой проекции на линейное многообразие (2.2). Согласно правилам (7.12), (7.13) сопряженной к функции f_2^h будет функция f_2^l при $l_j = {}^1/_{h_j}$, $j = 1, \dots, n$. Рассмотрим двойственную задачу безусловной минимизации (7.20) для случая $p = q = 2$:

$$\omega_2^l(u) \equiv f_2^l(A^T u) - b^T u \to min, \quad u \in R^k. \tag{8}$$

Это задача безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции. Необходимым и достаточным условием минимума является равенство нулевому вектору вектора частных производных:

$$\nabla\omega_2^l(u) = 0. \tag{9}$$

Это приводит к задаче поиска решения системы линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей:

$$(ALA^T)u = b, \tag{10}$$

где

$$L = diag\ l. \tag{11}$$

Обозначим $\overline{u}$ решение системы (10). Найдя этот вектор, можем вычислить вектор

$$\overline{v} = A^T\overline{u}, \tag{12}$$

и, затем, искомую проекцию начала координат на линейное многообразие (2.2):

$$\overline{y} = H^{-1}\overline{v}. \tag{13}$$

9. ГЁЛЬДЕРОВСКИЕ И ЕВКЛИДОВЫ НЕСИММЕТРИЧНЫЕ НОРМЫ И ПРОЕКЦИИ

Определения и обозначения. Здесь и далее используются «срезки» неотрицательных и неположительных чисел: для вещественного α полагаем

$$(\alpha)_+ = \max(\alpha, 0), (\alpha)_- = \min(\alpha, 0). \quad (1)$$

Гёльдеровские и евклидовы несимметричные нормы. В некоторых задачах требуется по-разному штрафовать за отклонения от нуля компонент искомого вектора линейного многообразия. В этих целях можно использовать вводимую ниже гёльдеровскую несимметричную норму. При формировании этой функции используется два вектора штрафных коэффициентов d и q из R^n_+. Гёльдеровская несимметричная норма вектора $y \in R^n$ имеет следующий вид (при заданном степенном коэффициенте $p > 1$):

$$\rho_p^{d,q}(y)=(\sum_1^n (d_j y_{j)}{}_+^p + ((-q_j y_j)_+^p)^{1/p}. \quad (2)$$

Гёльдеровской несимметричной норме соответствует следующая строго выпуклая функция, находящаяся в множестве функций F:

$$f_p^{d,q}(y) = p^{-1} \sum_1^n ((d_j y_j)_+^p + (-q_j y_j)_+^p). \quad (3)$$

Гёльдеровской несимметричной проекцией начала координат на линейное многообразие будем называть решение задачи (6.1) при использовании в качестве штрафной функции гёльдеровской несимметричной нормы (2), что равносильно использованию строго выпуклой функции (3). Обозначим $\overline{P}_p, \overline{P}$ множества гёльдеровских несимметричных проекций на линейное многообразие с фиксированным степенным коэффициентом $p > 1$ и множество всех обобщенных гёльдеровских проекций.

Свойства гёльдеровских несимметричных проекций. Поскольку частными случаями гёльдеровских несимметричных норм являются исходные гёльдеровские нормы, когда векторы весовых коэффициентов совпадают, то множество гёльдеровских проекций начала координат на линейное многообразие включено в множество гёльдеровских несимметричных проекций начала координат на то же линейное многообразие. Оказывается, выполняется и обратное включение. В дополнение к теореме 11 справедливо следующее утверждение.

Теорема 12.

$$P_p = \overline{P_p} = P = \overline{P} = PF \text{ при любом } p > 1. \tag{4}$$

Для ее доказательства достаточно установить, что для любой гёльдеровской несимметричной проекции $y\left(f_p^{d.q}\right)$ существует совпадающая с ней гёльдеровская проекция $y\left(f_p^h\right)$. Действительно, это будет так, если положить:

$$h_j = d_j,\ \ j \in J_+\left(y\left(f_p^{d.q}\right)\right);\ h_j = q_j,\ j \in J_-\left(y\left(f_p^{d.q}\right)\right);$$
$$h_j = 1,\ j \in J_0\left(y\left(f_p^{d.q}\right)\right). \tag{5}$$

Задача поиска гёльдеровских несимметричных проекций начала координат на линейное многообразие. Поиск гёльдеровских несимметричных проекций можно представить как результат решения следующей задачи минимизации строго выпуклой функции при линейных ограничениях:

$$(\textstyle\sum_1^n (d_j y_j^+)^p + (q_j y_j^-)^p) \to min, \tag{6}$$
$$y - y^+ + y^- = 0, \tag{7}$$
$$y^+ \geq 0,\ y^- \geq 0, \tag{8}$$
$$y \in Y. \tag{9}$$

Переменные в этой задаче составляют векторы y, y^+, y^- из R^n. Условие (9) для конкретного алгебраического определения линейного многообразия можно заменить подстановкой этого вектора в это определение. При этом из (7) вектор y можно заменить на разность векторов y^+, y^-.

Так, для линейного многообразия (2.1) ограничения (7)–(9) приобретают следующий вид:

$$Gx + y^+ - y^- = c, \quad y^+ \geq 0,\ y^- \geq 0. \tag{10}$$

Для линейного многообразия (2.2) имеем следующую систему линейных уравнений и неравенств:

$$Ay^+ - Ay^- = b,\ y^+ \geq 0,\ y^- \geq 0. \tag{11}$$

Евклидовы несимметричные проекции. При $p = 2$ рассмотренные гёльдеровские несимметричные нормы являются евклидовыми несимметричными нормами. Задача (6)–(9) – задача квадратичного программирования с сепарабельной целевой функцией. Условия оптимальности этой задачи имеют вид системы линейных уравнений и неравенств.

10. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ. ОКТАЭДРАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ НАЧАЛА КООРДИНАТ НА ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Октаэдральной проекцией начала координат на линейное многообразие будем называть решение задачи поиска вектора линейного многообразия с минимальной октаэдральной нормой. Эта задача может иметь не единственное решение. Множество решений этой задачи при данном векторе весовых коэффициентов $h \in R_+^n$ обозначим как

$$Y^h = Arg\min\{\ \rho_1^h(y) :\ y \in Y\}. \tag{1}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 13.

$$Q = \{\cup\, Y^h :\ h \in R_+^n\}. \tag{2}$$

Теорема 14. *Если $y \in\ Y^h$ при некотором $h \in R_+^n$, то любой вектор из Y с одинаковыми или суженными относительно y наборами номеров положительных и отрицательных компонент также находится в Y^h.*

Теорема 15.

$$Y^h \cap B \neq \emptyset \ \textit{при любом}\ \ h \in R_+^n.$$

Согласно теореме 13 любой вектор из множества векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент может быть получен как октаэдральная проекция начала координат на это линейное многообразие. Напомним, что в качестве гёльдеровской проекции начала координат на линейное многообразие могут быть получены только все относительно внутренние точки множества векторов многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент.

В силу теоремы 13 для любого вектора $y \in Q$ существует такой вектор $h \in R_+^n$, что $y \in Y^h$. По теореме 5 множество Q состоит из конечного числа политопов $Q^i, i = 1, \dots, k.$ Причем по лемме 5 все векторы указанных политопов имеют одинаковые или суженные наборы положительных и отрицательных компонент вектора y^i из набора векторов в области относительно внутренних точек Q^i. $i = 1, \dots, k.$

Каждому вектору y^i соответствует вектор $h_i \in R^n_+$, при котором $y^i \in Y^{h_i}$. Следовательно, при данном h_i множество Y^{h_i} включает все множество Q^i Справедлива

Терема 16. *Существует конечное число значений вектора положительных весовых коэффициентов* $h_i, . i = 1, \dots, k,$ *порождаемые которыми множества октаэдральных проекций* Y^{h_i} *содержат все октаэдральные проекции при всех наборах положительных весовых коэффициентов –*

$$Q = \cup_{i=1}^{k} Y^{h_i}. \qquad (3)$$

Согласно теореме 15, октаэдральные проекции начала координат на линейное многообразие всегда содержат векторы линейного многообразия с минимальным носителем. Этот факт для случая единичных весовых коэффициентов был отдельно доказан А.В. Лакеевым [74]. С этим свойством связано приписываемое октаэдральным проекциям «робастность», устойчивость к «выбросам» исходных данных [9–12].

Приведенные теоремы означают, что множество октаэдральных проекций для данного вектора весовых коэффициентов состоит из единственного вектора в том и только в том случае, если это вектор линейного многообразия с минимальным носителем. Другие векторы из Q, не являющиеся «особыми» векторами линейного многообразия, будут октаэдральными проекциями только в том случае, если при данном наборе весовых коэффициентов h множество октаэдральных проекций Y^h состоит не из одного вектора.

Пример. На рис. 6 представлено множество октаэдральных проекций для рассмотренного в разд. 5 примера 1. На этом рисунке прямой линией изображено рассматриваемое линейное многообразие.

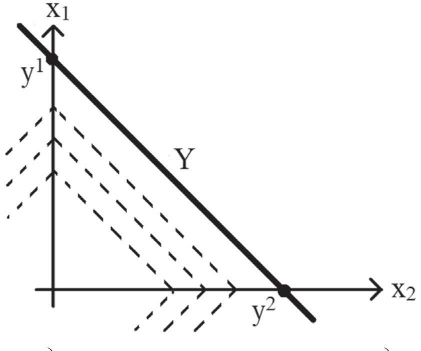

Рис. 6. *Октаэдральные проекции начала координат на линейное многообразие (пунктиром обозначены линии уровня октаэдральной нормы в случае одинаковых весовых коэффициентов)*

Пунктирной линией представлены линии уровня октаэдральной нормы при одинаковых весовых коэффициентах. В этом случае октаэдральные проекции составят весь интервал значений векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Подчеркнем, что в множество октаэдральных проекций войдут и границы интервала, т.е. «особые» векторы рассматриваемого линейного многообразия.

Если весовые коэффициенты не будут равными, то ромб линий уровня октаэдральной нормы вытянется либо по горизонтали, либо по вертикали. В обоих случаях октаэдральная проекция будет состоять только из одного вектора, которым будет один из двух «особых» векторов.

Особенности метода наименьших модулей. Как отмечалось, вычисление октаэдральных проекций на линейное многообразие сводится к задачам линейного программирования, для решения которых имеются хорошие вычислительные программы. Ограничимся здесь констатацией установленных математических свойств октаэдральных проекций, которые полезно учитывать при использовании метода наименьших модулей.

Октаэдральные проекции обладают четырьмя важными особенностями по сравнению с гёльдеровскими и евклидовыми проекциями. Первая заключается в том, они всегда существуют, но могут не обладать свойством единственности для данной октаэдральной нормы. Напомним, что задача минимизации на линейном многообразии гёльдеровской нормы всегда (при любых допустимых степенных и весовых коэффициентах в гёльдеровской норме) имеет только единственное решение. Вторая особенность – все октаэдральные проекции находятся среди векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Этим свойством обладают и гёльдеровские проекции. Отличие октаэдральных проекций состоит в том, что в результате варьирования весовых коэффициентов в норме можно получать в качестве октаэдральной проекции любой из векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями векторов (третья особенность), т.е. множество октаэдральных проекций начала координат на линейное многообразие (получаемое в результате варьирования положительных весовых коэффициентов в октаэдральной норме) совпадает с множеством векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. В то же время только замыкание множества гёльдеровских проекций (а не само их множество) совпадает с множеством векторов линейного многообразия, имеющих Парето-минимальные абсолютные значения компонент. Четвертая особенность состоит в том, что октаэдральные проекции (при любом наборе положительных весовых коэффициентов в октаэдральной норме) всегда содержат векторы линейного многообразия с максимальным набором нулевых компонент. Отсюда, в частности, следует, что если октаэдральная проекция единственная, то ею обязательно будет вектор линейного многообразия с максимальными наборами нулевых компонент.

К достоинствам можно отнести «робастность» этого метода, его устойчивость к «выбросам» в исходных данных [9; 10; 12], к недостаткам – отсутствие непрерывности изменений оценок параметров аппроксимации при варьировании весовых коэффициентов и данных, используемых при задании линейного многообразия. Недостатком можно считать и тот факт, что сумма взвешенных погрешностей аппроксимаций не равна нулю, что побуждало Лапласа специально вводить в постановку задачи оценки параметров методом наименьших модулей условие равенства нулю суммы величин погрешностей аппроксимации [64] (он рассматривал случай единичных весовых коэффициентов). Выявившиеся недостатки метода наименьших модулей сделали автора этого метода Лапласа активным сторонником метода наименьших квадратов, когда он с ним познакомился [64].

Октаэдральные обобщенные проекции. Если в октаэдральных нормах использовать разные значения весовых коэффициентов при положительных и отрицательных значениях одних и тех же компонент вектора, то полученная функция уже не будет нормой. Ее будем называть октаэдральной несимметричной нормой. Такую функцию будем представлять по аналогии с гёльдеровской несимметричной нормой в виде следующей функции от вектора $y \in R^n$ (при заданных векторах положительных весовых коэффициентов d, q):

$$\rho_1^{d,q}(y)=\sum_1^n(d_j\left(y_j\right)_+ + q_j\left(-y_j\right)_+). \tag{4}$$

Точку линейного многообразия с минимальной октаэдральной несимметричной нормой назовем октаэдральной несимметричной проекцией начала координат на линейное многообразие. Для заданных весовых коэффициентов может быть не единственная октаэдральная несимметричная проекция начала координат на линейное многообразие. Множество таких проекций обозначим

$$Y^{d,q} = Arg\min\{\ \rho_1^{d,q}(y) :\ y \in Y\}. \tag{5}$$

Поиск октаэдральных несимметричных проекций сводится к решению задачи линейного программирования следующего вида:

$$\textstyle\sum_1^n \left(d_j y_j^+ + q_j y_j^-\right) \to min, \tag{6}$$

$$y - y^+ + y^- = 0, \tag{7}$$

$$y^+ \geq 0,\ y^- \geq 0, \tag{8}$$

$$y \in Y. \tag{9}$$

Переменные этой задачи составляют векторы y, y^+, y^- из R^n. Условие (9) для конкретного алгебраического определения линейного многообразия можно заменить подстановкой этого вектора в это определение. При этом вектор y можно заменить на разность векторов y^+, y^-, на основе уравнения (7). Для линейных многообразий (2.1) и (2.2) условия (7)–(9) приобретают вид систем уравнений и неравенств (9.10) и, соответственно, (9.11).

Поскольку октаэдральные нормы являются частными случаями октаэдральных несимметричных норм, когда в обобщенных нормах $d = q$, то все октаэдральные проекции являются октаэдральными несимметричными проекциями. С другой стороны, любая обобщенная октаэдральная проекция $y\left(\rho_1^{d.q}\right)$ является октаэдральной проекцией $y\left(\rho_1^h\right)$ при следующих значениях вектора весовых коэффициентов:

$$\begin{gathered} h_j = d_j,\ j \in J_+\left(y\left(\rho_1^{d.q}\right)\right),\ h_j = q_j,\ j \in J_-\left(y\left(\rho_1^{d.q}\right)\right), \\ h_j = 1,\ j \in J_0\left(y\left(\rho_1^{d.q}\right)\right). \end{gathered} \tag{10}$$

Указанные два факта позволяют распространить приведенные выше свойства октаэдральных проекций на октаэдральные обобщенные проекции.

Двойственная к задаче поиска обобщенной чебышевской проекции начала координат на линейное многообразие. Рассмотрим задачу поиска октаэдральной несимметричной проекции начала координат на линейное многообразие (2.2). Условия (7) и (9) в этом случае приобретают вид:

$$Ay^+ - Ay^- = b. \tag{11}$$

Рассматриваемая задача представляется в виде задачи линейного программирования (6), (8), (11). Обозначим $\overline{y}^+, \overline{y}^-$ векторы R^n, составляющие оптимальное решение этой задачи. Согласно (7) обобщенной октаэдральной проекцией будет вектор

$$y\left(f_\infty^{d,q}\right) = \overline{y}^+ - \overline{y}^-. \tag{12}$$

Обозначим u вектор R^k, состоящий из множителей Лагранжа ограничений (11). Двойственной к (6), (8), (11) будет следующая задача линейного программирования с вектором переменных u:

$$b^T u \to max, \tag{13}$$

при ограничениях

$$d \geq A^T u \geq -q. \tag{14}$$

Оптимальное решение задачи (13), (14) обозначим $\overline{u}$. Векторы y^+, y^- составляют множители Лагранжа, соответственно первого и второго из ограничений неравенств в (14). Их значения в оптимальном решении составляют оптимальные решения $\overline{y}^+, \overline{y}^-$ исходной задачи (6), (8), (11).

Представление двойственной задачи в виде проблемы поиска чебышевской несимметричной проекции начала координат на линейное многообразие. Считаем, что $A \neq 0$, $b \neq 0$. В этом случае

$$b^T \overline{u} > 0. \tag{15}$$

Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\alpha \to min, \tag{16}$$

$$A^T u - v = 0, \tag{17}$$

$$b^T u = 1. \tag{18}$$

$$\alpha \geq d_j^{-1} v_j,\ q_j^{-1} v_j \geq -\alpha,\ j = 1, \dots, n. \tag{19}$$

Переменными этой задачи являются компоненты векторов $u \in R^k$, $v \in R^n$ и вещественная величина α.

Обозначим $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ оптимальные значения векторов переменных задачи (16)–(19). Пусть $\tilde{\alpha}$ оптимальное значение целевой функции. Эта величина в силу (19) положительная. Обозначим $\tilde{y}^+, \tilde{y}^-$ векторы множителей Лагранжа первого и, соответственно, второго из ограничений в (19) для оптимального решения рассматриваемой задачи.

На основе оптимальных решений задачи (16)–(19) можно определить оптимальное решение задач (6), (8), (11) и (13), (14) по правилам:

$$\overline{y}^+ = \alpha^{-1} \tilde{y}^+,\ \overline{y}^- = \alpha^{-1} \tilde{y}^-,\ \overline{u} = \alpha^{-1} \tilde{u}. \tag{20}$$

Изложенное свойство задачи (16)–(19) позволяет считать эту задачу модификацией двойственной задачи (13), (14). Эта модификация имеет вид задачи поиска обобщенной чебышевской проекции на линейное многообразие, заданное условиями (17), (19) относительно вектора переменных v.

11. ЧЕБЫШЕВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ, НЕ НУЖДАЮЩАЯСЯ В УСЛОВИИ ХААРА

Задан вектор положительных весовых коэффициентов $h \in R_{+}^{n}$, который используется в приводимом ниже определении чебышевской нормы вектора $y \in R^n$:

$$\rho_{\infty}^{h}(y) = max\{h_j|y_j| : j = 1, \dots , n\}. \qquad (1)$$

Поиск чебышевской проекции начала координат на линейное многообразие состоит в минимизации указанной чебышевской нормы на линейном многообразии:

$$\rho_{\infty}^{h}(y) \to min, \;\; y \in Y. \qquad (2)$$

Эта проблема представляется в виде задачи линейного программирования, которая может иметь не единственное решение. Причем среди решений могут оказаться не находящиеся в множестве векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент.

В целях борьбы с негативными последствиями от неоднозначности было введено условие Хаара [45], согласно которому задачу поиска чебышевской проекции на линейное многообразие следует рассматривать только для случая, когда эта задача имеет единственное решение. Для систем линейных неравенств условие Хаара может рассматриваться как один из вариантов условия невырожденности решений. Именно в таком смысле условие Хаара используется в фундаментальной книге по линейным неравенствам С.Н. Черникова [46]. Далеко не всегда выполнение условия Хаара легко можно проверить. И что делать, если оно не выполняется или неизвестно, выполняется или нет?

Пример. Рассматривается представленное на рис. 7 одномерное линейное многообразие в двухмерном пространстве. Многообразие имеет вид прямой линии, параллельной оси абсцисс, т.е. первой компоненте векторов пространства. Эта прямая определяется условием:

$$y_2 = b \qquad (3)$$

при некотором заданном вещественном $b > 0$. Все рассмотренные ранее в данной книге формулировки задачи поиска ближайшей к началу координат точки линейного многообразия дадут в качестве решения единственный вектор с компонентами

$$y_1 = 0,\ y_2 = b. \tag{4}$$

Только из одного этого вектора будет состоять множество векторов данного линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент.

Условие Хаара в этом случае не выполняется. Поиск чебышевской проекции даст интервал решений, содержащий внутри указанную выше точку, в частности, при одинаковых весовых коэффициентах этот интервал будет содержать векторы со значениями первой компоненты от $-\ b$ *до* b, а значение второй компоненты неизменно и равно величине b.

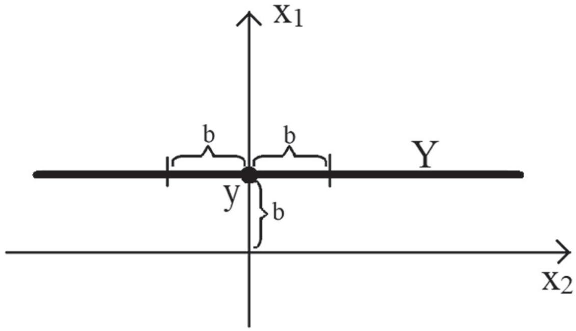

Рис. 7. *Линейное многообразие, задаваемое условием* $y_2 = b$

Общее описание предлагаемого алгоритма поиска однозначной чебышевской проекции. Вместо использования условия Хаара было предложено [33; 43] использовать алгоритм последовательного поиска относительно внутренних точек оптимальных решений конечного числа лексикографически упорядоченных задач линейного программирования. Подробное описание этого алгоритма и его свойств имеется в [32–35; 44]. Свойством вырабатывать именно относительно внутренние точки оптимальных решений (оптимальных решений с минимальным, несужаемым набором активных ограничений) обладает метод внутренних точек [37].

Приведенный пример подсказывает идею, как можно было бы попытаться добиться однозначного, вполне разумного решения в подобной ситуации. Можно воспользоваться правилом, которое основано на поиске относительно внутренних точек оптимальных решений последовательности задач линейного программирования с лексикографически упорядоченными целевыми функциями.

На первом этапе при решении задачи (2) предлагается находить такое ее решение, при котором значения величин $h_j|y_j|$ равны оптимальному значению целевой функции только для минимального набора номеров компонент j. Это будут относительно внутренние точки оптимальных решений данной задачи. Фиксируем на достигнутом значении переменные с такими номерами.

Затем осуществляем минимизацию исходной чебышевской нормы на линейном многообразии с зафиксированными значениями части компонент искомого вектора. Находим относительно внутреннюю точку оптимальных решений новой задачи. Фиксируем переменные, при которых достигается оптимальное значение целевой функции. Переходим к следующему такому же этапу, пока не будет исчерпан весь список переменных.

Для рассматриваемого примера описанная процедура заканчивается на втором этапе. На первом этапе переменной, на которой достигается оптимальное значение целевой функции, будет вторая компонента вектора y. Фиксируем ее на оптимальном уровне, равном b. В результате решения задачи второго этапа получим оптимальное значение первой компоненты, равное нулю.

Свойства чебышевских проекций. Получаемую по представленному алгоритму однозначную чебышевскую проекцию начала координат на линейное многообразие обозначим $y(\rho_\infty^h)$. Множество таких чебышевских проекций при различных векторах весовых коэффициентов $h \in R_+^n$ обозначим P_∞.

Возникает естественный вопрос: насколько «разумно» или «правомочно» введенное правило построения всегда однозначной чебышевской проекции. Первым теоретическим результатом [43] в подтверждении разумности введенного правила было доказательство того, что предложенные всегда однозначные чебышевские проекции являются векторами линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент:

$$P_\infty \subseteq Q. \tag{5}$$

Затем было доказано [33], что любую из евклидовых проекций можно представить как одну из введенных чебышевских проекций:

$$P_2 \subseteq P_\infty. \tag{6}$$

Впоследствии удалось установить [34] справедливость обратного соотношения:

$$P_\infty \subseteq P_2. \quad (7)$$

Получили следующее утверждение.

Теорема 17.

$$P_2 = P_\infty. \quad (8)$$

Эта теорема подтверждает правомочность введенного алгоритма поиска однозначной чебышевской проекции. Согласно этой теореме евклидову проекцию при любом векторе весовых коэффициентов из R_+^n можно получить в виде чебышевской проекции при некотором векторе весовых коэффициентов из R_+^n.

При этом справедливо и обратное. Для любой чебышевской проекции с любым вектором положительных весовых коэффициентов в чебышевской норме существует вектор положительных весовых коэффициентов, использование которого в евклидовой норме даст евклидову проекцию, совпадающую с исходной чебышевской проекцией. Во второй части доказывается (на базе теорем об альтернативных системах линейных неравенств) утверждение только в виде факта существования, без указания на конкретное правило перехода от одних весовых коэффициентов к другим.

Пример. На рис. 8 представлено одномерное линейное многообразие в двухмерном пространстве, которое рассматривалось в примерах 1, 5 и 6.

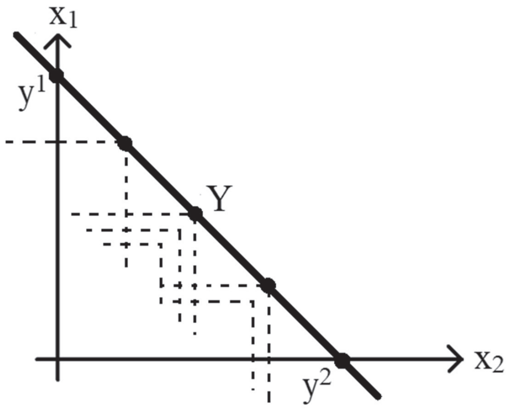

Рис. 8. *Чебышевские проекции начала координат на линейное многообразие с различными весами*

Пунктиром изображены линии уровня чебышевскких норм при различных соотношениях весовых коэффициентов.

Этот рисунок показывает, что, варьируя соотношениями весовых коэффициентов, можно получить в качестве чебышевской проекции начала координат весь открытый интервал точек на рассматриваемой в качестве линейного многообразия между двумя векторами с минимальными носителями. Такой же открытый интервал значений имели в примере 4 для множества евклидовых проекций. Это иллюстрирует приведенную выше теорему 17.

Сходимость гёльдеровских проекций к чебышевской проекции. Приводимая далее теорема является еще одним подтверждением того, что предлагаемая чебышевская проекция является вполне оправданным способом избавления от условия Хаара. Как отмечалось выше, гёльдеровские нормы сходятся к чебышевской норме при стремлении степенного коэффициента нормы к бесконечности. Этот факт справедлив, когда используются одни и те же весовые коэффициенты в гёльдеровских и в чебышевской нормах.

Приводимая ниже теорема идейно близка к отмеченной выше сходимости гельдеровских норм к чебышевской норме.

Теорема 18. Для любого вектора весовых коэффициентов $h \in R_+^n$ гёльдеровские проекции $y(f_p^h)$ сходятся при $p \to \infty$ к чебышевской проекции $y(\rho_\infty^h)$ с тем же вектором весовых коэффициентов.

Доказательство этой теоремы опубликовано в статье автора «Сходимость гёльдеровских проекций к чебышёвской проекции» [35]. Считаю своим долгом выразить благодарность неизвестному мне рецензенту этой статьи за активную поддержку ее публикации и содействие исправлениям выявленных погрешностей в тексте.

Сформулированный в теореме 18 факт может служить также основой для конструирования новых алгоритмов итеративного расчета рассматриваемых здесь чебышевских проекций путем итеративного приближения к гёльеровской проекции одновременно с увеличением в гёльдеровскойд норме степенного коэффициента. Один из возможных способов организации такого типа вычислительного процесса обсуждается в книге Ремеза [20]. Выражаю свою признательность В.Н. Малоземову за то, что он обратил внимание на этот алгоритм и на фундаментальную по проблемам чебышевской аппроксимации книгу [там же].

Пример 9. Приведем еще один пример, в котором задача (2) имеет неединственное решение и среди этих решений есть не находящиеся в множестве векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Этот пример представлен на рис. 9. Пример интересен также особым строением множества векторов многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент.

Рассматривается двумерное линейное многообразие, заданное как множество решений системы из двух линейных уравнений с четырьмя переменными:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 6, \tag{9}$$
$$y_3 + y_4 = 8. \tag{10}$$

Подпространство S, параллельное этому многообразию, состоит из векторов $s \in R^4$, являющихся решениями однородной системы линейных уравнений:

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0, \tag{11}$$
$$s_3 + s_4 = 0. \tag{12}$$

Ортогональное линейное подпространство $S^{\perp}$ состоит из векторов $s \in R^4$ с компонентами

$$s_1 = s_2 = u_1\,,\ s_3 = u_1 + u_2,\ s_4 = u_2. \tag{13}$$

где u_1, u_2 – любые вещественные числа.

Полагаем одинаковыми весовые коэффициенты $h_j = 1,\ j = 1, 2, 3$. В этом случае решение задачи (2) будет достигаться при значении чебышевской нормы равным 4. Таких решений много. В частности, ими являются векторы

$$\begin{gathered} x^1 = (-2, 4, 4, 4),\ x^2 = (0, 2, 4, 4),\ x^3 = (1, 1, 4, 4), \\ x^4 = (2, 0, 4, 4),\ x^5 = (4, -2, 4, 4). \end{gathered} \tag{14}$$

Причем любое решение задачи (2) является выпуклой комбинацией векторов x^1 и x^5, т.е. принадлежит замкнутому интервалу $[x^1, x^5]$.

Интервал $[x^1, x^5]$ разбивается точками x^2 и x^4 на три подынтервала. Векторы из двух крайних полуоткрытых интервалов не находятся в Q:

$$[x^1, x^2) \cap Q = \varnothing,\ \ (x^4, x^5] \cap Q = \varnothing. \tag{15}$$

Действительно, вектор $s = (1, -1, 0, 0)^T$ удовлетворяет условиям (11), (12). При этом для любого x из интервала $[x_1, x^2)$ выполняются соотношения:

$$J_-(s) \subseteq J_+(x),\quad J_+(s) \subseteq J_-(x). \tag{16}$$

Из леммы 2 следует, что вектор x не находится в множестве Q.

Аналогично для x из интервала $(x^4, x^5]$ выполняются эти же соотношения (16) при $s = (-1,1,0,0)^T$, также удовлетворяющему (11), (12).

Векторы из замкнутого интервала $[x^2, x^4]$ находятся в Q. Для доказательства этого следует воспользоваться леммой 3. При $u_1 = u_2 = 1$ в (13) получаем вектор $s = (1, 1, 2, 1)^T$. С данным вектором s для любого вектора x из $[x^2, x^4]$ выполняются соотношения:

$$J_+(x) \subseteq J_+(s), \quad J_-(x) \subseteq J_-(s). \tag{17}$$

Согласно лемме 3 это означает, что вектор x принадлежит Q.

Интересующие нас объекты двумерного линейного многообразия представлены на рис. 9. Этот рисунок сделан на плоскости самого линейного многообразия. Выделенные прямые линии состоят из векторов линейного многообразия, у которых нулевое значение имеет одна из компонент. Точки пересечения прямых образуют векторы с минимальным носителем, составляющие множество B. Это векторы: $y^1 = (0, 0, 6, 2)$, $y^2 = (0, 6, 0, 8)$, $y^3 = (6, 0, 0, 8)$, $y^4 = (0, -2, 8, 0)$, $y^5 = (-2, 0, 8, 0)$

Их получилось на единицу меньше, чем верхняя оценка $C_4^2 = 6$, поскольку прямые $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$ не пересекаются.

Множество векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент Q в данном примере не выпукло. Оно состоит из объединения двух треугольников: $Q = \mathrm{co}\left\{y^1, y^2, y^3\right\} \cup \mathrm{co}\left\{y^1, y^4, y^5\right\}$.

Поскольку точка y^1 входит в оба треугольника, то Q – связное множество.

Множество евклидовых P_2 проекций состоит из относительно внутренних точек этих треугольников с добавлением точки y^1, что делает это множество связным: $P_2 = \mathrm{ri}\,\mathrm{co}\left\{y^1, y^2, y^3\right\} \cup \mathrm{ri}\,\mathrm{co}\left\{y^1, y^4, y^5\right\} \cup \left\{y^1\right\}$.

Пунктирной линией изображен отрезок $[x^1, x^5]$ исходных чебышевских проекций. Видно, что расположенные на этом отрезке полуоткрытые интервалы $[x^1, x^2)$ и $(x^4, x^5]$ в Q не находятся. Интервал $[x^2, x^4]$ находится в Q.

В рассматриваемом примере однозначной чебышевской проекцией при одинаковых весовых коэффициентах в чебышевской норме будет вектор x^3.

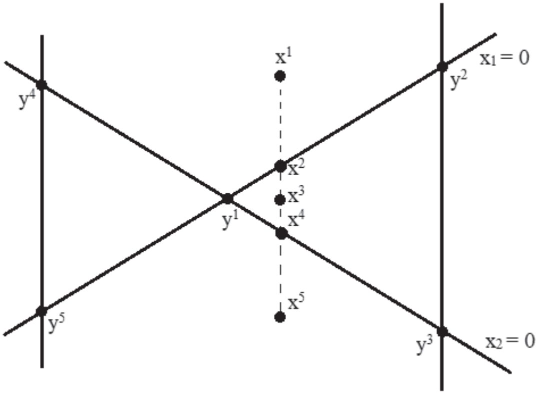

Рис. 9. *Множество векторов с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент Q (объединение двух треугольников) и векторы линейного многообразия с минимальным носителем y^i, $i = 1, \ldots, 5$ для рассматриваемого числового примера*

12. ЧЕБЫШЕВСКИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРОЕКЦИИ

В данном разделе рассмотрим задачу поиска чебышевской несимметричной проекции начала координат на линейное многообразие, заданное в виде (2.1). На этой основе можно легко перейти к задаче поиска исходной чебышевской проекции, у которой рассматриваемые здесь два вектора весовых коэффициентов d и q совпадают. Здесь будет изложен алгоритм поиска однозначной чебышевской несимметричной проекции, который не нуждается в условии невырожденности Хаара. По аналогии можно формировать алгоритмы поиска чебышевских проекций для других видов алгебраического описания линейного многообразия, в том числе для линейного многообразия, заданного условием вида (2.2).

Исходная задача поиска чебышевской несимметричной проекции. Заданы матрица G размера $n \times r$, вектор $c \in R^n$, векторы весовых коэффициентов d, q из R^n_+. Переменные величины составляют векторы y^+, y^- из R^n_+, вектор $x \in R^r$ и значение целевой функции α. Исходная проблема поиска чебышевской несимметричной проекции представляется в виде следующей задачи линейного программирования:

$$Gx + y^+ - y^- = c, \tag{1}$$

$$y^+ \geq 0,\ y^- \geq 0, \tag{2}$$

$$\alpha - d_j y_j^+ \geq 0,\ \ j = 1, \dots, n, \tag{3}$$

$$\alpha - q_j y_j^- \geq 0,\ j = 1, \dots, n, \tag{4}$$

$$\alpha \to min. \tag{5}$$

Если приведенная задача имеет единственное решение, то им будет искомая чебышевская несимметричная проекция, вычисляемая по правилу:

$$y = y^+ - y^-. \tag{6}$$

Если оптимальное решение у задачи (1)–(5) не единственное, то чебышевскую несимметричную проекцию будет по правилу (6) формировать одно из оптимальных решений этой задачи, определяемое в приводимом далее алгоритме.

Двойственная задача. Обозначим *u, v, w* векторы R^n, состоящие из множителей Лагранжа ограничений (1), (3), (4). Двойственная к (1)–(5) задача линейного программирования имеет вид:

$$G^T u = 0, \tag{7}$$
$$\sum_1^n v_j + \sum_1^n w_j = 1, \tag{8}$$
$$d_j v_j - u_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{9}$$
$$q_j w_j + u_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{10}$$
$$v \geq 0, \;\; w \geq 0, \tag{11}$$
$$c^T u \longrightarrow max. \tag{12}$$

Множителями Лагранжа у этой задачи будут переменные исходной задачи (1)–(5). Множителями Лагранжа для условия (7) являются компоненты вектора x, множителем Лагранжа условия (8) – переменная α, а условий (9), (10) – компоненты векторов y^+, y^-.

Критерий для выявления относительно внутренних точек оптимальных решений. Условие дополняющей нежесткости в строгой форме. Для того чтобы допустимые по ограничениям исходной и двойственной задач решения были оптимальными, необходимо и достаточно выполнения условий дополняющей нежесткости:

$$min\{y_j^+, d_j v_j - u_j\} = 0, \;\; j = 1, \dots, n, \tag{13}$$
$$min\{y_j^-, q_j w_j + u_j\} = 0, \;\; j = 1, \dots, n, \tag{14}$$
$$min\{v_j, \alpha - d_j y_j^+\} = 0, \;\; j = 1, \dots, n, \tag{15}$$
$$min\{w_j, \alpha - q_j y_j^-\} = 0, \;\; j = 1, \dots, n. \tag{16}$$

Для того чтобы допустимые по ограничениям прямой и двойственной задач решения были относительно внутренними точками множеств оптимальных решений задач (1)–(5) и (7)–(12), необходимо и достаточно, чтобы в дополнение к (13)–(16) выполнялись неравенства:

$$max\{y_j^+, d_j v_j - u_j\} > 0, \;\; j = 1, \dots, n, \tag{17}$$
$$max\{y_j^-, q_j w_j + u_j\} > 0, \;\; j = 1, \dots, n, \tag{18}$$
$$max\{v_j, \alpha - d_j y_j^+\} > 0, \;\; j = 1, \dots, n, \tag{19}$$
$$max\{w_j, \alpha - q_j y_j^-\} > 0, \;\; j = 1, \dots, n. \tag{20}$$

Соотношения (13)–(20) называются условиями дополняющей нежесткости в строгой форме. Их выполнение для решений, удовлетворяющих условиям (1)–(4) и (7)–(11), означает, что получены оптимальные решения прямой и двойственной задач с минимальными наборами ограничений неравенств, выполняемых в виде равенств.

Свойством вырабатывать именно такие оптимальные решения обладают алгоритмы метода внутренних точек.

Алгоритм поиска однозначной чебышевской несимметричной проекции. Рассматривается итеративная процедура решения последовательности задач линейного программирования, порождаемая задачей (1)–(5). На каждой итерации осуществляется поиск относительно внутренних точек оптимальных решений задач линейного программирования. Обозначим $\tau = 0, \dots , t$ номера итераций. Множество номеров компонент векторов переменных $J = \{j = 1, \dots , n\}$ разобъем на два подмножества K^τ и L^τ Первоначально полагаем $K^0 = \emptyset,\ L^0 = J$.

На итерациях $\tau = 0, \dots , t$ осуществляем поиск относительно внутренней точки задачи (1)–(5) при зафиксированных значениях переменных с номерами из K^τ. Полагаем в дополнение к (1)–(4) следующие условия:

$$y_j^+ = z_j^+,\ y_j^- = z_j^-,\ j \in K^\tau. \tag{21}$$

У всех относительно внутренних точек оптимальных решений (т.е. оптимальных решений с минимальными наборами активных ограничений) одни и те же номера переменных, составляющие компоненты векторов y^+, y^-, у которых условия (3) или (4) выполняются в виде равенства. Если для компоненты $j \in L^\tau$ вектора y^+ в виде равенства выполняется условие (3), то обязательно $y_j^- = 0$. Если для компоненты $j \in L^\tau$ вектора y^- в виде равенства выполняется условие (4), то обязательно $y_j^+ = 0$. Множество номеров компонент, обладающих одним из этих двух свойств, обозначим I^τ. Зафиксируем компоненты с номерами из I^τ формируемых векторов z^+, z^-. Положим:

$$z_j^+ = y_j^+,\ z_j^- = y_j^-,\ j \in I^\tau. \tag{22}$$

Исключим из L^τ и включим в K^τ набор номеров I^τ. Измененным множествам номеров присваиваем следующий номер $L^{\tau+1}$, $K^{\tau+1}$. Переходим к следующей итерации расчетов.

Поскольку на каждой итерации не пусто множество I^τ, то через конечное число итераций выяснится, что множество $L^{\tau+1}$ пусто. Это будет последняя итерация. Полагаем $t = \tau$. Искомой обобщенной чебышевской проекцией будет вектор

$$y\left(f_\infty^{d,q}\right) = z^+ - z^-. \tag{23}$$

В качестве дополнения уместно отметить, что получаемая относительно внутренняя точка множества допустимых решений на очередной итерации после фиксации переменных, вышедших на граничные значения условий неравенств, является относительно внутренней точкой допустимых решений задачи следующего этапа, что удобно для использования алгоритмов метода внутренних точек.

На каждой итерации число переменных решаемой задачи линейного программирования сокращается. Происходит итеративное уменьшение оптимального значения целевой функции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблемы медленно рождаются, но быстро размножаются. Представленные в данной книге исследования начались с вопроса: чем различаются решения задачи линейной аппроксимации при использовании метода наименьших квадратов, наименьших модулей и при использовании постановок на основе минимизации чебышевских норм? Ныне многое прояснилось по этому вопросу. Но еще больше проявилось новых задач для изучения.

Некоторые из них нуждаются в проведении стандартных математических исследований. Будет ли сходимость гёльдеровских проекций к однозначной октаэдральной проекции при степенном коэффициенте гёльдеровских норм, стремящемся к единице? Имеет ли место непрерывность зависимости введенной однозначной чебышевской проекции от вектора весовых коэффициентов в чебышевской норме?

Можно особо выделить одно из направлений, требующих дальнейших проработок, а именно содержательную интерпретацию приведенных фактов из теории двойственности для рассматриваемых задач аппроксимации. Каждой из задач поиска гёдьдеровской, евклидовой, октаэдральной, чебышевской проекции начала координат на линейное многообразие соответствует двойственная задача, которую можно представить в виде проблемы поиска двойственной гёльдеровской, евклидовой, чебышевской и октаэдральной проекции начала координат на другое (его можно назвать двойственным) линейное многообразие. Этот факт полезен для организации вычислений. Очевидно, двойственность важна и для содержательного понимания решаемых проблем. В данном научном докладе совсем не рассматривался вопрос о том, как интерпретировать двойственную задачу для различных содержательных постановок исходной задачи.

И, наконец, очень важен такой вопрос: можно ли обобщить представленные здесь исследования на другие, более сложные, чем линейные многообразия, множества?

В этой книге исследования свойств и взаимосвязей методов аппроксимации и других «родственных» прикладных математических проблем изложены только для задач с ограничениями в форме линейных уравнений. Некоторые из приведенных результатов автору удалось распространить на более широкие классы задач, имеющих ограничения в форме линейных неравенств. Автор надеется в дальнейшем рассмотреть в специальной публикации свойства и взаимосвязи методов аппроксимации, использующих линейные уравнения и неравенства. Или, иными словами, планируется детально рассмотреть свойства и взаимосвязи ближайших к началу координат точек выпуклых полиэдров, состоящих из решений систем линейных уравнений и неравенств.

Если под воздействием данной работы уменьшится количество высказываний о том, что один из обычно рассматриваемых методов аппроксимации (наименьших модулей, наименьших квадратов, минимизации чебышевской нормы невязок) безусловно лучше других, то цель этой книги частично достигнута. В качестве основных результатов, представленных здесь, можем считать приводимые утверждения о том, что любое решение, которое можно получить одним из этих методов, достигается и другими за счет выбора весовых коэффициентов.

В вычислительном отношении некоторое преимущество имеет метод наименьших квадратов. Для его реализации достаточно располагать вычислительной программой, позволяющей решать системы линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей.

Для реализации метода наименьших модулей требуется решать задачу линейного программирования. Эффективным методом в этом случае является метод внутренних точек, итеративные переходы в котором основываются на решениях систем линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей. Из-за чего можем считать, что для метода наименьших модулей нужна несколько более сложная, требующая большего времени расчетов программа.

Для поиска чебышевской проекции по изложенному здесь алгоритму, необходимо многократное решение задач линейного программирования. Причем для каждой из них требуется найти особое оптимальное решение – с минимальным набором активных ограничений. Такие решения вырабатывают как раз алгоритмы метода внутренних точек. Поэтому можем считать, что в вычислительном отношении поиск чебышевской проекции несколько сложнее, чем поиск октаэдральной и тем более евклидовой проекции. Конечно, при современной вычислительной технике все эти различия в объемах вычислений малосущественны.

Если данное издание поможет кому-то понять, что, занимаясь аппроксимацией и ей подобными процедурами, необходимо задуматься не только о выборе конкретной математической постановки задачи, но и о выборе весовых коэффициентов для исследуемых данных, то можно считать эту книгу полезной.

Можно ожидать, что представленные здесь исследования будут полезными и для других задач аппроксимации, в том числе для интенсивно развиваемого ныне машинного обучения, нейронных сетей. Все эти родственные области современной прикладной математики нуждаются в формировании надежной научной базы для обоснованного выбора структур обучаемых моделей и методов обучения.

Замечания. Научный доклад не претендует на полноту охвата задач и методов аппроксимации. Основная его цель состояла прежде всего в системном изложении результатов исследований автора по очерченному в начале книги кругу проблем. Эти исследования охватывали изучение только свойств и взаимосвязей основных «классических» методов линейной аппроксимации.

Вне рамок данной книги остались многие направления научных исследований задач и методов аппроксимации, в том числе на основе минимизации других, не рассмотренных здесь штрафных функций, на основе аксиоматического подхода к выбору методов обработки данных и на основе использования метода Монте-Карло при сравнительном анализе методов оценки параметров. Особо можно отметить активно развиваемые интервальные подходы в задачах и методах аппроксимации [7; 75]. Кроме того, не рассмотрены и вычислительные особенности, имеющиеся теоретические результаты по проекциям на линейные множества (см., например, [76; 77]).

При проведении представленных здесь исследований важное значение имели возможности постоянных контактов со многими коллегами, в том числе в рамках научных семинаров и конференций. Особо можно выделить два постоянно действующих научных семинара: Международный веб-семинар «Интервальный анализ и его приложения», большую работу по организации которого осуществляют С.П. Шарый и Е.В. Чаусова, и «Семинар по оптимизации, машинному обучению и искусственному интеллекту», проводимый под руковод-

ством В.Н. Малоземова и Г.Ш. Тамасяна. В лекциях автора этой книги, сохраненных в материалах указанных семинаров, представлены многие из изложенных здесь результатов.

Автор благодарен также новосибирским ученым С.И. Кабанихину и М.А. Шишленину, организаторам ежегодной международной конференции по обратным математическим задачам. Обсуждения изложенных в данном издании результатов в кругу специалистов были очень полезны для развития исследований.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Чеботарев А.С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятности / А.С. Чеботарев. – Москва : Геодезиздат, 1928. – 155 с.

2. Идельсон Н.И. Уравнительные вычисления по способу наименьших квадратов / Н.И. Идельсон. – Москва : Государственное издательство, 1927. – 192 с.

3. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Ю.В. Линник. – Москва : Физматгиз, 1962. – 349 с.

4. Колмогоров А.И. К обоснованию метода наименьших квадратов / А.И. Колмогоров // Теория вероятностей и математическая статистика. – Москва : Наука, 1986.

5. Лоусон Ч. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Ч. Лоусон, Р. Хенсон. – Москва : Наука, 1986. – 232 с.

6. Титов О.А. Математические методы обработки наблюдений / О.А. Титов. – Санкт-Петербург : СПбГУ, 2001. – 34 с.

7. Обработка и анализ интервальных данных / А.Н. Баженов, С.И. Жилин, С.И. Кумков, С.П. Шарый. Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2024. – 356 с.

8. Гаусс К.Ф. Избранные геофизические сочинения / К.Ф. Гаусс. Москва : Гедезиздат, 1957. – 152 с.

9. Мудров В.И. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. Москва : Радио и связь, 1983. – 304 с.

10. Панюков А.В. Взаимосвязь взвешенного и обобщенного вариантов метода наименьших модулей / А.В. Панюков, А.Н. Тырсин // Известия Челябинского научного центра. 2007. – № 1 (35). – С. 6–11.

11. Азарян А.А. Быстрые алгоритмы моделирования многомерных линейных регрессионных зависимостей на основе метода наименьших модулей : дис. … канд. физ.-мат. наук / А.А. Азарян. – Екатеринбург, 2018. – 148 с.

12. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния / Ф. Хампель, Э. Рончетти, П. Рауссеу, В. Штаэль. – Москва : Мир, 1989. – 512 с.

13. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения / Е.Я Ремез. – Киев : Наукова думка, 1969. – 624 с.

14. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – Москва : Наука, 1972. – 368 с.

15. Чебышев П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функции / П.Л. Чебышев // Полное собрание сочинений. – Москва : Ленинград, 1947. – Т. 2. – С. 151–235.

16. Колмогоров А.Н. Замечания по поводу многочленов П.Л. Чебышева наименее уклоняющихся от заданной функции / А.Н. Колмогоров // Успехи математических наук. – 1948. – Т. 3, вып. 1 (23). – С. 216–221.

17. Коллатц А. Теория приближений. Чебышевские приближения / А. Коллатц, В. Крабе. – Москва : Наука, 1978. – 272 с.

18. Долганов Р.Л. Чебышевская аппроксимация асимптотически выпуклыми семействами функций / Р.Л. Долганов // Известия вузов. Математика. – 1972. – № 7. – С. 35–41.

19. Александренко В.Л. Алгоритм построения приближенного равномерно-наилучшего решения системы несовместных линейных уравнений / В.Л. Александренко // Алгоритмы и алгоритмические языки. – Москва, 1968. – Вып. 3. – С. 57–64.

20. Каленчук-Порханова А.А. Наилучшая чебышевская аппроксимация функций одной и многих переменных / А.А. Каленчук-Порханова // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 6. – С. 155–164.

21. Зуховицкий С.И. Замечания об одном возможном обобщении теории А. Хаара и А.И. Колмогорова / С.И. Зуховицкий, М.Г. Крейн // Успехи математических наук. – 1950. – Т. 5, вып. 1 (35). – С. 217–229.

22. Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов и его конкуренты / В.И. Зоркальцев. – Иркутск : СЭИ СО РАН, 1993. – 30 с.

23. Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения / В.И. Зоркальцев. – Новосибирск : Наука, 1995. – 270 с.

24. Зоркальцев В.И. Наименее удаленные от начала координат точки линейного многообразия / В.И. Зоркальцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1995. – Т. 35. – С. 635–641.

25. Зоркальцев В.И. Проекции точки на аффинное множество / В.И. Зоркальцев // Проблемы оптимизации и экономические приложения : материалы V Всерос. науч.-практ. конф. (Омск, 2–6 июля 2012 г.). – Омск, 2012. – С. 30–32.

26. Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов и его конкуренты / В.И. Зоркальцев // Труды XXXVI Дальневосточной математической школы-семинара им. акад. Е.В. Золотова : сб. докл. (Владивосток, 4–10 сент. 2012 г.). – Владивосток, 2012. – С. 24–27.

27. Зоркальцев В.И. Гёльдеровские и октаэдрические проекции точки на линейное многообразие / В.И. Зоркальцев // Спектральные и эволюционные задачи : тр. междунар. конф. Крымская осенняя математическая школа-симпозиум. – Симферополь, 2012. – Т. 22. – С. 81–94.

28. Зоркальцев В.И. Октаэдрические и евклидовы проекции точки на линейное многообразие / В.И. Зоркальцев // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2012. – № 3. – С. 106–118.

29. Zorkal'tsev V.I. Octahedral and Euclidean Projections of a Point to a Linear Manifold / V.I. Zorkal'tsev // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2014. – Vol. 284, suppl. 1. – Pp. 1–13.

30. Зоркальцев В.И. Методика оценки и согласования параметров математических моделей / В.И. Зоркальцев, А.В. Казазаева. – Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2014. – 22 с.

31. Бычков И.В. Весовые коэффициенты в методе взвешенных наименьших квадратов / И.В. Бычков, В.И. Зоркальцев, А.В. Казазаева // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2015. – Т. 18, № 3. – С. 275–288.

32. Зоркальцев В.И. Чебышевские и евклидовы проекции точки на линейное многообразие / В.И. Зоркальцев, Е.В. Губий, С.М. Пержабинский // Управление большими системами. – 2019. – Вып. 80. – С. 6–19.

33. Зоркальцев В.И. Чебышевская аппроксимация и метод наименьших квадратов / В.И. Зоркальцев, Е.В. Губий // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математическая. – 2020. – Т. 33. – С. 3–19.

34. Зоркальцев В.И. Чебышевские проекции на линейное многообразие / В.И. Зоркальцев // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2020. – Т. 26, № 3. – С. 44–54.

35. Зоркальцев В.И. Сходимость гёльдеровских проекций к чебышёвской проекции / В.И. Зоркальцев // Журнал вычислительной ма-

тематики и математической физики. – 2020. – Т. 60, № 11. – С. 1867–1880.

36. Дикин И.И. Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внкутренних точек / И.И. Дикин, В.И. Зоркальцев. – Новосибирск : Наука, 1980. – 220 с.

37. Зоркальцев В.И. Метод внутренних точек: история и перспективы / В.И. Зоркальцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – № 10. – С. 1649–1665.

38. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход / У. Зангвилл. – Москва : Советское радио, 1973. – 312 с.

39. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход / Э. Полак. – Москва : Мир, 1974. – 376 с.

40. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – Москва : Наука, 1988. – 552 с.

41. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию / Б.Т. Поляк. – Москва : Наука, 1983. – 384 с.

42. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – Москва : Мир, 1973. – 470 с.

43. Zorkaltsev V.I. Chebyshev and Others Projections of Point on Polyhedron / V.I. Zorkaltsev // Abstracts of the International Conference dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. СПб., 2017.

44. Зоркальцев В.И. Чебышевские приближения могут обходиться без условия Хаара : материалы Междунар. симп., посвящ. 100-летию математического образования в Восточной Сибири и 80-летию со дня рождения проф. О.В. Васильева / В.И. Зоркальцев. – Иркутск, 2019. – С. 29–33.

45. Haare A. Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen / A. Haare. – 1917. – Vol. 78, iss. 1–4. – Pp. 294–311.

46. Черников С.Н. Линейные неравенства / С.Н. Черников. – Москва : Наука, 1968. – 48 с.

47. Леонтьев В.В. Экономические Эссе. Теория, исследования, факты и политика / В.В. Леонтьев. – Москва : Политиздат, 1990. – 415 с.

48. Воронов Ю.П. Нобелевские лауреаты по экономике : монография / Ю.П. Воронов. – Москва : ИНФРА-М, 2024. – Т. 1. XX век (1969–2000). –717 с.

49. Аганбегян А.Г. Экономико-математический анализ межотраслевого баланса СССР / А.Г. Аганбегян, А.Г. Гранберг. – Москва : Мысль, 1968. – 390 с.

50. Черкассовский Б.В. Задачи балансировки матриц / Б.В. Черкассовский // Методы математического программирования и программное обеспечение. – Свердловск : УрО АН СССР, 1984. – С. 216–217.

51. Согласование частных прогнозов в балансовых моделях / И.В. Батоева, А.Р. Беденков, В.И. Зоркальцев, С.Л. Садов. – Сыктывкар : Коми НЦ УрО АН СССР, 1990.

52. Гамм А.З. Статистические методы оценивания состояний электроэнергетических систем / А.З. Гамм. – Москва : Наука, 1976. – 220 с.

53. Гамм А.З. Методы анализа режимов электроэнергетических систем по данным измерений : дис. … д-ра техн. наук / А.З. Гамм. – Иркутск, 1981. 337 с.

54. Гамм А.З. Обнаружение грубых ошибок телеизмерений в электроэнергетических системах / А.З. Гамм. – Новосибирск : Наука, 2000. –152 с.

55. Колосок И.Н. Повышение достоверности телеизмерительной информации в ЭЭС на основе контрольных уравнений : дис. … д-ра техн. наук / И.Н. Колосок. – Иркутск, 2004. – 324 с.

56. Оценивание состояний электроэнергетических систем: алгоритмы и примеры решения линеаризованных задач / Л.А. Гурина, В.И. Зоркальцев, И.Н. Колосок, Е.С. Коркина, И.В. Мокрый. – Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2016. – 37 с.

57. Меренков А.П. Теория гидравлических цепей / А.П. Меренков, В.Я. Хасилев. – Москва : Наука, 1985. – 279 с.

58. Новицкий Н.Н. Развитие теории и методов сетевой идентификации трубопроводных систем : дис. … д-ра техн. наук / Н.Н. Новицкий. – Иркутск, 1999. – 435 с.

59. Епифанов С.П. Применение теории двойственности к моделям потокораспределения / С.П. Епифанов, В.И. Зоркальцев // Вычислительные технологии. – 2000. – № 1. – С. 67–79.

60. Новицкий Н.Н. Трубопроводные системы энергетики. Методические и прикладные проблемы математического моделирования / Н.Н. Новицкий, А.Д. Тевяшев. – Новосибирск : Наука, 2015.

61. Ерохин В.И. Согласование материального баланса крупного нефтеперерабатывающего завода в условиях неполных данных / В.И. Ерохин, А.Ю. Лаптев, Н.В. Лисицын // Известия РАН. Теория и системы управления. –2010. – № 2. – С. 130–140.

62. Зоркальцев В.И. Наименее удаленные от начала координат решения систем линейных неравенств / В.И. Зоркальцев // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математическая. – 2008. –Т. 8, № 2. – С. 1–13.

63. Зоркальцев В.И. Проекции точки на полиэдр / В.И. Зоркальцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. –Т. 33, № 1. – С. 4–19.

64. Гаусс К.Ф. Избранные геофизические сочинения / К.Ф. Гаусс. – Москва, 1967. – С. 3–15 (Багратуни Г.В. Предисловие к книге).

65. Журавель Н.М. Статистическое агрегирование в экономических системах / Н.М. Журавель. – Новосибирск : Наука, 1989. – 153 с.

66. Zorkaltsev V.I. The Problems of Aggregation in Economics / V.I. Zorkaltsev // We Keep the Traditions of Russian Statistics: the First Open Russian Statistical Congress. – Novosibirsk, 2015. – Pp. 276–277.

67. Зоркальцев В.И. Рента, налоги и структура цен / В.И. Зоркальцев, Л.И. Черникова. – Иркутск : СЭИ СО РАН, 1991. – 22 с.

68. Зоркальцев В.И. Многолетние вариации температур и их влияние на экономику и энергетику / В.И. Зоркальцев. – Новосибирск : Гео, 2017. – 179 с.

69. Еремин И.И. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования / И.И. Еремин, В.Д. Мазуров, Н.Н. Астафьев. – Москва : Наука, 1983. – 336 с.

70. Зоркальцев В.И. Системы линейных неравенств: учеб. пособие / В.И. Зоркальцев, М.А. Киселёва. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2007. – 127 с.

71. Хор Р. Матричный анализ / Р. Хор, Ч. Джонсон. – Москва : Мир, 1989. – 655 с.

72. Фадеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фадеев, Н.И. Фадеева. – Санкт-Петербург : Лань, 2002. – 736 с.

73. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 271 с.

74. Лакеев А.В. Метод наименьших модулей для линейной регрессии: число нулевых ошибок аппроксимации / А.В. Лакеев, С.И. Носков // Методы оптимизации и их приложения: сб. тр. XV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск, 2011. – Т. 2 : Математическое программирование. – С. 117–120.

75. Шарый С.П. Вероятностные конструкции в интервальном анализе данных. – URL: http://www.ict.nsc.ru/ru/education/seminar/veroyatnostnye-konstrukcii-intervalnom-analize-dannyh.

76. Избранные лекции по экстремальным задачам. В 2-х ч. / под. ред. проф. В.Н. Малоземова. – Санкт-Петербург, 2017. – Ч. 1. – 470 с. ; Ч. 2. – 410 с.

77. Малоземов В.Н. Оптимизация в полиэдральных нормах. – URL: https://rutube.ru/video/14191af32771244a6803ff8c4e0a3867.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Выпуск 1

Зоркальцев Валерий Иванович

СВОЙСТВА МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ (БЛИЖАЙШИЕ К НАЧАЛУ КООРДИНАТ ТОЧКИ ЛИНЕЙНЫХ МНОГООБРАЗИЙ)

Редактор Т.И. Кочульская

Оригинал-макет подготовлен К.М. Рыбновым

Дизайн обложки А.А. Мартыновой

ИД 06318 от 26.11.01
Подписано в печать 00.00.25. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Усл. печ. л. 5,1.
Тираж 500 экз. Заказ 0000.

Издательский дом ФГБОУ ВО «БГУ».
Отпечатано в ИПО ФГБОУ ВО «БГУ».
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.
https://bgu.ru.